Այստեղ ներկայացված է գրքի առաջաբանը և գլուխներից միայն մեկի՝ "Եռանկյուններ" գլխի խնդիրների լուծումները, որպեսզի ճիշտ պատկերացում կազմեք գրքի մասին:

Գիրքը՝ բոլոր գլուխների խնդիրների լուծումներով, կարող եք գնել գրախանութներից կամ գրավաճառներից:

ԵՐԿՐՈՐԴ ՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՋԱԲԱՆ

Այս հրատարակությունը նախորդից տարբերվում է նրանով, որ ավելացված են «Կոորդինատներ և վեկտորներ» թեմայի խնդիրների լուծումները և խնդիրների համարակալումը համապատասխանեցված է ներկայիս գործող դասագրքերի խնդիրների համարակալմանը (Լ.Ս. Աթանասյան, Վ.Ֆ. Բուտուզով, Ս.Բ. Կադոմցև և ուրիշներ:/- Եր.: «Զանգակ–97»)

Ինչպես և նախորդ հրատարրությունը, այն պարունակում է հարթաչափության յուրաքանչյուր պարագրաֆի ապացուցման բոլոր խնդիրների, հաշվարկային խնդիրների մի մասի և լրացուցիչ բաժինների բոլոր խնդիրների լուծումները, ինչպես նաև դժվարին խնդիրների մի մասի լուծումները:

Լուծումները շարադրված են բավականին մանրամասնորեն, և, մեր կարծիքով, տվյալ տարիքի աշակերտների համար առավել մատչելի ոճով (առանց սիմվոլների գործածության):

Լուծումները հիմնականում ուղեկցվում են գծագրերով, եթե դրանք չկան դասագրքում:

Խնդիրների լուծումներն առաջարկելիս հաշվի է առնվել երկրաչափական գիտելիքների այն պաշարը, որը, ըստ ծրագրի, պետք է ունենա աշակերտը խնդիրը լուծելու պահին: Իհարկե, ավելի մեծ պաշար ունեցող աշակերտի համար հաճախ կարելի էր առաջարկել առավել հակիճ լուծում:

Սիրելի աշակերտներ, ըստ էության խնդիրների քանակն ու տեսականին ձեզ հնարավորություն կտան ստանալ անհրաժեշտ բոլոր հարցերի պատասխանները: Բայց ձեռնարկի օգտագործումը չպետք է չարաշահել, այլ դիմել նրա օգնությանը տվյալ խնդրի լուծման համար բավական ջանքեր գործադրելուց հետո միայն: Ճիշտ օգտագործելու դեպքում այն կլինի ձեր լավ ընկերն ու օգնականը:

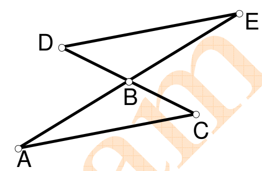
Գ.Վ. ԱՂԵԿՅԱՆ

7–րդ դասարան

Եռանկյուններ

104. ա) Քանի որ B–ն և՛ AE, և՛ DC հատվածի միջնակետն է, ապա $BD = BC$ և $AB = BE$: Որպես հակադիր անկյուններ՝ $\angle DBE = \angle ABC$:

Այսպիսով՝ ABC եռանկյան երկու կողմերը և նրանցով կազմված անկյունը համապատասխանաբար հավասար են EBD եռանկյան երկու կողմերին և նրանցով կազմված անկյանը: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի, $\Delta ABC = \Delta EBD$:



բ) ABC և EBD հավասար (տե՛ս ա) կետը) եռանկյուններում համապատասխանաբար հավասար կողմերն են DB–ն ու BC–ն և AB–ն ու BE–ն: Հետևաբար՝ որպես համապատասխանաբար հավասար կողմերի դիմացի անկյուններ՝ $\angle A = \angle E = 42°$ և $\angle C = \angle D = 47°$:

Պատ.՝ բ) 42°; 47°:

105. ա) Քանի որ ADB և ADC եռանկյուններում $AB = AC$, $\angle 1 = \angle 2$, իսկ AD–ն ընդհանուր է, ապա, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta ABD = \Delta ACD$:

բ) $AB = AC = 15$ սմ: Իսկ, որպես հավասար եռանկյունների համապատասխանաբար հավասար անկյունների ($\angle 1 = \angle 2$) դիմացի կողմեր՝ $BD = DC = 5$ սմ:

Պատ.՝ բ) 5 սմ, 15 սմ:

106. ա) ABC և CDA եռանկյուններում $BC = AD$, $\angle 1 = \angle 2$, իսկ AC–ն ընդհանուր է: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta ABC = \Delta CDA$:

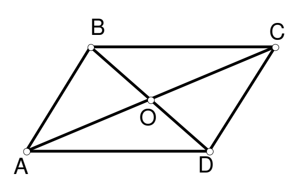
107. ա) AOB և DOC եռանկյուններում $OA = OD$, $OB = OC$, իսկ $\angle AOB = \angle DOC$ (որպես հակադիր անկյուններ): Ուրեմն, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta AOB = \Delta DOC$:

բ) ա) կետում ապացուցվեց, որ $\Delta AOB = \Delta DOC$: Հետևաբար, որպես հավասար եռանկյունների համապատասխանաբար հավասար կողմերի դիմացի անկյուններ՝ $\angle OCD = \angle ABO = \angle 1 = 74°$: Այսպիսով՝ $\angle ACD = \angle 2 + \angle OCD = 110°$:

Պատ.՝ բ) 110°:

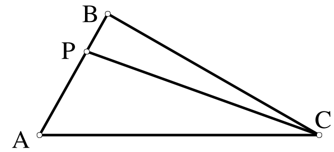
108. AC և BD հատվածների ընդհանուր միջնակետը նշանակենք O–ով:

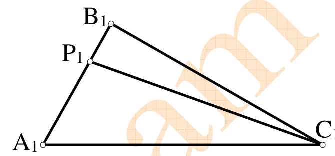
Դիտարկենք BOC և DOA եռանկյունները: Քանի որ $BO = OD$, $AO = OC$, իսկ որպես հակադիր անկյուններ՝ $\angle BOC = \angle DOA$, ապա, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի, $\Delta BOC = \Delta DOA$: Վերջինից հետևում է, որ $BC = AD$ և $\angle BCO = \angle OAD$:



Այսպիսով՝ ABC և CDA եռանկյուններում $BC = AD$, $\angle BCA = \angle CAD$, իսկ AC–ն ընդհանուր է: Ուրեմն, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta ABC = \Delta CAD$:

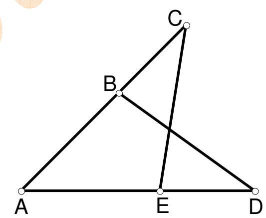
109. Քանի որ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյուններում $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ և $\angle A = \angle A_1$, ապա, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$: Վերջինից հետևում է, որ $BC = B_1C_1$ և $\angle B = \angle B_1$:





Քանի որ $AB = A_1B_1$ և $AP = A_1P_1$, ապա $PB = P_1B_1$: Այսպիսով՝ $BC = B_1C_1$, $PB = P_1B_1$ և $\angle B = \angle B_1$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta BPC = \Delta B_1P_1C_1$:

110. ACE և ADB եռանկյուններում $AC = AD$, $AB = AE$ և $\angle A$–ն ընդհանուր է: Ուրեմն, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta ACE = \Delta ADB$: Վերջինից հետևում է, որ $\angle ABD = \angle AEC$:

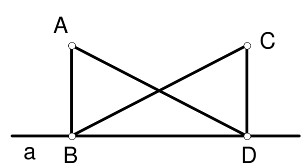


Բայց, որպես կից անկյունների զույգեր՝ $\angle ABD + \angle CBD = 180^\circ$ և $\angle AEC + \angle DEC = 180^\circ$: Եթե նշանակենք $\angle ABD = \angle AEC = \alpha$, ապա կունենանք $\angle CBD = 180^\circ - \alpha$ և $\angle DEC = 180^\circ - \alpha$:

Ուրեմն՝ $\angle CBD = \angle DEC$:

111. $\angle AOB$–ն $\angle 1$–ին կից անկյուն է: Հետևաբար՝ $\angle AOB = 180^\circ - \angle 1$: $\angle COB$–ն էլ $\angle 2$–ին կից անկյուն է: Հետևաբար՝ $\angle COB = 180^\circ - \angle 2$: Եվ քանի որ $\angle 1 = \angle 2$, ապա $\angle AOB = \angle COB$: Այսպիսով՝ AOB և COB եռանկյուններում $AO = OC$, $\angle AOB = \angle COB$, իսկ OB–ն ընդհանուր է: Ուրեմն, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta AOB = \Delta COB$: Որից էլ կհետևի, որ $AB = BC$:

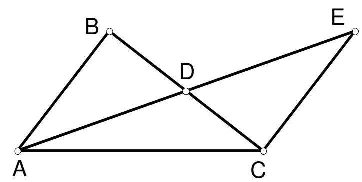
117. ա) Քանի որ $AB \perp a$ և $CD \perp a$, ապա $\angle ABD = \angle CDB = 90^\circ$: Այսպիսով՝ ABD և CDB եռանկյուններում $AB = CD$, BD–ն ընդհանուր է, $\angle ABD = \angle CDB$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta ABD = \Delta CDB$:



բ) $\Delta ABD = \Delta CDB$ (տե՛ս ա) կետը): Հետևաբար՝ $\angle CBD = \angle ADB = 44^\circ$: Իսկ $\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD = 90^\circ - 44^\circ = 46^\circ$:

Պատ.՝ բ) 46°:

118. ա) Քանի որ AD–ն միջնագիծ է, ապա $BD = DC$:

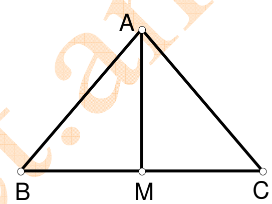


Որպես հակադիր անկյուններ՝ $\angle BDA = \angle CDE$: Այսպիսով՝ ABD և ECD եռանկյուններում $BD = DC$, $AD = DE$, $\angle BDA = \angle CDE$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta ABD = \Delta ECD$:

բ) $\Delta ABD = \Delta ECD$ (տե՛ս ա) կետը): Հետևաբար՝ $\angle DCE = \angle ABD = 40°$: Իսկ $\angle ACE = \angle ACD + \angle DCE = 56° + 40° = 96°$:

Պատ.՝ բ) 96°:

122. AB և AC սրունքները նշանակենք x–ով, իսկ BC հիմքը՝ $2y$–ով:



Քանի որ AM–ը միջնագիծ է, ապա $BM = MC = y$:

Կունենանք՝ $P_{ABC} = x + x + 2y = 32$ սմ և $P_{ABM} = x + y + AM = 24$ սմ: Առաջինից կհետևի՝ $x + y = 16$ սմ: Ստացվածը տեղադրելով երկրորդի մեջ՝ կունենանք՝ 16 սմ + $AM = 24$ սմ: Որտեղից՝ $AM = 8$ սմ:

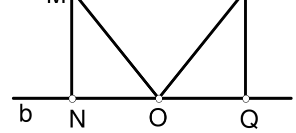
Պատ.՝ 8 սմ:

123. Ենթադրենք՝ ABC եռանկյան AM միջնագիծը նաև բարձրություն է: Դա կնշանակի, որ $BM = MC$ և $\angle AMB = \angle AMC = 90°$:

Ուրեմն՝ AMB և AMC եռանկյուններում $BM = MC$, AM–ը ընդհանուր է, $\angle AMB = \angle AMC$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta AMB = \Delta AMC$: Վերջինից էլ կհետևի, որ $AB = AC$, այսինքն՝ ABC եռանկյունը հավասարասրուն է:

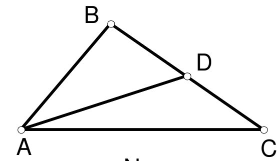
124. Դիտարկենք ADB և ADC եռանկյունները: Ունենք՝ $CD = BD$, AD–ն ընդհանուր է, $\angle 1 = \angle 2$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta ADB = \Delta ADC$: Վերջինից հետևում է, որ $AB = AC$, այսինքն՝ ABC եռանկյունը հավասարասրուն է:

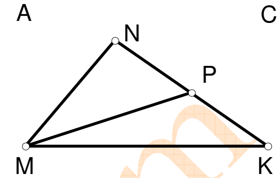
126. ա) Քանի որ $MN \perp b$ և $PQ \perp b$, ապա $\angle MNO = \angle PQO = 90°$: Այսպիսով՝ MNO և PQO եռանկյուններում $MN = PQ$, $NO = OQ$, $\angle MNO = \angle PQO$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta MNO = \Delta PQO$: Վերջինից հետևում է, որ $MO = PO$:



Այսպիսով՝ պարզվեց, որ MOP եռանկյունը հավասարասրուն է: Հետևաբար, որպես MP հիմքին առընթեր անկյուններ՝ $\angle OMP = \angle OPM$:

127. Ենթադրենք՝ $\Delta ABC = \Delta MNK$, ընդ որում՝ $AB = MN$, $BC = NK$, $AC = MK$:





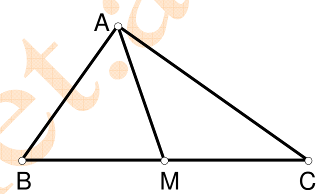
Ապացուցենք, որ BC և NK հավասար կողմերին տարված AD և MP միջնագծերը հավասար են:

Քանի որ $BC = NK$, իսկ $BD = \frac{BC}{2}$, $NP = \frac{NK}{2}$, ապա $BD = NP$:

Դիտարկենք ABD և MNP եռանկյունները:

Ունենք՝ $AB = MN$, $BD = NP$, $\angle B = \angle N$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta ABD = \Delta MNP$: Վերջինից հետևում է, որ $AD = MP$:

128. Ըստ խնդրի տվյալների $AM = BM = MC$: Ուրեմն՝ AMB և AMC եռանկյունները AB և AC հիմքերով հավասարասրուն եռանկյուններ են: Որպես հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյուններ՝ $\angle ABM = \angle BAM$, իսկ $\angle ACM = \angle CAM$:



Բայց $\angle BAC = \angle BAM + \angle CAM$: Փոխարինելով $\angle BAM$–ը $\angle ABM$–ով, իսկ $\angle CAM$–ը $\angle ACM$–ով՝ կունենանք $\angle BAC = \angle ABM + \angle ACM$, որն էլ կնշանակի, որ ABC եռանկյան A անկյունը հավասար է նրա B և C անկյունների գումարին:

129. Ենթադրենք՝ ABC եռանկյունում $AB = BC = AC$:

Քանի որ $AB = BC$, ապա կարող ենք համարել, որ ունենք AC հիմքով հավասարասրուն եռանկյուն: Հետևաբար, որպես AC հիմքին առընթեր անկյուններ՝ $\angle A = \angle C$:

$BC = AC$ պայմանից ելնելով՝ կարող ենք համարել, որ ունենք AB հիմքով հավասարասրուն եռանկյուն: Հետևաբար, որպես AB հիմքին առընթեր անկյուններ՝ $\angle A = \angle B$:

Այսպիսով՝ $\angle A = \angle B = \angle C$:

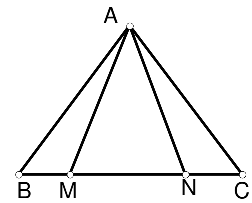
130. Քանի որ $AB = BC$, ապա, որպես AC հիմքին առընթեր անկյուններ $\angle BAC = \angle BCA$:

Քանի որ $CD = DE$, ապա, որպես CE հիմքին առընթեր անկյուններ $\angle CED = \angle ECD$:

Որպես հակադիր անկյուններ՝ $\angle BCA = \angle ECD$:

Այսպիսով՝ $\angle BAC = \angle BCA = \angle ECD = \angle CED$:

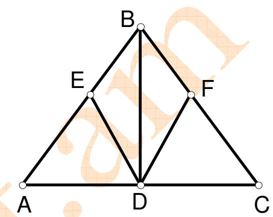
131. ա) Որպես BC հիմքին առընթեր անկյուններ $\angle ABM =$ $= \angle ACN$:



Այսպիսով՝ ABM և ACN եռանկյուններում $AB = AC$, $BM = CN$, $\angle ABM = \angle ACN$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta ABM = \Delta ACN$:

133. ա) Քանի որ $AB = BC$, իսկ $AE = CF$, ապա $BE = BF$:

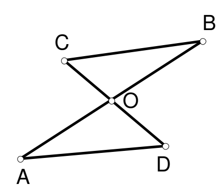
BD–ն, որպես հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարած միջնագիծ, նաև կիսորդ է՝ $\angle EBD = \angle DBF$:



Այսպիսով՝ BDE և BDF եռանկյուններում $BE = BF$, BD–ն ընդհանուր է, $\angle EBD = \angle DBF$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta BDE =$ $= \Delta BDF$:

բ) Որպես AC հիմքին առընթեր անկյուններ՝ $\angle EAD =$ $= \angle FCD$: Ուրեմն՝ ADE և CDF եռանկյուններում $AE = CF$, $AD = DC$ (BD–ն միջնագիծ է), $\angle EAD = \angle FCD$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta ADE = \Delta CDF$:

134. ա) Ունենք՝ $AO = OB$, $\angle OAD = \angle OBC$: Բացի այդ, որպես հակադիր անկյուններ՝ $\angle COB = \angle DOA$:



Այսպիսով, COB եռանկյան մի կողմը և նրան առընթեր երկու անկյունները համապատասխանաբար հավասար են DOA եռանկյան կողմին և նրան առընթեր երկու անկյուններին: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի՝ $\Delta COB = \Delta DOA$:

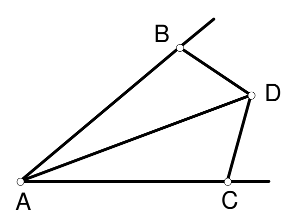
բ) $\Delta COB = \Delta DOA$ (տե՛ս ա) կետը): Հետևաբար՝ $CO = OD$, $BC = AD = 15$ սմ:

Քանի որ $CD = 26$ սմ, իսկ $CO = OD$, ապա $CO = \dfrac{CD}{2} = 13$ սմ:

Պատ.՝ բ) 15 սմ; 13 սմ:

135. ա) AC–ն ընդհանուր կողմ է ABC և CDA եռանկյունների համար, և այդ եռանկյուններում նրան առընթեր անկյունները համապատասխանաբար հավասար են՝ $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի՝ $\Delta ABC = \Delta CDA$:

136. AD–ն A անկյան կիսորդն է՝ $\angle BAD = \angle DAC$:

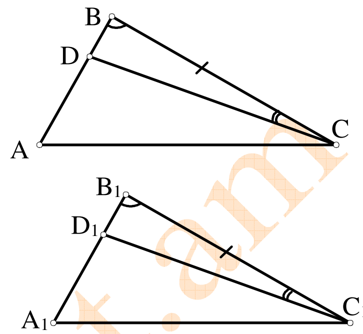


Բացի այդ, $\angle ADB = \angle ADC$, իսկ AD–ն ընդհանուր կողմ է ABD և ADC եռանկյունների համար: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի՝ $\Delta ABD = \Delta ADC$: Վերջինից էլ հետևում է, որ $BD = DC$:

137. Ունենք՝ $BO = OC$, $\angle PBO = \angle TCO$: POB և TOC անկյունները հակադիր են, ուրեմն՝ $\angle POB = \angle TOC$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի՝ $\Delta POB = \Delta TOC$: Վերջինից էլ հետևում է, որ $OP = OT$, $\angle P = \angle T$:

138. Ունենք՝ $BO = AO$, $\angle DBC = \angle DAC$: AOC և BOD անկյունները հակադիր են, ուրեմն՝ $\angle AOC = \angle BOD$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի՝ $\Delta AOC = \Delta BOD$: Վերջինից էլ հետևում է, որ $\angle C = \angle D$, $AC = BD$:

140. Քանի որ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ և $\angle B = \angle B_1$, ապա, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$: Վերջինից հետևում է, որ $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1$:

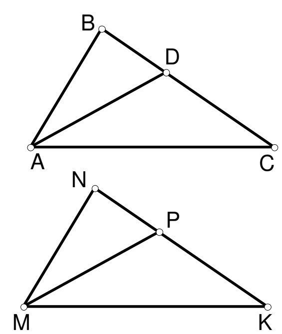


Բայց $\angle ACD$–ն էլ հավասար է $\angle A_1C_1D_1$: Ուրեմն՝ $\angle BCA - \angle ACD = \angle B_1C_1A_1 - \angle A_1C_1D_1$, այսինքն՝ $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$:

Ստացվեց, որ BCD և $B_1C_1D_1$ եռանկյուններում $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի՝ $\Delta BCD = \Delta B_1C_1D_1$:

141. Ենթադրենք՝ $\Delta ABC = \Delta MNK$, ընդ որում $AB = MN$, $BC = NK$, $AC = MK$:

Ապացուցենք, որ BC և NK հավասար կողմերին տարած AD և MP կիսորդները հավասար են:

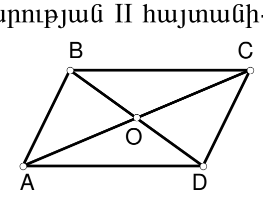


ABC և MNK եռանկյունների հավասարությունից հետևում է նաև, որ $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle N$: Եվ քանի որ $\angle BAD = \dfrac{\angle A}{2}$, իսկ $\angle NMP = \dfrac{\angle M}{2}$, ապա $\angle BAD = \angle NMP$:

Այսպիսով՝ ABD և MNP եռանկյուններում $AB = MN$, $\angle B = \angle N$, $\angle BAD = \angle NMP$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի՝ $\Delta ABD = \Delta MNP$: Վերջինից հետևում է, որ $AD = MP$:

142. Դիտարկենք BOC և DOA եռանկյունները:

Ունենք՝ $AO = OC$, $\angle BCO = \angle DAO$: Բացի այդ, որպես հակադիր անկյուններ՝ $\angle BOC = \angle DOA$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի՝ $\Delta BOC = \Delta DOA$: Վերջինից հետևում է, որ $BO = OD$:



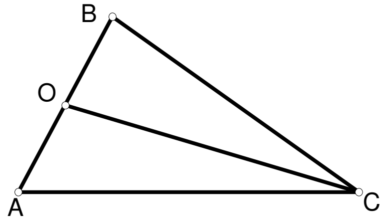
Հիմա դիտարկենք BOA և DOC եռանկյունները:

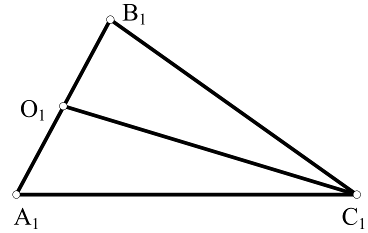
Ունենք՝ $AO = OC$, $BO = OD$: Բացի այդ, որպես հակադիր անկյուններ՝ $\angle BOA = \angle DOC$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta BOA = \Delta DOC$:

143. ա) ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյուններում $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ և $\angle C = \angle C_1$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի՝ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$:

Ուրեմն՝ $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$:

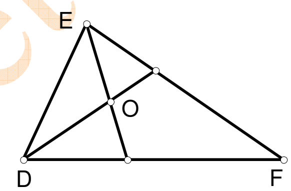
Քանի որ $AO = \dfrac{AB}{2}$, իսկ $A_1O_1 = \dfrac{A_1B_1}{2}$, ապա $AO = A_1O_1$:



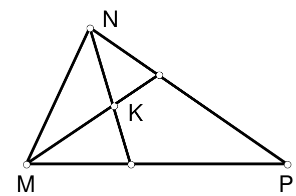


Այսպիսով՝ AOC և $A_1O_1C_1$ եռանկյուններում $AO = A_1O_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta AOC = \Delta A_1O_1C_1$:

144. DEF և MNP եռանկյուններում $EF = NP$, $DF = MP$, $\angle F = \angle P$: Ուրեմն, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta DEF = \Delta MNP$: Հետևաբար՝ $DE = MN$, $\angle E = \angle N$, $\angle D = \angle M$: Քանի որ $\angle OED = \dfrac{\angle E}{2}$, իսկ $\angle KNM = \dfrac{\angle N}{2}$, ապա $\angle OED = \angle KNM$:



Քանի որ $\angle EDO = \dfrac{\angle D}{2}$, իսկ $\angle NMK = \dfrac{\angle M}{2}$, ապա $\angle EDO = \angle NMK$:

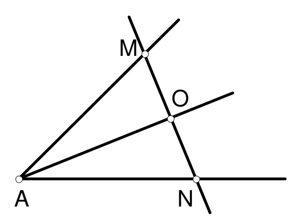


Այսպիսով՝ DOE և MKN եռանկյուններում $DE = MN$, $\angle OED = \angle KNM$, $\angle EDO = \angle NMK$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի՝ $\Delta DOE = \Delta MKN$:

145. A անկյան կիսորդի և նրան տարված ուղղահայացի հատման կետը թող լինի O–ն:

Քանի որ $MN \perp AO$, ապա $\angle AOM = \angle AON = 90°$:

Բացի այդ, քանի որ AO–ն A անկյան կիսորդն է, ապա $\angle MAO = \angle NAO$:



Այսպիսով՝ AOM և AON եռանկյուններում AO–ն ընդհանուր կողմ է, $\angle AOM = \angle AON$, $\angle MAO = \angle NAO$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի՝ $\Delta AOM = \Delta AON$: Վերջինից հետևում է, որ $AM = AN$, այսինքն MAN եռանկյունը հավասարասրուն է:

146. Տե՛ս 145 խնդրի լուծումը:

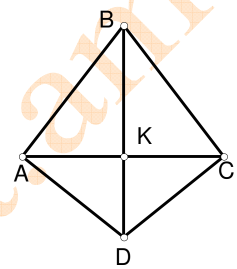
147. Ենթադրենք՝ ունենք AC հիմքով ABC և MK հիմքով MNK հավասարասրուն եռանկյունները, ընդ որում՝ $AC = MK$ և $\angle A = \angle M$:

Որպես հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյուններ՝ $\angle A = \angle C$ և $\angle M = \angle K$: Բայց $\angle A$–ն հավասար էր $\angle M$–ին: Ուրեմն՝ $\angle C = \angle A = \angle M = \angle K$: Բացի այդ, AC–ն հավասար էր MK–ին: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի՝ $\Delta ABC = \Delta MNK$:

148. Ենթադրենք՝ ABC հավասարակողմ ($AB = BC = AC$) եռանկյան AB կողմը հավասար է MNK հավասարակողմ ($MN = NK = MK$) եռանկյան MN կողմին:

Փաստորեն՝ $BC = AC = AB = MN = NK = MK$, այսինքն՝ ABC եռանկյան երեք կողմերը համապատասխանաբար հավասար են MNK եռանկյան երեք կողմերին: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության III հայտանիշի՝ $\Delta ABC = \Delta MNK$:

149. ABD և CBD եռանկյուններում $AB = BC$, $AD = DC$, իսկ BD կողմը ընդհանուր է: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության III հայտանիշի՝ $\Delta ABD = \Delta CBD$: Վերջինից հետևում է, որ $\angle ABD = \angle CBD$: Իսկ դա նշանակում է, որ BD ճառագայթը ABC անկյան կիսորդն է: Ուրեմն, եթե BD–ի և AC–ի հատման կետը նշանակենք K–ով, ապա BK–ն կլինի ABC հավասարասրուն եռանկյան AC հիմքին տարած կիսորդը, հետևաբար՝ նաև բարձրությունը: Դա էլ կնշանակի, որ $BD \perp AC$:



151. ABC և CDA եռանկյուններում $AB = CD$, $BC = AD$, իսկ AC կողմը ընդհանուր է: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության III հայտանիշի՝ $\Delta ABC = \Delta CDA$: Վերջինից էլ հետևում է, որ $\angle B = \angle D$:

152. ա) ABD և DCA եռանկյուններում $AB = CD$, $BD = AC$, իսկ AD կողմը ընդհանուր է: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության III հայտանիշի՝ $\Delta ABD = \Delta DCA$: Վերջինից էլ հետևում է, որ $\angle CAD = \angle ADB$:

153. բ) ABC և CDA եռանկյուններում $AB = CD$, $BC = AD$, իսկ AC կողմը ընդհանուր է: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության III հայտանիշի՝ $\Delta ABC = \Delta CDA$: Վերջինից հետևում է, որ $\angle ABC = \angle CDA$, $\angle BAC = \angle ACD$:

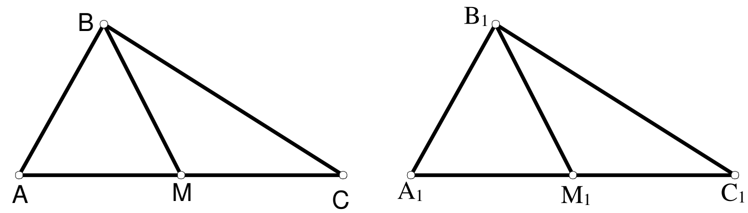
Քանի որ $\angle ABE = \dfrac{\angle ABC}{2}$, իսկ $\angle CDF = \dfrac{\angle CDA}{2}$, ապա $\angle ABE = \angle CDF$:

Այսպիսով՝ ABE և CDF եռանկյուններում $AB = CD$, $\angle BAE = \angle FCD$, $\angle ABE = \angle CDF$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի՝ $\Delta ABE = \Delta CDF$:

154. Դիտարկենք ABM և $A_1B_1M_1$ եռանկյունները:

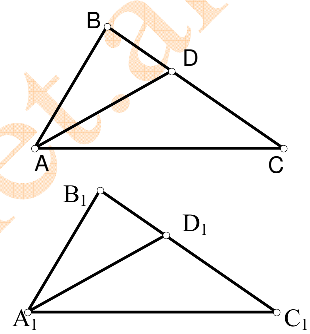
Ունենք՝ $AB = A_1B_1$, $BM = B_1M_1$: Բացի այդ, քանի որ $AM = \dfrac{AC}{2}$, իսկ $A_1M_1 = \dfrac{A_1C_1}{2}$, ապա $AM = A_1M_1$:

Այսպիսով՝ ըստ եռանկյունների հավասարության III հայտանիշի՝ ABM և $A_1B_1M_1$ եռանկյունները հավասար են: Վերջինից հետևում է, որ $\angle A = \angle A_1$: Ուրեմն՝



ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները կլինեն հավասար ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի, քանի որ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ և $\angle A = \angle A_1$:

155. Դիտարկենք ABD և $A_1B_1D_1$ եռանկյունները:



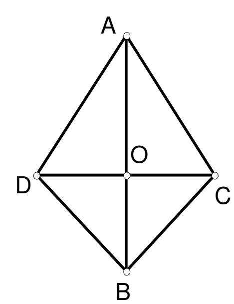
Ունենք՝ $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$, $AD = A_1D_1$: Ուրեմն՝ ըստ եռանկյունների հավասարության III հայտանիշի՝ $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$:

Վերջինից հետևում է, որ $\angle B = \angle B_1$ և $\angle BAD = \angle B_1A_1D_1$:

Քանի որ $\angle BAC = 2\angle BAD$ և $\angle B_1A_1C_1 = 2\angle B_1A_1D_1$, ապա $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$:

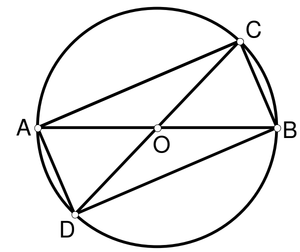
Այսպիսով՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյուններում $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի՝ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$:

156. ա) ADB և ACB եռանկյուններում $DA = AC$, $DB = BC$, իսկ DC կողմը ընդհանուր է: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության III հայտանիշի՝ $\Delta ADB = \Delta ACB$: Հետևաբար՝ $\angle ADB = \angle ACB$:



բ) $\Delta ADB = \Delta ACB$ (տե՛ս ա) կետը), որից էլ հետևում է, որ $\angle DAB = \angle CAB$: Իսկ դա նշանակում է, որ AO–ն DAC հավասարասրուն եռանկյան DC հիմքին տարած կիսորդն է, հետևաբար՝ նաև միջնագիծ է: Ուրեմն՝ $DO = OC$:

158. Շրջանագծի կենտրոնը նշանակենք O–ով: Այն AB և CD տրամագծերի միջնակետն է՝ $AO = OB = OC = OD = R$, որտեղ R–ը շրջանագծի շառավիղն է:

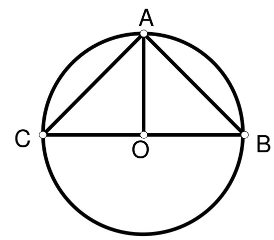


ա) Որպես հակադիր անկյուններ՝ $\angle AOC = \angle DOB$: Այսպիսով, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta AOC = \Delta DOB$: Վերջինից հետևում է, որ $AC = BD$:

Համանմանորեն կարելի է ցույց տալ, որ $\Delta AOD = \Delta COB$:

գ) AOD և COB եռանկյունների հավասարությունից (տես ա) կետի լուծումը) հետևում է, որ $\angle BAD = \angle BCD$:

160. Քանի որ O–ն շրջանագծի կենտրոնն է, իսկ CB–ն տրամագիծ է, ապա $OC = OB$: Բացի այդ, COA և BOA ուղղանկյուն եռանկյունների համար AO–ն ընդհանուր էջ է: Հետևաբար՝ այդ ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են ըստ էջերի՝ $\Delta COA = \Delta BOA$: Վերջինից էլ հետևում է, որ $AC = AB$:



162. Դիտարկենք AOB և DOC եռանկյունները:

Ունենք՝ $OA = OB = OC = OD = R$, որտեղ R–ը շրջանագծի շառավիղն է: Բացի այդ, ունենք, որ $AB = CD$: Այսպիսով, ըստ եռանկյունների հավասարության III հայտանիշի՝ $\Delta AOB = \Delta DOC$: Որից էլ հետևում է, որ $\angle AOB = \angle COD$:

163. Դիտարկենք AOB եռանկյունը: Այն հավասարասրուն է, քանի որ $OA = OB$: Հետևաբար, որպես հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարված միջնագիծ ($AE = EB$) OE–ն նաև բարձրություն է:

Համանմանորեն կարելի է ապացուցել, որ $OF \perp CD$:

Հիմա դիտարկենք OEB և OFD ուղղանկյուն եռանկյունները:

Քանի որ $AB = CD$ և E–ն ու F–ը այդ հատվածների միջնակետերն են, ապա $EB = FD$: Բացի այդ, $OB = OD$ (շառավիղներ են): Այսպիսով՝ այդ ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են ըստ էջի և ներքնաձիգի: Վերջինից էլ հետևում է, որ $OE = OF$:

Լրացուցիչ խնդիրներ

183. ABC եռանկյան AB կողմը նշանակենք x–ով: Քանի որ BC–ն AB–ից մեծ է 2 սմ–ով, ապա $BC = x + 2$ սմ: Մյուս կողմից, AB–ն AC–ից փոքր է 1 սմ–ով: Ուրեմն՝ $AC = x + 1$ սմ:

Այսպիսով՝ $P = x + x + 2$ սմ $+ x + 1$ սմ $= 15$ սմ: Որտեղից՝ $x = 4$ սմ: Հետևաբար $AB = 4$ սմ, $BC = 4$ սմ $+ 2$ սմ $= 6$ սմ և $AC = 4$ սմ $+ 1$ սմ $= 5$ սմ:

Պատ.՝ $AB = 4$ սմ; $BC = 6$ սմ; $AC = 5$ սմ:

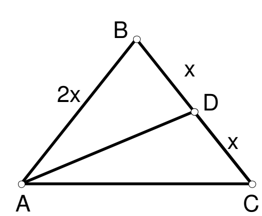
184. Եթե եռանկյան սրունքը նշանակենք x–ով, ապա հիմքը կլինի $x + 2$ սմ:

Հաշվի առնելով, որ հիմքը 3 սմ–ով փոքր է սրունքների գումարից՝ կունենանք $x + 2$ սմ $= x + x - 3$ սմ: Որտեղից՝ $x = 5$ սմ և $x + 2$ սմ $= 7$ սմ:

Պատ.՝ 5 սմ; 5 սմ; 7 սմ:

185. Ունենք, որ ABC հավասարասրուն եռանկյան AC հիմքը 8 սմ է և AD–ն միջնագիծ է, ընդ որում՝ ABD և ADC եռանկյուններից մեկի պարագիծը մյուսի պարագծից մեծ է 2 սմ–ով:

ABC եռանկյան սրունքները նշանակենք $2x$–ով: Կունենանք՝ $BD = DC = x$:

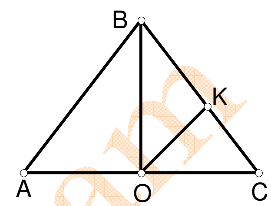


Եթե $P_{ABD} = P_{ADC} + 2$ սմ, ապա կունենանք՝ $2x + x + AD = AD + x + 8$ սմ $+ 2$ սմ: Որտեղից՝ $x = 5$ սմ , իսկ $2x = 10$ սմ :

Եթե $P_{ADC} = P_{ABD} + 2$ սմ, ապա կունենանք՝ $AD + x + 8$ սմ $= 2x + x + AD + 2$ սմ: Որտեղից՝ $x = 3$ սմ , իսկ $2x = 6$ սմ :

Պատ.՝ 10 սմ կամ 6 սմ:

186. Քանի որ BO–ն ABC հավասարասրուն եռանկյան AC հիմքին տարած միջնագիծն է, ապա $\angle BOA = \angle BOC = 90°$: Քանի որ OK–ն BOC անկյան կիսորդն է, ապա $\angle BOK = \dfrac{\angle BOC}{2} = 45^0$: Հետևաբար՝ $\angle AOK = \angle BOA + \angle BOK = 90° + 45° = 135°$:



Պատ.՝ 135°:

187. Քանի որ OM–ը AOB եռանկյան կիսորդն է, ապա $\angle AOM = \angle MOB$:

Քանի որ AOM և MOC անկյունները կից են, իսկ $\angle MOC = 135°$, ապա $\angle AOM = 180° - 135° = 45°$:

Հետևաբար՝ $\angle AOB = \angle AOM + \angle MOB = 2 \cdot \angle AOM = 2 \cdot 45° = 90°$:

Այսպիսով՝ BO–ն ABC հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարած բարձրությունն է, հետևաբար՝ նաև կիսորդ է: Ուրեմն՝ $\angle ABO = \angle OBC$:

188. Ենթադրենք՝ ունենք AC հիմքով ABC և MK հիմքով MNK հավասարասրուն եռանկյունները, ընդ որում՝ $AB = MN$ և $\angle B = \angle N$:

Որպես հավասարասրուն եռանկյան սրունքներ $AB = BC$, իսկ $MN = NK$: Բայց $AB = NM$: Ուրեմն՝ $BC = AB = MN = NK$: Բացի այդ, ունենք, որ $\angle B = \angle N$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta ABC = \Delta MNK$:

189. AB հատվածի միջնակետը նշանակենք O–ով:

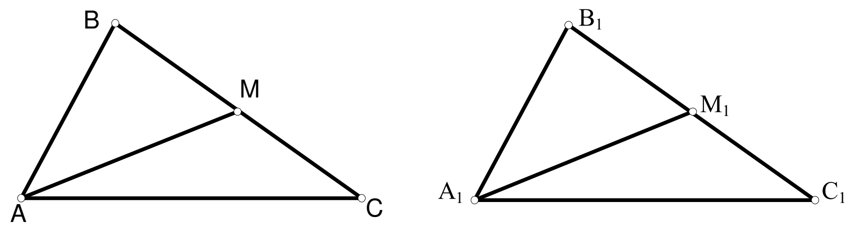
ա) a ուղղի վրա վերցնենք O–ից տարբեր որևէ C կետ (O–ի հարցը պարզ է): Դիտարկենք AOC և BOC եռանկյունները: Այդ եռանկյուններում $AO = OB$, $\angle AOC = \angle BOC = 90°$, իսկ OC–ն ընդհանուր կողմ է: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta AOC = \Delta BOC$: Որից էլ կհետևի, որ $AC = CB$, այսինքն՝ C կետը հավասարահեռ է AB հատվածի ծայրակետերից:

բ) Ենթադրենք՝ O–ից տարբեր որևէ D կետ հավասարահեռ է A և B կետերից՝ $AD = DB$:

ADB եռանկյունը կլինի հավասարասրուն: Հետևաբար՝ նրա DO միջնագիծը կլինի նաև բարձրություն: Ստացվեց, որ DO ուղիղը անցնում է AB հատվածի միջնակետով և ուղղահայաց է նրան: Հետևաբար՝ D կետը գտնվում է a ուղղի վրա:

190. Քանի որ $BC = B_1C_1$ և $BM = \dfrac{BC}{2}$, իսկ $B_1M_1 = \dfrac{B_1C_1}{2}$, ապա $BM = B_1M_1$:

Այսպիսով՝ ABM և $A_1B_1M_1$ եռանկյուններում $BM = B_1M_1$, $AM = A_1M_1$ և $\angle AMB = \angle A_1M_1B_1$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta ABM = \Delta A_1B_1M_1$:



Վերջինից հետևում է, որ $AB = A_1B_1$, իսկ $\angle B = \angle B_1$: Ուրեմն՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյուններում $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ և $\angle B = \angle B_1$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$:

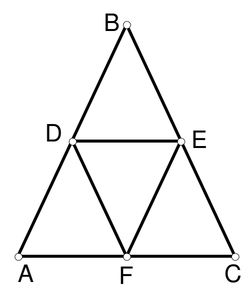
191. բ) Նշանակենք $\angle CAD = \angle BAE = \alpha$, իսկ $\angle BAC = \beta$:

Ունենք՝ $\angle DAB = \angle CAD - \angle BAC = \alpha - \beta$ և $\angle EAC = \angle BAE - \angle BAC = \alpha - \beta$: Այսպիսով՝ պարզվեց, որ $\angle DAB = \angle EAC$:

Բացի այդ, որպես DAE հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյուններ՝ $\angle ADB = \angle AEC$:

Այսպիսով՝ ADB և AEC եռանկյուններում $AD = AE$, $\angle DAB = \angle EAC$, $\angle ADB = \angle AEC$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի՝ $\Delta ADB = \Delta AEC$: Վերջինից էլ կհետևի, որ $BD = CE$ և $AB = AC$:

192. Ենթադրենք՝ AC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան AB, BC և AC կողմերի միջնակետերը համապատասխանաբար D, E և F կետերն են:



Քանի որ $AB = BC$, ապա $AD = CE$: Բացի այդ, ունենք, որ $AF = FC$: Նկատենք նաև, որ $\angle DAF = \angle ECF$ (դրանք ABC հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյուններն են): Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta ADF = \Delta CEF$: Վերջինից էլ կհետևի, որ $DF = EF$, որն էլ նշանակում է, որ DFE եռանկյունը հավասարասրուն է:

193. Դիտարկենք AED և BFE եռանկյունները:

Քանի որ $AB = BC$ և $AD = FC$, ապա $AE = AB - BE$ և $BF = BC - FC$ հատվածները նույնպես հավասար են՝ $AE = BF$:

Քանի որ ABC եռանկյունը հավասարակողմ է, ապա $\angle EAD = \angle FBE$ (տե՛ս 129 խնդիրը):

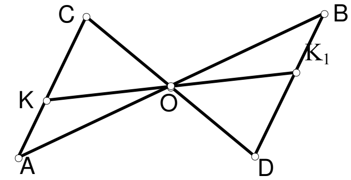
Այսպիսով՝ $AE = BF$, $AD = BE$, $\angle EAD = \angle FBE$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta AED = \Delta BFE$:

Համանմանորեն կարելի է ցույց տալ, որ $\Delta AED = \Delta CDF$: Արդյունքում կունենանք, որ $\Delta AED = \Delta BFE = \Delta CDF$: Վերջինից կհետևի, որ $ED = EF = FD$, այսինքն՝ EDF եռանկյունը հավասարակողմ է:

194. ա) Ունենք $AO = OB$, $CO = OD$: Բացի այդ, որպես հակադիր անկյուններ՝ $\angle AOC = \angle BOD$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝

$\Delta AOC = \Delta BOD$: Վերջինից հետևում է, որ $\angle A = \angle B$:

Հիմա դիտարկենք AOK և BOK_1 եռանկյունները:



Ունենք՝ $AO = OB$, $AK = BK_1$, $\angle A = \angle B$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta AOK = \Delta BOK_1$: Դրանից էլ կհետևի, որ $OK = OK_1$:

բ) Ունենք՝ $\Delta AOK = \Delta BOK_1$ (տե՛ս ա) կետի լուծումը): Հետևաբար $\angle AOK = \angle BOK_1$:

Մյուս կողմից $\angle KOK_1 = \angle AOK + \angle K_1OA$:

Այսպիսով՝ $\angle KOK_1 = \angle BOK_1 + \angle K_1OA = \angle BOA = 180°$, որն էլ նշանակում է, որ O կետը գտնվում է KK_1 ուղղի վրա:

195. Տե՛ս 194 խնդրի լուծումը: Այս խնդիրը նրա մասնավոր դեպքն է:

196. Դիտարկենք ADE և BDF եռանկյունները:

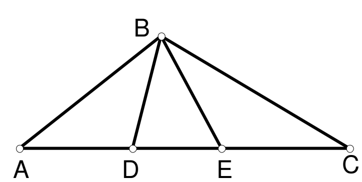
Քանի որ $AB = AC$ և $AD = CE$, ապա $AB + AD = AC + CE$, այսինքն՝ $BD = AE$:

Քանի որ ABC եռանկյունը հավասարակողմ է, ապա $\angle ABC = \angle BAC$ (տե՛ս 129 խնդիրը): Ուրեմն՝ այդ անկյուններին կից DBF և DAE անկյունները նույնպես հավասար են:

Այսպիսով՝ $AE = BD$, $AD = BF$, $\angle DBF = \angle DAE$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta ADE = \Delta BDF$:

Նույն ձևով կարելի է ցույց տալ, որ $\Delta ADE = \Delta CEF$: Արդյունքում կունենանք, որ $\Delta ADE = \Delta BDF = \Delta CEF$: Որից էլ կհետևի, որ $DF = DE = EF$: Ուրեմն՝ DEF եռանկյունը հավասարակողմ է:

197. Քանի որ $AD = DB$, ապա, որպես ADB հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյուններ, $\angle ABD = \angle A = 38°$:



Քանի որ $BE = EC$, ապա, որպես BEC հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյուններ, $\angle EBC = \angle C = 32°$:

$\angle DBE = \angle B - \angle ABD - \angle EBC$: Ուրեմն՝ $\angle DBE = 110° - 38° - 32° = 40°$:

Պատ.՝ 40°:

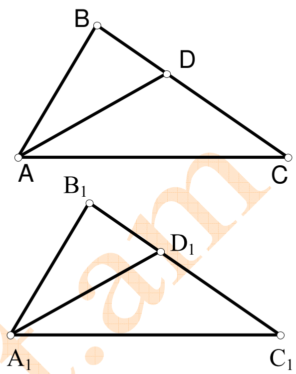
198. Դիտարկենք BOC և DOE եռանկյունները:

Ունենք՝ $BO = OE$, $CO = OD$: Բացի այդ, որպես հակադիր անկյուններ՝ $\angle BOC = \angle DOE$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta BOC = \Delta EOD$: Վերջինից հետևում է, որ $\angle OBC = \angle OED$: Ուրեմն՝ այդ անկյուններին կից ABO և FEO անկյունները նույնպես հավասար են:

Հիմա դիտարկենք ABO և FEO եռանկյունները:

Ունենք՝ $BO = OE$, $\angle ABO = \angle FEO$: Բացի այդ, որպես հակադիր անկյուններ՝ $\angle AOB = \angle FEO$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի՝ $\Delta ABO = \Delta FEO$: Որից էլ հետևում է, որ $AB = EF$:

199. Դիտարկենք ABD և $A_1B_1D_1$ եռանկյունները:



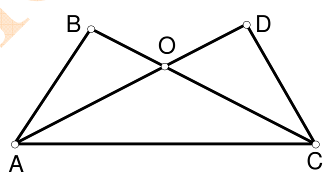
Քանի որ $\angle A = \angle A_1$ և $\angle BAD = \dfrac{\angle A}{2}$, իսկ $\angle B_1A_1D_1 = \dfrac{\angle A_1}{2}$, ապա $\angle BAD = \angle B_1A_1D_1$:

Այսպիսով՝ այդ եռանկյուններում $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$ և $\angle BAD = \angle B_1A_1D_1$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$: Վերջինից հետևում է, որ $\angle B = \angle B_1$:

Հիմա դիտարկենք ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները:

Ունենք՝ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ և $\angle B = \angle B_1$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի՝ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$:

200. ABC և CDA եռանկյուններում $BC = AD$, AC կողմը ընդհանուր է, $\angle DAC = \angle BCA$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta ABC = \Delta CDA$: Վերջինից հետևում է, որ $AB = CD$, $\angle B = \angle D$, $\angle BAC = \angle DCA$:



$\angle BAC = \angle DCA$ և $\angle DAC = \angle BCA$ պայմաններից հետևում է, որ $\angle BAO = \angle DCO$:

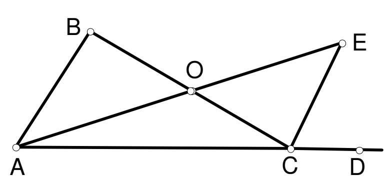
Այսպիսով՝ ABO և CDO եռանկյուններում $AB = CD$, $\angle B = \angle D$, $\angle BAO = \angle DCO$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի՝ $\Delta ABO = \Delta CDO$:

201. AB և CD հատվածների հատման կետը նշանակենք O–ով:

AO–ն, որպես ADC հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարված բարձրություն ($AB \perp CD$), կլինի նաև կիսորդ: Հետևաբար՝ $\angle CAB = \angle DAB$:

Այսպիսով՝ CAB և DAB եռանկյուններում՝ $AC = AD$, AB կողմը ընդհանուր է, $\angle CAB = \angle DAB$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta CAB = \Delta DAB$: Որից էլ կհետևի, որ $BC = BD$, իսկ $\angle ACB = \angle ADB$:

202. Ենթադրենք՝ ունենք ABC եռանկյունը և նրա C անկյանը կից BCD անկյունը:



Ցույց տանք, որ $\angle BCD > \angle B$:

A գագաթը միացնենք BC կողմի O միջնակետին և նրա շարունակության վրա տեղադրենք $OE = AO$ հատվածը:

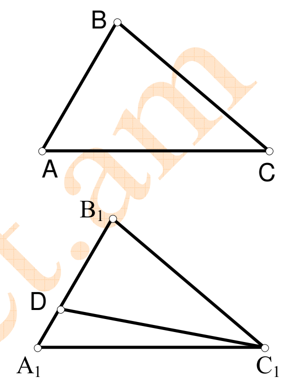
Դիտարկենք ABO և ECO եռանկյունները:

Ըստ կառուցման $BO = OC$, $AO = OE$: Որպես հակադիր անկյուններ՝ $\angle BOA = \angle COE$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝

$\Delta ABO = \Delta ECO$: Որից էլ հետևում է, որ $\angle B = \angle OCE$: Այսպիսով՝ $\angle B = \angle BCE$: Բայց $\angle BCD > \angle BCE$: Հետևաբար՝ $\angle BCD > \angle B$:

C անկյանը կից անկյան A անկյունից մեծ լինելը ցույց տալու համար BCD անկյան փոխարեն կարելի է դիտարկել նրան հակադիր անկյունը, իսկ BC կողմի փոխարեն՝ AC կողմը, ապա կրկնել վերևում կատարած քայլերը:

203. Ենթադրենք հակառակը՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները հավասար չեն: Որոշակիության համար նաև ենթադրենք, որ $A_1B_1 > AB$ (եթե $A_1B_1 = AB$, ապա ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները հավասար են ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի):



A_1B_1 հատվածի վրա B_1 կետից տեղադրենք $B_1D = AB$ հատվածը: ABC և DB_1C_1 եռանկյունները հավասար են ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի: Վերջինից կհետևի, որ $\angle A = \angle B_1DC_1$: Բայց $\angle B_1DC_1$–ը, որպես A_1DC_1 եռանկյան արտաքին անկյուն, մեծ է $\angle A_1$–ից (տե՛ս 202 խնդիրը): Այսպիսով՝ $\angle A > \angle A_1$, որը հակասում է $\angle A_1 = \angle A$ պայմանին: Ստացված հակասությունից հետևում է, որ մեր ենթադրությունը սխալ էր, այսինքն՝ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$:

204. Դիտարկենք BOC և AOD եռանկյունները:

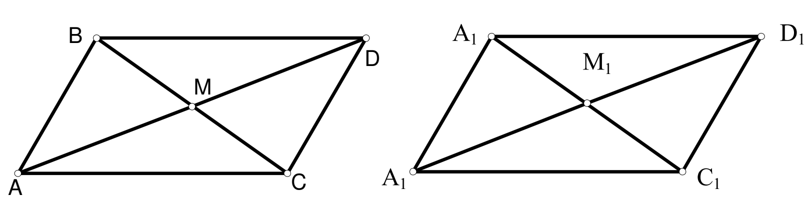
Ունենք՝ $BO = AO$, $DO = CO$, $\angle DOC$–ն ընդհանուր է: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta BOC = \Delta AOD$: Վերջինից հետևում է, որ $\angle BCO = \angle ADO$, $\angle OBC = \angle OAD$: Քանի որ $\angle OBC = \angle OAD$, ապա այդ անկյուններին կից EBD և EAC անկյունները նույնպես հավասար են:

Այսպիսով՝ BED և AEC եռանկյուններում $BD = AC$, $\angle ECA = \angle EDB$, $\angle EBD = \angle EAC$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի՝ $\Delta BED = \Delta AEC$: Վերջինից հետևում է, որ $DE = EC$: Ուրեմն՝ OED և OEC եռանկյուններում $OD = OC$, $DE = EC$, $\angle ODE = \angle OCE$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta OED = \Delta OEC$: Վերջինից կհետևում է, որ OE ճառագայթը XOY անկյան կիսորդն է:

205. AM միջնագծի շարունակության վրա տեղադրենք $MD = AM$ հատվածը, իսկ A_1M_1 միջնագծի շարունակության վրա տեղադրենք $M_1D_1 = A_1M_1$ հատվածը:

Դիտարկենք BMD և AMC եռանկյունները:

Ունենք՝ $BM = MC$, $AM = MD$: Բացի այդ, որպես հակադիր անկյուններ, $\angle BMD = \angle AMC$:



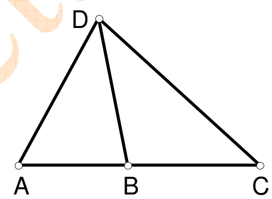
Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta BMD = \Delta AMC$: Վերջինից հետևում է, որ $BD = AC$: Նույն ձևով կարող ենք ցույց տալ, որ $B_1D_1 = A_1C_1$:

Այսպիսով՝ ABD և $A_1B_1D_1$ եռանկյուններում $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$ (ունեինք, որ $AC = A_1C_1$) և $AD = A_1D_1$ ($AD = 2AM$, $A_1D_1 = 2A_1M_1$ և ունեինք, որ $AM = A_1M_1$):

Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության III հայտանիշի՝ $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$: Վերջինից հետևում է, որ $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$: Ուրեմն՝ ABM և $A_1B_1M_1$ եռանկյուններում $AB = A_1B_1$, $AM = A_1M_1$ և $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta BAM = \Delta B_1A_1M_1$: Սրանից կհետևի, որ $BM = B_1M_1$: Եվ քանի որ $BC = 2BM$, իսկ $B_1C_1 = 2B_1M_1$, ապա կունենանք, որ $BC = B_1C_1$:

Այսպիսով՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների երրորդ կողմերն էլ են հավասար: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության III հայտանիշի՝ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$:

206. Ենթադրենք հակառակը՝ $DA = DB = DC$:

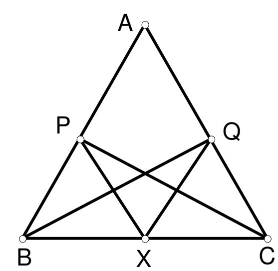


$DA = DB$ պայմանից կհետևեր, որ, որպես ADB հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյուններ՝ $\angle A = \angle ABD$:

Նույն ձևով, $DB = DC$ պայմանից, կհետևեր, որ $\angle CBD = \angle C$, իսկ $DA = DC$ պայմանից՝ $\angle A = \angle C$:

Այսպիսով՝ կունենաինք, որ $\angle A = \angle ABD = \angle CBD = \angle C$: Բայց, որպես DBC եռանկյան արտաքին անկյուն՝ $\angle ABD > \angle C$ (տե՛ս 202 խնդիրը): Ստացված հակասությունը խոսում է այն մասին, որ մեր ենթադրությունը ճիշտ չէ:

207. Քանի որ $AB = AC$, ապա, որպես հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյուններ՝ $\angle B = \angle C$: Ունենք նաև, որ $BX = XC$ և $\angle PXB = \angle QXC$:



Այսպիսով՝ BPX և CQX եռանկյունները հավասար են ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի: Վերջինից էլ հետևում է, որ $PX = XQ$:

Հետևաբար՝ BXQ և CXP եռանկյուններում $BX = XC$, $PX = XQ$: Բացի այդ, $\angle BXQ = \angle PXB + \angle PXQ$, իսկ $\angle CXP = \angle QXC + \angle PXQ$: Բայց $\angle PXB = \angle QXC$: Ուրեմն՝ $\angle BXQ = \angle CXP$:

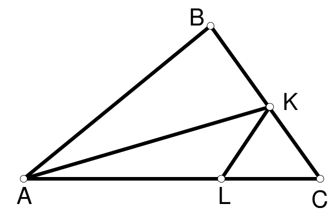
Այսպիսով՝ BXQ և CXP եռանկյունները հավասար են ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի: Վերջինից էլ կհետևի, որ $BQ = CP$:

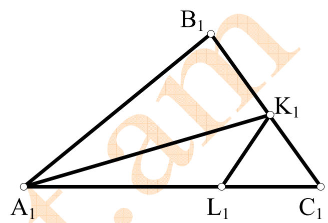
208. ա) Քանի որ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ և $\angle A = \angle A_1$, ապա, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$: Ուրեմն՝ $\angle C = \angle C_1$: Քանի որ $AC = A_1C_1$ և $AK = A_1K_1$, ապա $KC = K_1C_1$:

Այսպիսով՝ CKL և $C_1K_1L_1$ եռանկյուններում $KC = K_1C_1$, $LC = L_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta CKL = \Delta C_1K_1L_1$: Վերջինից էլ հետևում է, որ $KL = K_1L_1$:

բ) Քանի որ $\Delta CKL = \Delta C_1K_1L_1$ (տե՛ս ա) կետի լուծումը), ապա $\angle LKC = \angle L_1K_1C_1$: Հետևաբար այդ անկյուններին կից AKL և $A_1K_1L_1$ անկյունները նույնպես հավասար են:

Այսպիսով՝ AKL և $A_1K_1L_1$ եռանկյուններում $AK = A_1K_1$, $KL = K_1L_1$ (տե՛ս ա) կետը), $\angle AKL = \angle A_1K_1L_1$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta AKL = \Delta A_1K_1L_1$: Դրանից էլ հետևում է, որ $AL = A_1L_1$:





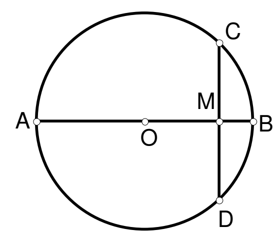
209. Շրջանագծի կենտրոնը նշանակենք O-ով և A, B, C և D կետերը միացնենք O-ին: Քանի որ $AB = CD$, ապա $\angle AOB = \angle DOC$ (տես 162 խնդիրը):

Դիտարկենք AOC և BOD եռանկյունները:

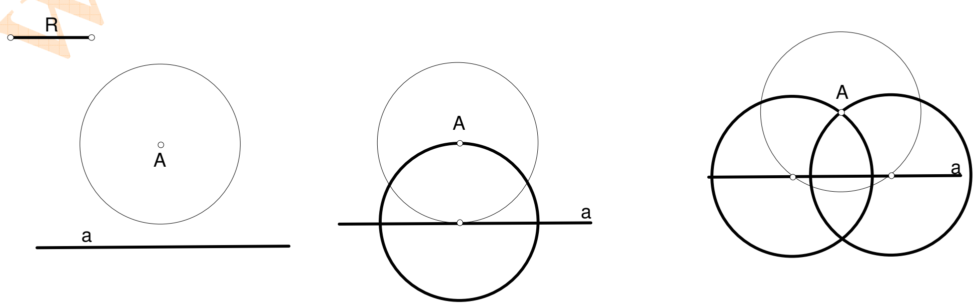
Ունենք՝ $AO = OB = OC = OD$: Բացի այդ, $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$ և $\angle BOD = \angle DOC + \angle BOC$: Քանի որ $\angle AOB = \angle DOC$, ապա կունենանք, որ $\angle AOC = \angle BOD$: Այսպիսով, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta AOC = \Delta BOD$: Վերջինից էլ հետևում է, որ $AC = BD$:

210. Ենթադրենք՝ AB տրամագիծը անցնում է CD լարի M միջնակետով:

COD եռանկյունը հավասարասրուն եռանկյուն է ($OC = OD$), իսկ OM–ը նրա հիմքին տարված միջնագիծն է, հետևաբար՝ նաև բարձրություն է՝ $OM \perp CD$: Քանի որ OM–ը ընկած է AB հատվածի վրա, ապա AB–ն նույնպես ուղղահայաց է CD–ին:



211. Ցուցում: Ենթադրենք՝ տրված են a ուղիղը, A կետը և R շառավիղը: Կառուցենք A կենտրոնով և տրված շառավղով շրջանագիծ: Քննարկենք կառուցված շրջանագծի և a ուղղի փոխադարձ դասավորությունը: Հնարավոր է երեք դեպք. նրանք ընդհանուր կետեր չունեն, ունեն մեկ ընդհանուր կետ, ունեն երկու ընդհանուր կետ:



Առաջին դեպքում խնդիրը լուծում չունի:

Երկրորդ դեպքում որոնելի շրջանագիծը կլինի՝ a ուղղի և նախորոք կառուցված շրջանագծի ընդհանուր կետում կենտրոն և տրված շառավիղ ունեցող շրջանագիծը:

Երրորդ դեպքում կա խնդրի պայմաններին բավարարող երկու շրջանագիծ: Դրանք տրված շառավիղ և a ուղղի ու նախորոք կառուցված շրջանագծի ընդհանուր կետերում կենտրոն ունեցող շրջանագծերն են:

Նշենք, որ ուղղի և շրջանագծի փոխդասավորության հարցը մանրամասնորեն կքննարկվի 8–րդ դասարանի դասընթացում:

212. Ցուցում: Ենթադրենք տրված են A և B կետերն ու R շառավիղը: Տանենք AB հատվածի միջնուղղահայացը:

Եթե R–ը փոքր է $\frac{AB}{2}$–ից, ապա խնդիրը լուծում չունի:

Եթե $R=\frac{AB}{2}$, ապա որոնելի շրջանագծի կենտրոնը AB հատվածի միջնակետն է:

Եթե R–ը մեծ է $\frac{AB}{2}$–ից, ապա կառուցել A կենտրոնով և R շառավղով շրջանագիծ: Այդ շրջանագծի և AB–ի միջնուղղահայացի հատման կետերը կլինեն որոնելի շրջանագծի կենտրոնները, այսինքն՝ խնդիրը կունենա երկու լուծում:

215. Ցուցում: Հիշեցնենք, որ A և C կետերից հավասարահեռ բոլոր կետերը գտնվում են AC հատվածի միջնուղղահայացի վրա (տես 189 խնդիրը):

Եթե $BC \geq AB$, ապա որոնելի կետը AC հատվածի միջնուղղահայացի և BC կողմի հատման կետն է:

Եթե $BC < AB$, ապա խնդիրը լուծում չունի: