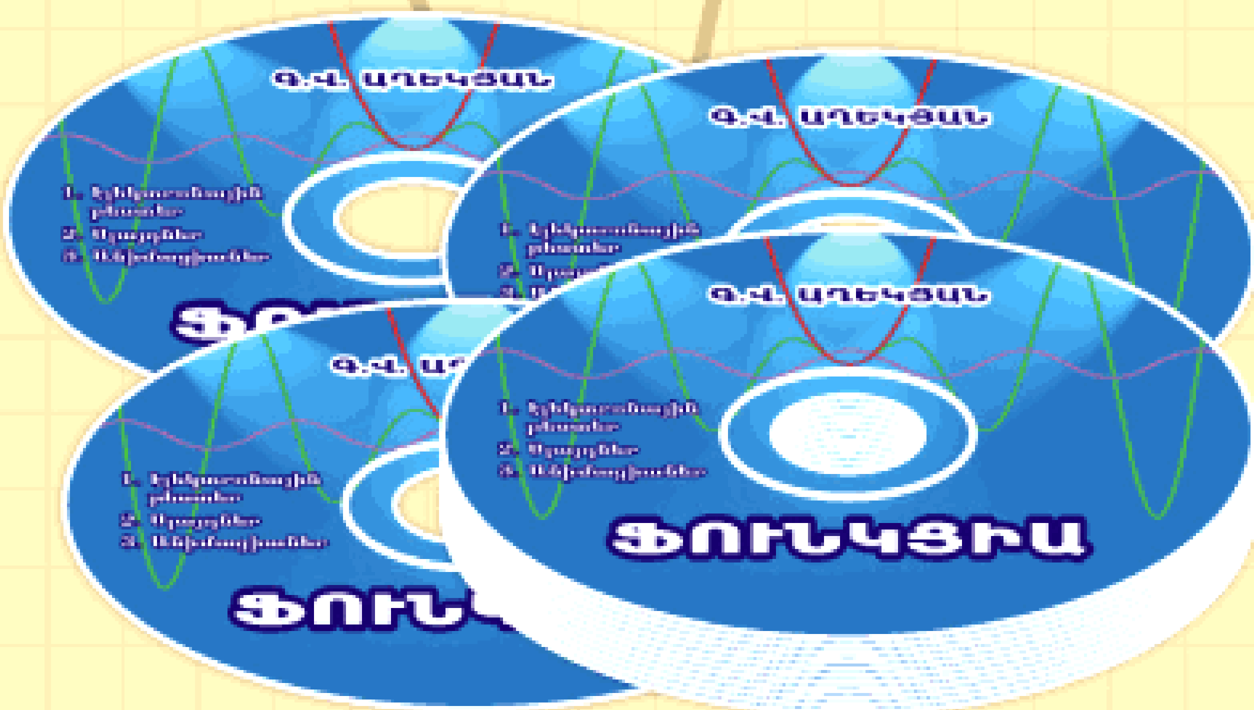
Գ.Վ. ԱՂԵԿՅԱՆ

ՖՈՒՆԿՑԻԱ



ԵՐԵՎԱՆ 2007

Գ. Վ. ԱՂԵԿՅԱՆ

ՖՈՒՆԿՑԻԱ

Երաշխավորված է ՀՀ կրթության և գիտության նախարարության կրթության ազգային ինստիտուտի կողմից, որպես ուսումնաօժանդակ ձեռնարկ միջին և ավագ դասարանների աշակերտների համար

ԵՐԵՎԱՆ – 2007

ՀՏԴ 51(07)
ԳՄԴ 22.1g7
Ա 481

Խմբագիր՝ Ֆիզմաթ. գիտությունների թեկնածու, դոցենտ Սարգիս Արտավազդի Հակոբյան:

Ա 481 Աղեկյան, Գ.Վ.
Ֆունկցիա: Ուս. ձեռնարկ.-Եր.: «Զանգակ» հրատ., 2007.-94 էջ:

Գրքույկն օժանդակ ձեռնարկ է դպրոցական դասընթացի «Ֆունկցիա» թեման ուսումնասիրելու համար: Այն ներառում է այդ թեմայի բոլոր բաժինները, բացի ածանցյալի օգնությամբ ֆունկցիայի հետազոտման բաժնից:

Թեմայի տեսական մասը ներկայացված է պարագրաֆներով: Յուրաքանչյուր պարագրաֆից հետո կան բավարար քանակով առաջադրանքներ, տրված են առաջադրանքների մեծ մասի պատասխանները:

Գրքույկին կից լազերային սկավառակը պարունակում է.

–էլեկտրոնային թեստեր ամբողջ թեմայի վերաբերյալ,

–յուրաքանչյուր պարագրաֆի համար PowerPoint փաթեթով ներկայացվող սլայդներ,

–ֆունկցիայի գրաֆիկի ձևափոխությունները ուսումնասիրելու համար նախատեսված էլեկտրոնային անիմացիոն նյութեր:

Ձեռնարկը նախատեսված է միջին և ավագ դասարանների աշակերտների, դիմորդների և ուսուցիչների համար:

Ա $\frac{1602010000}{0003(01)-2007}$ 2007թ. ԳՄԴ 22.1g7

ISBN 978-99941-1-398-9

ԱՌԱՋԱԲԱՆ

Գրքույկն օժանդակ ձեռնարկ է դպրոցական դասընթացի «Ֆունկցիա» թեման ուսումնասիրելու համար: Այն ներառում է այդ թեմայի բոլոր բաժինները, բացի ածանցյալի օգնությամբ ֆունկցիայի հետազոտման բաժնից:

Թեմայի տեսական մասը ներկայացված է պարագրաֆներով: Յուրաքանչյուր պարագրաֆից հետո կան բավարար քանակով առաջադրանքներ, որոնք չեն կրկնում գործող դասագրքերում առկա առաջադրանքները: Գրքույկում կան առաջադրանքների մեծ մասի պատասխանները:

Ելնելով թեմայի առանձնահատկություններից և ժամանակակից տեխնոլոգիաների (համակարգչի և համակարգչային փաթեթների) ընձեռած հնարավորություններից՝ պատրաստվել են մեծածավալ հայալեզու էլեկտրոնային նյութեր, որոնք ներկայացված են գրքույկին կից լազերային սկավառակում:

Էլեկտրոնային նյութերը բաղկացած են երեք մասից.

– էլեկտրոնային թեստեր ամբողջ թեմայի վերաբերյալ,

– յուրաքանչյուր պարագրաֆի համար PowerPoint փաթեթով ներկայացվող գունավոր և որակյալ գծագրեր՝ ուղեկցված տեսական նյութի որոշ դրվագներով (ընդհանուր քանակը 87 հատ),

– ֆունկցիայի գրաֆիկի ձևափոխությունները ուսումնասիրելու համար նախատեսված էլեկտրոնային անիմացիոն նյութեր, որոնք հնարավորություն են տալիս այդ բաժինը մատուցել ձայնային բացատրություններով զուգորդված ֆիլմի ձևով (ֆիլմի ընդհանուր տևողությունը 50 րոպե է):

Այդ նյութերի օգտագործման ուղեցույցը ներկայացված է հավելվածում: Այնտեղ կգտնեք նաև տեղեկություններ այդ նյութերի բովանդակության և կառուցվածքի մասին:

Կարծում եմ, որ ձեռնարկի (գրքույկի և էլեկտրոնային նյութեր պարունակող լազերային սկավառակի) օգտագործումը կհեշտացնեն և հաճելի կդարձնեն ինչպես թեմայի դասավանդումը, այնպես էլ նրա յուրացումը:

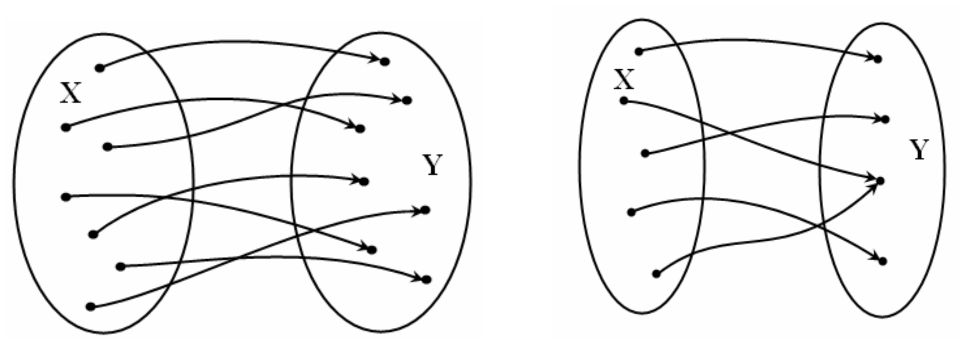
Հեղինակը իր երախտագիտությունն է հայտնում Երևանի Պետական Համալսարանին առընթեր Արտաշես Շահինյանի անվան ֆիզիկամաթեմատիկական հատուկ դպրոցի տնօրինությանը ձեռնարկի հրատարակումը հովանվորելու համար:

Գ.Վ. ԱՂԵԿՅԱՆ

§1. Ֆունկցիա

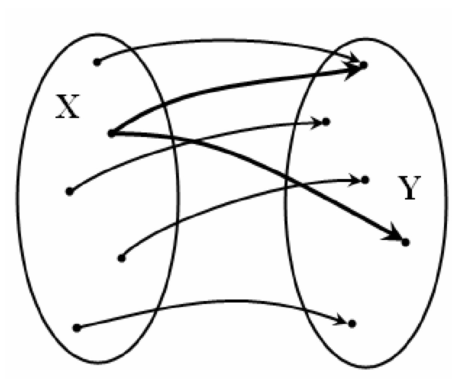
Սահմանում: Դիցուք տրված են X և Y ոչ դատարկ բազմությունները: Այնպիսի համապատասխանությունը, որի դեպքում X բազմության յուրաքանչյուր տարրի համապատասխանում է միայն մեկ տարր Y բազմությունից, անվանում են ***ֆունկցիա*** տրված (որոշված) X բազմության վրա, որի արժեքները Y բազմությունից են:

X և Y բազմությունների նկար 1-ի ա)-ում և բ)-ում պատկերված համապատասխանությունները ֆունկցիա են, իսկ նկար 2-ում պատկերված համապատասխանությունը ֆունկցիա չէ:



ա) բ)

Նկ. 1



Նկ. 2

Ֆունկցիան անվանում են ***թվային***, եթե X և Y բազմությունների տարրերը թվեր են: Այսուհետև ֆունկցիա ասելով կհասկանանք թվային ֆունկցիա:

X և Y բազմությունների տարրերը նշանակելու համար սովորաբար օգտագործում են x և y տառերը:

$x\in X$ փոփոխականն անվանում են ***անկախ փոփոխական կամ արգումենտ,*** իսկ համապատասխան $y\in Y$ փոփոխականը՝ ***կախյալ***

փոփոխական: Ասում են y փոփոխականը ֆունկցիա է x փոփոխականից կամ y-ը x-ի ֆունկցիա է:

y փոփոխականի x փոփոխականից ֆունկցիա լինելը գրում են այսպես. $y = f(x)$ կամ $y = \varphi(x)$, $y = h(x)$, $y = F(x)$ և այլն: Այդ դեպքում f, φ, h կամ F տառերը բնութագրում են այն կանոնը, ըստ որի ստացվում է x-ի համապատասխան y արժեքը:

x փոփոխականի բոլոր արժեքները (X բազմությունը) անվանում են ***ֆունկցիայի որոշման տիրույթ,*** որը նշանակվում է $D(f)$-ով:

Այն $y \in Y$ տարրերի բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրը գոնե մեկ $x \in X$ տարրի է համապատասխանում անվանում են f ***ֆունկցիայի արժեքների բազմություն կամ արժեքների տիրույթ,*** որը նշանակվում է $E(f)$-ով կամ $E(y)$-ով ($E(f) \subset Y$):

Ֆունկցիայի տրման առավել տարածված եղանակը բանաձևով տրման եղանակն է: Բանաձևում ֆունկցիան ներկայացվում է անալիտիկ արտահայտությամբ, որում նշված են հաստատունների և x-ի արժեքների նկատմամբ այն գործողությունները, որոնց կատարման արդյունքում ստացվում են y-ի համապատասխան արժեքները: Բանաձևը հնարավորություն է տալիս արգումենտի ցանկացած արժեքի համար հաշվել ֆունկցիայի համապատասխան արժեքը:

Օրինակ 1: Գտնենք $y = 5x - 1$ ֆունկցիայի արժեքները $x = -1$; 0 և 1 արժեքների համար:

$y(-1) = 5 \cdot (-1) - 1 = -6$; $y(0) = 5 \cdot 0 - 1 = -1$; $y(1) = 5 \cdot 1 - 1 = 4$:

Բանաձևը հնարավորություն է տալիս լուծել նաև հակադարձ խնդիրը. գտնել արգումենտի այն արժեքները, որոնց համա-պատասխանում է ֆունկցիայի տվյալ արժեքը:

Օրինակ 2: Գտնենք արգումենտի այն արժեքները, որոնցում $y = 4x + 3$ ֆունկցիան ընդունում է 3; 0 և –5 արժեքները: Դրա համար պետք է լուծել հետևյալ հավասարումները. $3 = 4x + 3$, $0 = 4x + 3$ և $-5 = 4x + 3$: Համապատասխանաբար կունենանք $x = 0$; $x = -\frac{3}{4}$; $x = -2$:

Եթե ֆունկցիան տրված է բանաձևով և չի նշված որոշման տիրույթը, ապա համարվում է, որ նրա որոշման տիրույթը անկախ փոփոխականի բոլոր այն արժեքներն են, որոնց դեպքում այդ բանաձևն իմաստ ունի, այսինքն այդ բանաձևի ԹԱԲ-ն է:

Բանաձևով տրված ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը գտնելու համար պետք է պարզել, թե $f(x)=a$ հավասարումը a-ի ո՞ր արժեքների համար ունի գոնե մեկ լուծում: Այդպիսի a-երի բազմությունն էլ կազմում է ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը: Իրոք, եթե a-ի որևէ արժեքի համար այդ հավասարումն ունի գոնե մեկ լուծում, ապա $f(x)$ ֆունկցիան ընդունում է այդ արժեքը, այսինքն այն պատկանում է $E(f)$-ին: Իսկ եթե a-ի ինչ-որ արժեքի համար այդ հավասարումը լուծում չունի, ապա $f(x)$ ֆունկցիան չի ընդունում այդ արժեքը, այսինքն այն չի պատկանում է $E(f)$-ին:

Առաջադրանքներ

1. Ֆունկցիան տրված է $f(x)=-3x^2+10$ բանաձևով: Գտե՛ք.

   ա) $f(-1)$, բ) $f(0)$, գ) $f\left(\frac{1}{3}\right)$:

2. Գտե՛ք $f(0)$, $f(1{,}5)$, $f(-1)$-ը, եթե $f(x)=\dfrac{x-0{,}5}{x+0{,}5}$:

3. Հայտնի է, որ $f(x)=x^3-10$: Գտե՛ք.

   ա) $f(5)$, բ) $f(4)$, գ) $f(2)$, դ) $f(-3)$:

4. Հայտնի է, որ $f(x)=-5x+6$: Գտե՛ք x-ի այն արժեքը, որի դեպքում.

   ա) $f(x)=17$, բ) $f(x)=-3$, գ) $f(x)=0$:

5. Գտե՛ք x-ի այն արժեքը, որի դեպքում $g(x)=0$, եթե

   ա) $g(x)=x(x+4)$, բ) $g(x)=\dfrac{x+1}{5-x}$:

6. Գտե՛ք հետևյալ բանաձևով տրված ֆունկցիայի որոշման տիրույթը.

   ա) $y=4x-8$, գ) $y=\dfrac{2x}{5-x}$, ե) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$,

   բ) $y=x^2-5x+1$, դ) $y=\dfrac{3}{(x-4)(x+1)}$, զ) $y=\sqrt{x-5}$:

7. Բերե՛ք մի այնպիսի ֆունկցիայի օրինակ, որի որոշման տիրույթը լինի.

   ա) բոլոր թվերի բազմությունը,

   բ) բոլոր թվերի բազմությունը, բացի 7-ից:

8. Ո՞րն է հետևյալ բանաձևով տրված ֆունկցիայի որոշման տիրույթը.

ա) $y = x^2 + 2x$, բ) $y = \dfrac{x-1}{1+x}$, գ) $y = \sqrt{9+x}$:

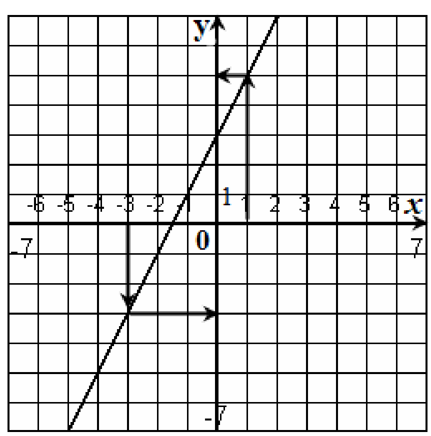
9. Ֆունկցիան տրված է $f(x) = 2x^2 - x + 2$ բանաձևով: Պատկանո՞ւմ են արդյոք հետևյալ թվերը այդ ֆունկցիայի արժեքների տիրույթին.

ա) 5, բ) –6, գ) 10, դ) –3, ե) 0, զ) 45:

§2. Ֆունկցիայի գրաֆիկ

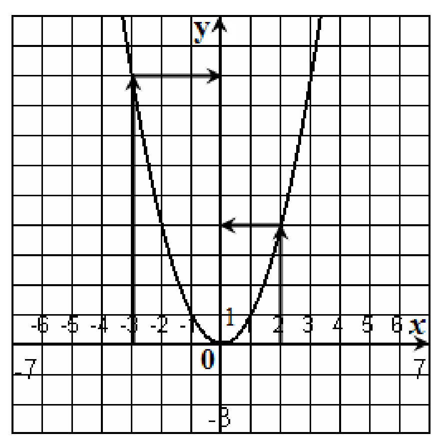
Սահմանում: $y = f(x)$ ***ֆունկցիայի գրաֆիկ*** անվանում են կոորդինատային հարթության $(x; f(x))$ կետերի բազմությունը, որտեղ $x \in D(f)$:

Ֆունկցիայի տրման եղանակներից մեկն էլ գրաֆիկով տրման եղանակն է: Գրաֆիկը նույնպես հնարավորություն է տալիս արգումենտի ցանկացած արժեքի համար գտնել ֆունկցիայի համապատասխան արժեքը (նկ. 2; 3): Կարելի է լուծել նաև հակադարձ խնդիրը. ֆունկցիայի նշված արժեքով գտնել արգումենտի այն արժեքները, որոնց այն համապատասխանում է (նկ. 4; 5):



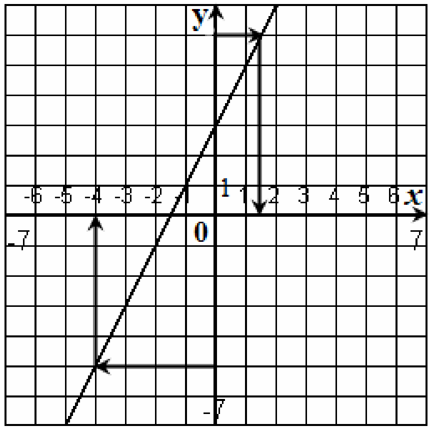
($x = 1,\ y = 5$); ($x = -3,\ y = -3$)

Նկ. 2



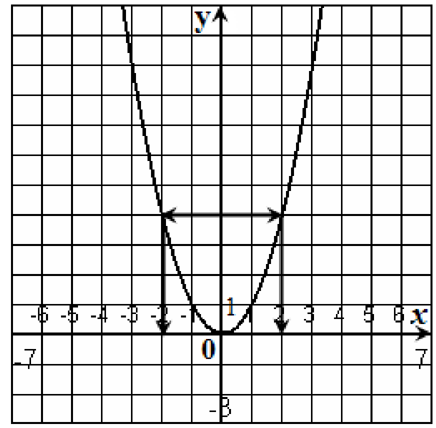
($x = 2,\ y = 4$); ($x = -3,\ y = 9$)

Նկ. 3



($y=6,\ x=1{,}5$); ($y=-5,\ x=-4$)

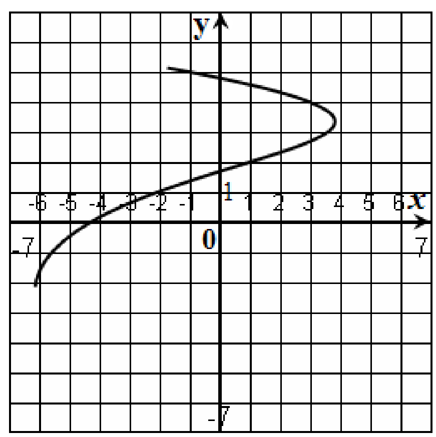
Նկ. 4



($y=4,\ x_1=-2,\ x_2=2$)

Նկ. 5

Ֆունկցիայի գրաֆիկի սահմանումից հետևում է, որ այն կոորդինատային հարթության ենթաբազմություն է: Բայց կոորդինատային հարթության կետերի ամեն մի բազմություն ֆունկցիայի գրաֆիկ չէ: Օրինակ, նկար 6-ում պատկերված կորը ֆունկցիայի գրաֆիկ չէ, քանի որ x փոփոխականի 0 արժեքին համապատասխանում են y փոփոխականի երկու արժեք:



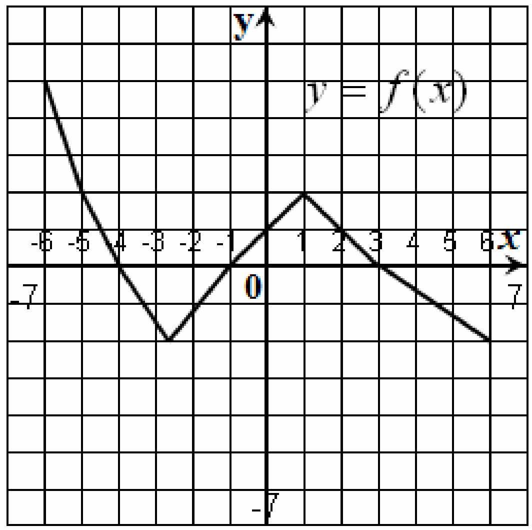
Նկ. 6

Որպեսզի կոորդինատային հարթության կետերի բազմությունը լինի ֆունկցիայի գրաֆիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ Oy առանցքին զուգահեռ ցանկացած ուղիղ այդ բազմության հետ ունենա ոչ ավել քան մեկ ընդհանուր կետ:

$y=f(x)$ ***ֆունկցիայի զրոներ*** անվանում են $f(x)=0$ հավասարման արմատները: Եթե $x_1;\ x_2;\ldots,\ x_n$ թվերը $y=f(x)$ ֆունկցիայի զրոներն են, ապա այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը x-երի առանցքը հատում է $x_1;\ x_2;\ldots,\ x_n$ աբսցիսներ ունեցող կետերում:

X միջակայքն անվանում են $y=f(x)$ ***ֆունկցիայի նշանապահպանության միջակայք,*** եթե այդ միջակայքում $y=f(x)$ ֆունկցիան ընդունում է միևնույն նշանի արժեքներ:

Նկար 7-ում պատկերված է $[-6;\ 6]$ միջակայքում որոշված $y=f(x)$ ֆունկցիան: Այդ ֆունկցիայի զրոներն են $-4; -1$ և 3 թվերը, $[-6; -4)$ և $(-1; 3)$ միջակայքերում ֆունկցիան ընդունում է դրական, իսկ $(-4; -1)$ և $(3; 6]$ միջակայքերում՝ բացասական արժեքներ:

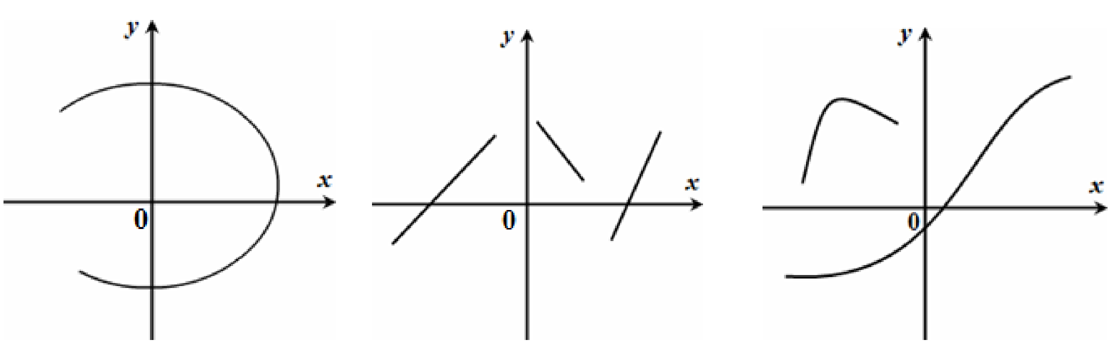


Նկ. 7

$y=f(x)$ ֆունկցիայի նշանապահպանության միջակայքերը գտնելու համար անհրաժեշտ է լուծել $f(x)>0$ և $f(x)<0$ անհավասարումները:

Առաջադրանքներ

10. Նկար 8-ում պատկերված գծերից որո՞նք են ֆունկցիայի գրաֆիկ.



ա) բ) գ)

Նկ. 8

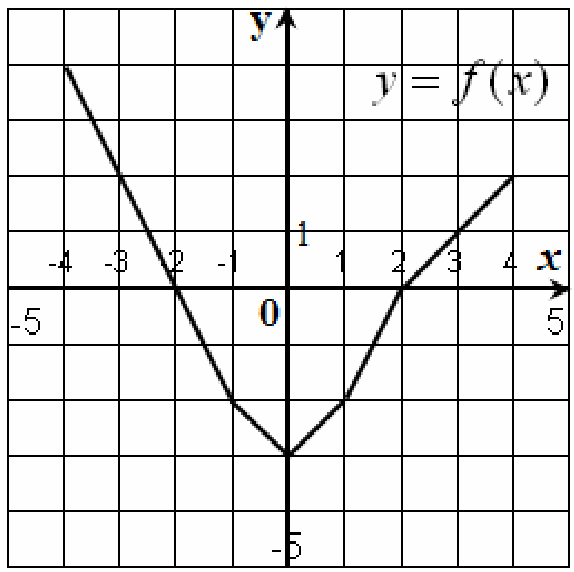
11. Նկար 9-ում պատկերված է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, որի որոշման տիրույթը [–4; 4] միջակայքն է: Գրաֆիկի միջոցով գտեք.

ա) $f(-4)$, $f(-3)$, $f(0)$, $f(4)$ արժեքները,

բ) x-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում $f(x) = -2$, $f(x) = 0$, $f(x) = 2$,

գ) ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը,

դ) նշանապահպանության միջակայքերը:



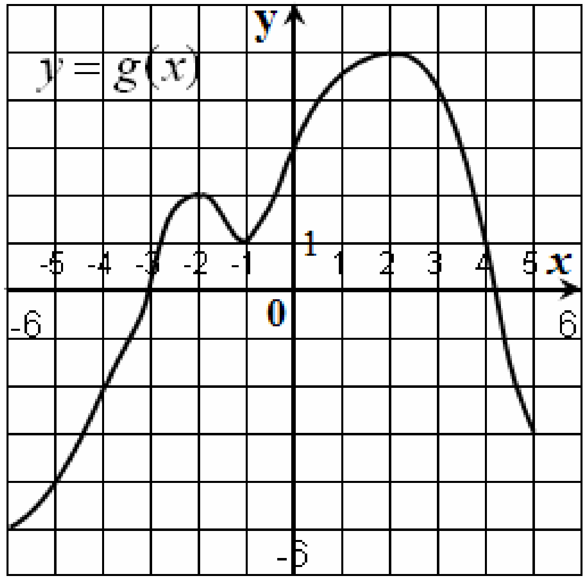
Նկ. 9

12. Նկար 10-ում պատկերված է $y = g(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, որի որոշման տիրույթը [–6; 5] միջակայքն է: Գրաֆիկի միջոցով գտե՛ք.

ա) $g(-5)$, $g(-2)$, $g(0)$, $g(2)$, $g(5)$ արժեքները,

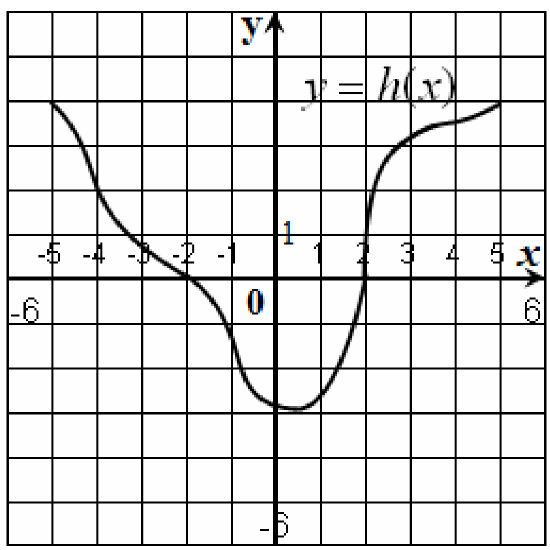
բ) x-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում $g(x) = -4$, $g(x) = -5$, $g(x) = 5$,

գ) ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը:



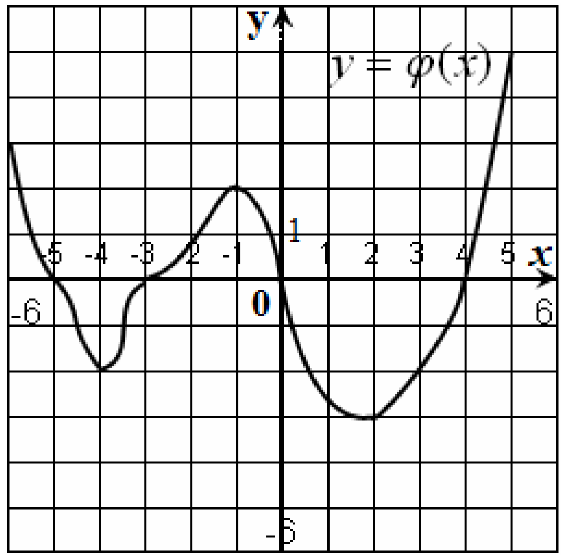
Նկ. 10

13. Նկար 11-ում պատկերված է [–5; 5] միջակայքում որոշված $y = h(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Գտե՛ք նրա զրոները և նշանապահպանության միջակայքերը:



Նկ. 11

14. Նկար 12-ում պատկերված է [–6; 5] միջակայքում որոշված $y = \varphi(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Գտե՛ք նրա զրոները, նշանապահպանության միջակայքերը և արժեքների բազմությունը:



Նկ. 12

15. Գծեցե՛ք մի այնպիսի ֆունկցիայի գրաֆիկ, որի զրոները լինեն հետևյալ թվերը. ա) –3 և 3, բ) –4; 0; և 2, գ) –3; 2; 1 և 5:
16. Գծեցե՛ք [–10; 10] որոշման տիրույթ ունեցող մի այնպիսի ֆունկցիայի գրաֆիկ, որի զրոները լինեն –2; 1 և 3 թվերը, որը դրական արժեքներ ընդունի [–10; –2) և (3; 10] միջակայքերում և բացասական արժեքներ՝ (–2; 1) և (1; 3) միջակայքերում:
17. Գտե՛ք ֆունկցիայի զրոները (եթե գոյություն ունեն).

ա) $y=-0{,}8x+12$, գ) $y=\dfrac{4+2x}{x^2+5}$,

բ) $y=(3x-10)(x+6)$, դ) $y=\dfrac{6}{(x-1)(x+8)}$:

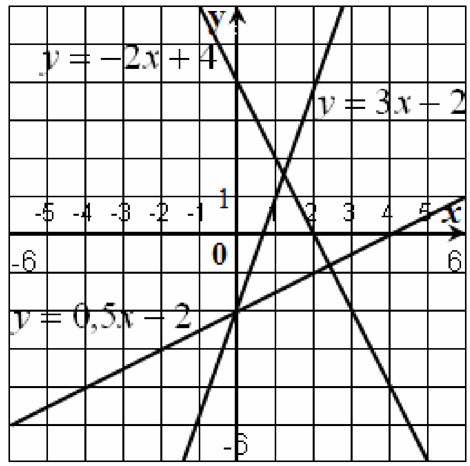
§3. Գծային ֆունկցիա

Սահմանում: $y=kx+b$ բանաձևով տրված ֆունկցիան, որտեղ x-ը անկախ փոփոխական է, իսկ k-ն և b-ն ինչ-որ հաստատուններ, անվանում են ***գծային ֆունկցիա:***

Քանի որ $kx+b$ արտահայտությունը իմաստ ունի x-ի ցանկացած արժեքի համար, ապա գծային ֆունկցիայի որոշման տիրույթը (–∞; +∞) միջակայքն է՝ $D(y)=(-\infty;\ +\infty)$:

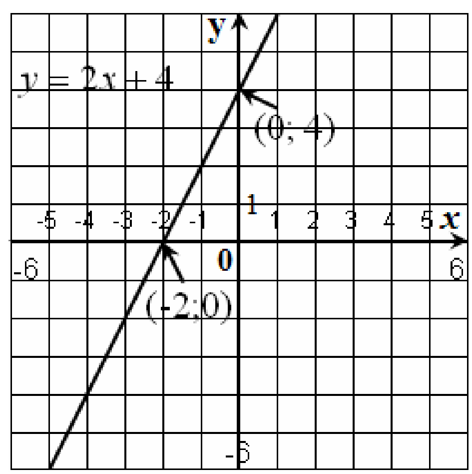
Գծային ֆունկցիայի գրաֆիկը ուղիղ գիծ է:

Գծային ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար բավական է գտնել գրաֆիկի երկու կետերի կոորդինատները, այդ կետերը նշել կոորդինատային հարթության վրա և դրանցով տանել ուղիղ (նկ. 13):



Նկ. 13

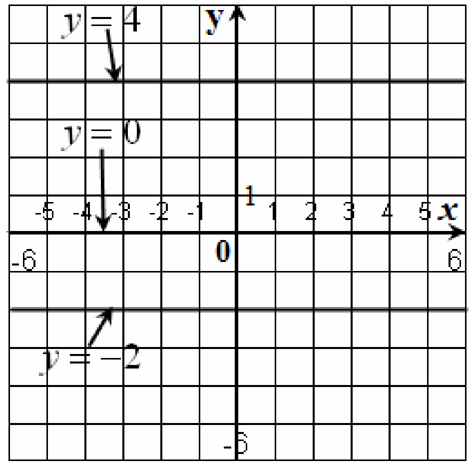
$y = kx + b$ $(k \neq 0)$ ուղիղը y-ների առանցքը հատում է b օրդինատ ունեցող $(0, b)$ կետում, իսկ x-երի առանցքը հատում է $-\frac{b}{k}$ աբսցիս ունեցող $\left(-\frac{b}{k}, 0\right)$ կետում (նկ. 14):



Նկ. 14

k-ն անվանում են ուղղի ***անկյունային գործակից:*** Այն հավասար է ուղղի և x-երի առանցքի դրական ուղղության կազմած անկյան տանգենսին:

Եթե $k = 0$, ապա ստացվում է $y = b$ ***հաստատուն ֆունկցիան,*** որի գրաֆիկը y-ների առանցքը (0; b) կետում հատող և x-երի առանցքին զուգահեռ ուղիղ է (նկ. 15):

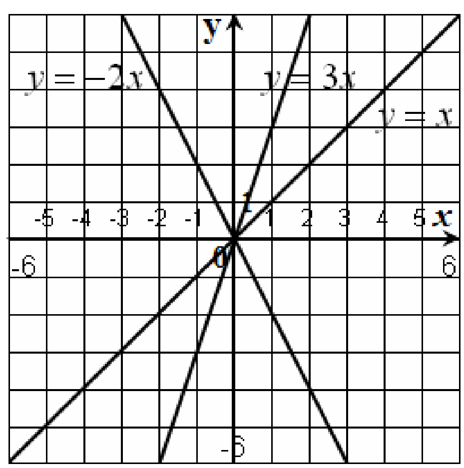


Նկ. 15

Գծային ֆունկցիայի մի մասնավոր դեպքն էլ ***ուղիղ համեմատականության ֆունկցիան*** է՝ $y=kx$, որտեղ k-ն զրոյից տարբեր հաստատուն է:

Քանի որ $x=0$ դեպքում $y=kx=0$, ապա ուղիղ համեմատականության գրաֆիկը մի ուղիղ է, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով:

Ուղիղ համեմատականության ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար բավական է նշել գրաֆիկի մի կետ, տարբեր կոորդինատների սկզբնակետից, և այդ կետով ու կոորդինատների սկզբնակետով տանել ուղիղ (նկ. 16):

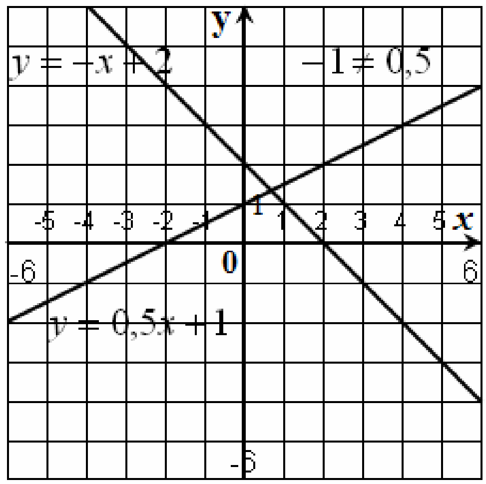


Նկ. 16

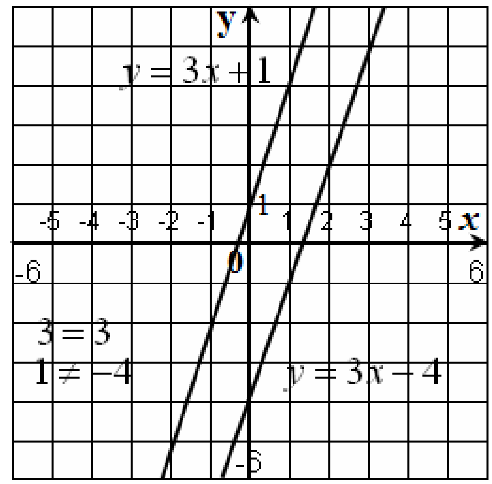
$y=k_1x+b_1$ և $y=k_2x+b_2$ ֆունկցիաների գրաֆիկ հանդիսացող ուղիղները.

ա) հատվում են, եթե $k_1 \neq k_2$ (նկ. 17),

բ) զուգահեռ են եթե $k_1=k_2$, $b_1 \neq b_2$ (նկ. 18), գ) համընկնում են, եթե $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$:



Նկ. 17



Նկ. 18

Գտնենք գծային ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը:

Դրա համար պետք է պարզել, թե $kx + b = a$ հավասարումն ո՞ր a-երի համար լուծում ունի:

Դիտարկենք երկու դեպք. 1) $k \neq 0$ և 2) $k = 0$:

Առաջին դեպքում կունենանք $kx = a - b$ հավասարումը, որը ցանկացած աջ մասի, հետևաբար ցանկացած a-ի համար ունի լուծում: Ուրեմն, եթե $k \neq 0$, $E(y) = (-\infty; +\infty)$:

Երկրորդ դեպքում կունենանք $0 \cdot x = a - b$ հավասարումը, որը լուծում ունի, եթե $a - b = 0$, այսինքն $a = b$: Հետևաբար, եթե $k = 0$, ապա $E(y) = \{b\}$:

Իհարկե, այս ամենը կարելի էր տեսնել համապատասխան գրաֆիկներից: Բայց հաճախ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար նախապես պետք է գտնել նաև նրա արժեքների բազմությունը:

Առաջադրանքներ

18. Արդյո՞ք այս բանաձևով տրված ֆունկցիան գծային է.

ա) $y = 2x - 3$, գ) $y = \dfrac{x}{2} + 1$, ե) $y = x^2 - 3$,

բ) $y = 7 - 9x$, դ) $y = \dfrac{2}{x} + 1$, զ) $y = \dfrac{10x - 7}{5}$:

19. Գծային ֆունկցիան տրված է $y = 0,5x + 6$ բանաձևով: Գտե՛ք y-ի արժեքը, որը համապատասխանում է $x = -12$; 0; 34 արժեքին: Ո՞ր x-ի դեպքում է y-ի արժեքը դառնում -16; 0; 8:
20. Գծային ֆունկցիան տրված է $y = -2x + 3$ բանաձևով: Գտե՛ք.
ա) y-ի արժեքը, եթե $x = -1,5$; 2; 5; 4,
բ) x-ի արժեքը, որի դեպքում $y = -4,5$; 0; 1; $1,5$:
21. Կառուցե՛ք հետևյալ բանաձևով տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը.
ա) $y = -2x + 1$, գ) $y = -x + 4,5$, ե) $y = \dfrac{x}{2} - 3$,
բ) $y = 0,2x + 5$, դ) $y = x + 1,5$, զ) $y = -x - 3,5$:
22. Կառուցե՛ք հետևյալ բանաձևով տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը.
ա) $y = -3x + 4$, գ) $y = x - 2$,
բ) $y = -x + 3$, դ) $y = 0,3x - 5$:
23. Կառուցումներ չկատարելով՝ գտե՛ք հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկների և կոորդինատային առանցքների հատման կետերի կոորդինատները.
ա) $y = -2,4x + 9,6$, գ) $y = 1,2x + 6$,
բ) $y = -0,7x - 28$, դ) $y = -5x + 2$:
24. Գծային ֆունկցիայի գրաֆիկը x-երի առանցքը հատում է 4 աբսցիս ունեցող կետում, իսկ y-ների առանցքը՝ 11 օրդինատ ունեցող կետում: Այդ ֆունկցիան տվե՛ք բանաձևով:
25. Չկառուցելով $y = 1,2x - 7$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ պարզե՛ք, թե անցնո՞ւմ է այդ գրաֆիկը հետևյալ կետերով.
ա) A(100; 113), գ) C(–10; 5),
բ) B(–15; –25), դ) D(300; 353):
26. Կառուցե՛ք հետևյալ բանաձևով տրված ուղիղ համեմատականության գրաֆիկը.
ա) $y = 3x$, գ) $y = x$, ե) $y = 2,5x$,
բ) $y = -1,5x$, դ) $y = -x$, զ) $y = -4,5x$:
27. Ինչպիսի՞ն է ֆունկցիաների գրաֆիկների փոխդասավորությունը.
ա) $y = 7x - 4$ և $y = 7x + 8$, դ) $y = -4x$ և $y = -4x - 5$,
բ) $y = 10x + 8$ և $y = -10x + 6$, ե) $y = 3x + 1$ և $y = -4x + 1$,
գ) $y = 3x - 5$ և $y = -6x + 1$, զ) $y = 12x$ և $y = -8x$:

28. Տրված է $y = 2{,}5x + 4$ գծային ֆունկցիան: Բանաձևե՛ք որևէ ֆունկցիա, որի գրաֆիկը.

ա) զուգահեռ է տրված ֆունկցիային,

բ) հատում է տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը:

29. Բանաձևե՛ք երկու գծային ֆունկցիա, որոնց գրաֆիկները.

ա) զուգահեռ ուղիղներ են, բ) հատվող ուղիղներ են:

30. Գտե՛ք հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկների հատման կետերի կոորդինատները.

ա) $y = 10x - 8$ և $y = -3x + 5$, դ) $y = 37x - 8$ և $y = 25x + 4$,

բ) $y = 14 - 2{,}5x$ և $y = 1{,}5x - 18$, ե) $y = 14x$ և $y = x + 26$,

գ) $y = 20x - 70$ և $y = 70x + 30$, զ) $y = -5x + 16$ և $y = -6$:

§4. Ֆունկցիաների հատկությունները

1. Ֆունկցիայի մոնոտոնությունը

Սահմանում: $y = f(x)$ ֆունկցիան անվանում են X բազմության վրա ***աճող***, եթե այդ բազմությանը պատկանող արգումենտի ավելի մեծ արժեքին համապատասխանում է ֆունկցիայի ավելի մեծ արժեք, այսինքն եթե ցանկացած $x_1, x_2 \in X$ թվերի համար $x_1 < x_2$ անհավասարությունից հետևում է, որ $f(x_1) < f(x_2)$:

Սահմանում: $y = f(x)$ ֆունկցիան անվանում են X բազմության վրա ***նվազող***, եթե այդ բազմությանը պատկանող արգումենտի ավելի մեծ արժեքին համապատասխանում է ֆունկցիայի ավելի փոքր արժեք, այսինքն եթե ցանկացած $x_1, x_2 \in X$ թվերի համար $x_1 < x_2$ անհավասարությունից հետևում է, որ $f(x_1) > f(x_2)$:

Սահմանում: Ֆունկցիան անվանում են ***աճող (նվազող)***, եթե այն աճող է (համապատասխանաբար՝ նվազող է) իր որոշման տիրույթում:

Աճող և նվազող ֆունկցիաներն ունեն ընդհանուր անվանում՝ ***մոնոտոն ֆունկցիաներ:***

Պարզենք $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ գծային ֆունկցիայի մոնոտոնության հարցը:

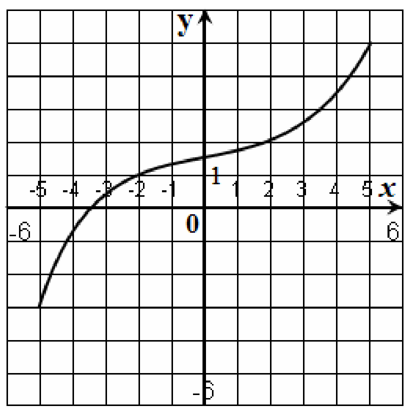
Ենթադրենք x_1-ը և x_2-ը կամայական երկու թվեր են, ընդ որում $x_1 > x_2$: Գտնենք $f(x_1) - f(x_2)$-ը:

Ունենք $f(x_1)-f(x_2)=kx_1+b-kx_2-b=k(x_1-x_2)$: Քանի որ $x_1>x_2$, ապա $x_1-x_2>0$: Ուրեմն $f(x_1)-f(x_2)>0$, եթե $k>0$, և $f(x_1)-f(x_2)<0$, եթե $k<0$: Այսպիսով, $y=kx+b$ $(k\neq 0)$ ֆունկցիան աճող է, եթե $k>0$, և նվազող է, եթե $k<0$:

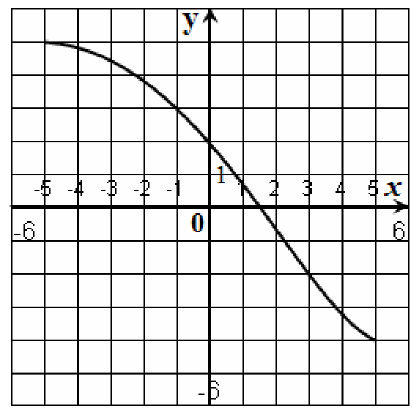
Եթե $k=0$, ապա, ինչպես գիտենք, ֆունկցիան հաստատուն է:

Ֆունկցիայի մոնոտոնության մասին կարելի է դատել նաև ելնելով ֆունկցիայի գրաֆիկից: Ֆունկցիայի աճող (նվազող) լինելը նրա գրաֆիկի վրա արտահայտվում է նրանով, որ երբ կետը գրաֆիկի վրայով շարժվում է դեպի աջ, նրա օրդինատը մեծանում է (փոքրանում է), այսինքն կետը բարձրանում է վեր (իջնում է վար):

Նկար 19-ում պատկերված գրաֆիկներից ա)-ն աճող, իսկ բ)-ն նվազող ֆունկցիայի գրաֆիկ է:



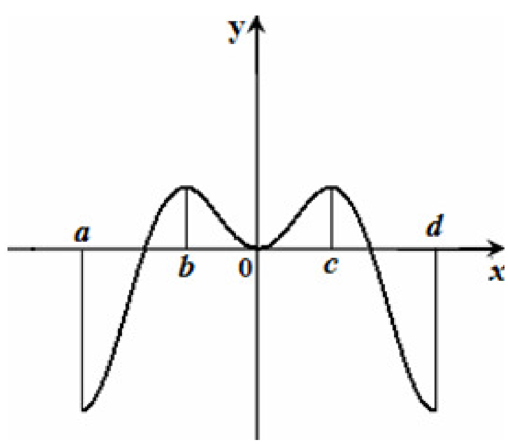
ա)



բ)

Նկ. 19

Նկար 20-ում պատկերված է ոչ մոնոտոն ֆունկցիայի գրաֆիկ: Այն աճող է $[a;b]$ և $[0;c]$ միջակայքերում, նվազող է $[b;0]$ և $[c;d]$ միջակայքերում:



Նկ. 20

2. Ֆունկցիայի սահմանափակությունը

Սահմանում: $y = f(x)$ ֆունկցիան անվանում են ***վերևից սահմանափակ***, եթե գոյություն ունի այնպիսի M թիվ, որ ցանկացած $x \in D(f)$ համար $f(x) \le M$:

Գրաֆիկորեն դա նշանակում է, որ $y = M$ ուղղից վեր այդ ֆունկցիայի գրաֆիկին պատկանող կետեր գոյություն չունեն:

Սահմանում: $y = f(x)$ ֆունկցիան անվանում են ***ներքևից սահմանափակ***, եթե գոյություն ունի այնպիսի m թիվ, որ ցանկացած $x \in D(f)$ համար $f(x) \ge m$:

Գրաֆիկորեն դա նշանակում է, որ $y = m$ ուղղից ներքև այդ ֆունկցիայի գրաֆիկին պատկանող կետեր գոյություն չունեն:

Սահմանում: $y = f(x)$ ֆունկցիան անվանում են ***սահմանափակ***, եթե այն սահմանափակ է և վերևից, և ներքևից:

Գրաֆիկորեն դա նշանակում է, որ այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը ընկած է $y = m$ և $y = M$ ուղիղներով սահմանափակված շերտի մեջ:

Սահմանում: Եթե գոյություն ունի ֆունկցիայի արժեքների բազմությանը պատկանող մեծագույն թիվ, ապա այն անվանում են ֆունկցիայի ***մեծագույն արժեք***, հակառակ դեպքում ֆունկցիան մեծագույն արժեք չունի:

Սահմանում: Եթե գոյություն ունի ֆունկցիայի արժեքների բազմությանը պատկանող փոքրագույն թիվ, ապա այն անվանում են ֆունկցիայի ***փոքրագույն արժեք,*** հակառակ դեպքում ֆունկցիան փոքրագույն արժեք չունի:

Նախորդ պարագրաֆում մենք տեսանք, որ $y = kx + b$ գծային ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը՝ $E(y) = (-\infty; +\infty)$, եթե $k \ne 0$ և $E(y) = \{b\}$, եթե $k = 0$: Հետևաբար, եթե $k \ne 0$, ապա գծային ֆունկցիան սահմանափակ չէ ոչ վերևից և ոչ էլ ներքևից: Այն չունի ոչ մեծագույն, և ոչ էլ փոքրագույն արժեք: Իսկ եթե $k = 0$, ապա այն սահմանափակ է: Նրա մեծագույն և փոքրագույն արժեքները հավասար են b-ի:

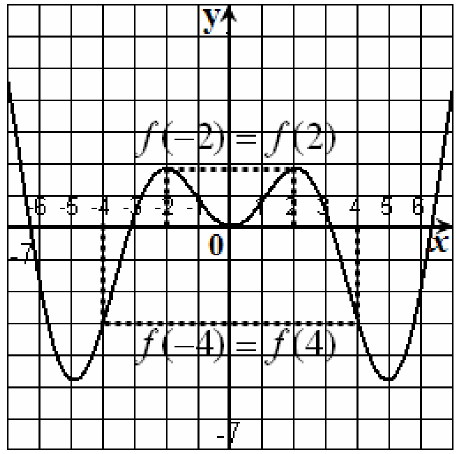
3. Ֆունկցիայի զույգությունը

Սահմանում: $y = f(x)$ ֆունկցիան անվանում են զույգ ֆունկցիա, եթե ցանկացած $x \in D(f)$-ի համար

ա) $-x \in D(f)$,

բ) $f(-x) = f(x)$:

Զույգ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է օրդինատների առանցքի նկատմամբ (նկ. 21):



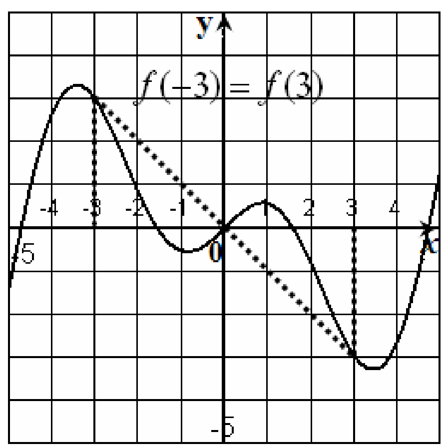
Նկ. 21

Սահմանում: $y = f(x)$ ֆունկցիան անվանում են կենտ ֆունկցիա, եթե ցանկացած $x \in D(f)$-ի համար

ա) $-x \in D(f)$,

բ) $f(-x) = -f(x)$:

Կենտ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ (նկ. 22):



Նկ. 22

Նշենք, որ ֆունկցիան կարող է լինել ոչ զույգ և ոչ էլ կենտ: Օրինակ, եթե $y = f(x)$ ֆունկցիայի համար $x_1 \in D(f)$, բայց $-x_1 \notin D(f)$, ապա այն ոչ զույգ է և ոչ էլ կենտ: Կամ եթե որևէ x-ի համար $-x \in D(f)$, բայց $f(-x)$-ը հավասար չէ ոչ $f(x)$-ին և ոչ էլ $-f(x)$-ին, ապա այն ոչ զույգ է և ոչ էլ կենտ:

Պարզենք $y = kx + b$ գծային ֆունկցիայի զույգության հարցը:

Քանի որ $D(y)=(-\infty;+\infty)$, ապա ցանկացած $x\in D(f)$ համար $-x\in D(f)$: Մյուս կողմից, $f(-x)=-kx+b$: Դիտարկենք երեք դեպք.

1) $k=0$: Այս դեպքում ցանկացած $x\in D(f)$-ի համար $f(-x)=b=f(x)$: Հետևաբար հաստատուն ֆունկցիան զույգ է:

2) $k\neq 0$, $b=0$: Այս դեպքում ցանկացած $x\in D(f)$-ի $f(-x)=-kx=-f(x)$: Հետևաբար ուղիղ համեմատականության ֆունկցիան կենտ է:

3) $k\neq 0$, $b\neq 0$: Այս դեպքում $f(-x)=f(x)$ պայմանը՝ $-kx+b=kx+b$ տեղի ունի միայն $x=0$ դեպքում: Իսկ $f(-x)=-f(x)$ պայմանը համարժեք է $0\cdot x=2b$ հավասարմանը, որը լուծում չունի: Հետևաբար, եթե $k\neq 0$, $b\neq 0$, ապա գծային ֆունկցիան ոչ զույգ է և ոչ էլ կենտ:

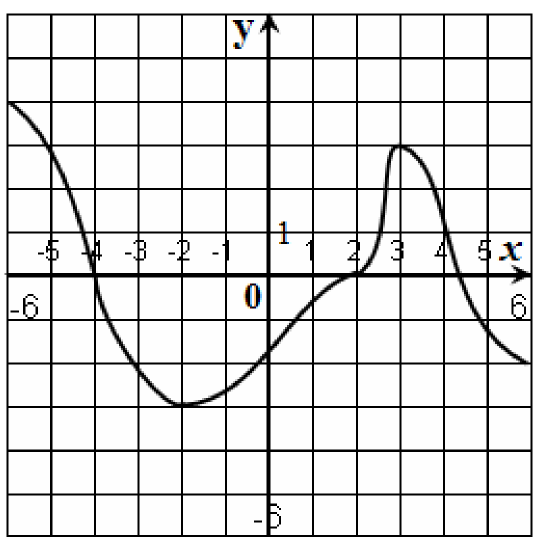
Դիտողություն: Նույն բանաձևով տրված ֆունկցիաների զույգությունները կարող են լինել տարբեր: Օրինակ $y=3x$ ֆունկցիան կենտ է, բայց $y=3x$, $x\in[-2;3]$ ֆունկցիան ոչ զույգ է և ոչ էլ կենտ:

Առաջադրանքներ

31. Նկար 23-ում պատկերված է [–6; 6] միջակայքում որոշված $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

ա) Նշե՛ք այն միջակայքերը, որոնցում ֆունկցիան աճում է, և այն միջակայքերը, որոնցում ֆունկցիան նվազում է,

բ) ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները:



Նկ. 23

32. Գծագրե՛ք [–3; 4] որոշման տիրույթ ունեցող այնպիսի մի ֆունկցիայի գրաֆիկ, որը.
ա) աճի [–3; 0] միջակայքում և նվազի [0; 4] միջակայքում,
բ) նվազի [–3; 1] միջակայքում և աճի [1; 4] միջակայքում:
33. Հետևյալ բանաձևով տրված ֆունկցիաներից որո՞նք են աճող.
ա) $y=-2x+1$, գ) $y=-4x+4{,}5$, ե) $y=3x$,
բ) $y=0{,}2x+5$, դ) $y=x+1{,}5$, զ) $y=-x-3{,}5$:
34. Հետևյալ բանաձևով տրված ֆունկցիաներից որո՞նք են նվազող.
ա) $y=-5x+3$, գ) $y=-x+3{,}5$, ե) $y=0{,}3x+1$,
բ) $y=2x+5$, դ) $y=6$, զ) $y=-x+10$:
35. Կարո՞ղ է աճող ֆունկցիան լինել.
ա) ներքևից սահմանափակ,
բ) վերևից սահմանափակ:
36. Կարո՞ղ է նվազող ֆունկցիան լինել.
ա) վերևից սահմանափակ,
բ) ներքևից սահմանափակ:
37. Կարո՞ղ է աճող ֆունկցիան ընդունել միայն բացասական արժեքներ:
38. [a; b] միջակայքում մոնոտոն ֆունկցիայի գրաֆիկը [a; b] միջակայքի քանի՞ կետում կարող է հատել x-երի առանցքը.
ա) 0; բ) 1; գ) 2; դ) 3:
39. $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները [a; b] միջակայքում որոշված ֆունկցիաներ են, ընդ որում $f(x)$-ը աճող է, իսկ $g(x)$-ը՝ նվազող: Բացի այդ, $f(a)=g(a)$: [a; b] միջակայքին պատկանող ցանկացած x-ի համար ո՞ր անհավասարությունն է ճիշտ:
ա) $f(x)>g(x)$; բ) $f(x)\geq g(x)$; գ) $f(x)<g(x)$; դ) $f(x)\leq g(x)$:
40. $y=-x+7$; $y=5$; $y=4x$; $y=-3x$; $y=-2x-3$; $y=-3{,}2$ ֆունկցիաներից որո՞նք են.
ա) զույգ ֆունկցիա,
բ) կենտ ֆունկցիա,
գ) ոչ զույգ և ոչ էլ կենտ ֆունկցիա:
41. $y=f(x)$ ֆունկցիան որոշված է [–4; 3] միջակայքում: Կարո՞ղ է այդ ֆունկցիան լինել զույգ կամ կենտ:
42. Հայտնի է, որ $f(-2)=1{,}4$, իսկ $f(2)=4$: Կարո՞ղ է $y=f(x)$ ֆունկցիան լինել զույգ կամ կենտ:

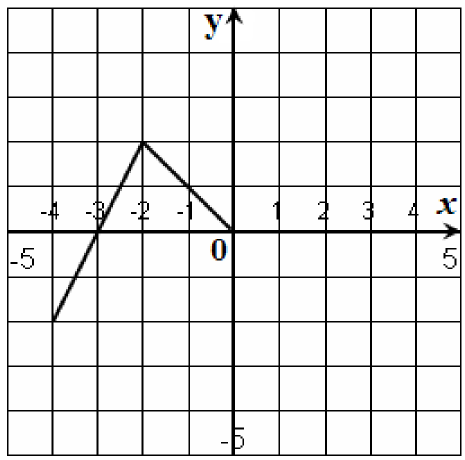
43. Ապացուցե՛ք, որ ֆունկցիան զույգ է.

ա) $y = x^2 + 3$, բ) $y = -x^4$, գ) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$:

44. Ապացուցե՛ք, որ ֆունկցիան կենտ է.

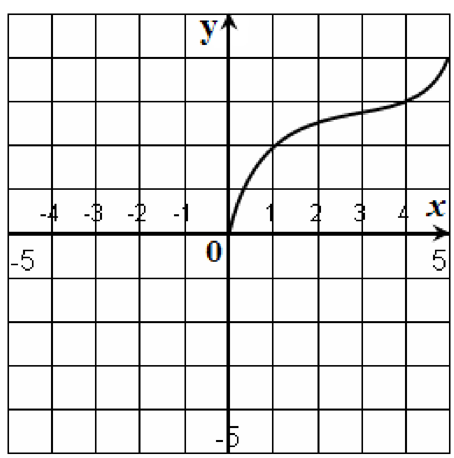
ա) $y = x^5$, բ) $y = -4x^3$, գ) $y = \dfrac{2}{x}$:

45. Նկար 24-ում պատկերված է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի մի մասը: Ֆունկցիայի որոշման տիրույթը [–4; 4] միջակայքն է: Կառուցե՛ք այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ գիտենալով, որ այն.
ա) զույգ ֆունկցիա է, բ) կենտ ֆունկցիա է:



Նկ. 24

46. Նկար 25-ում պատկերված է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի մի մասը: Ֆունկցիայի որոշման տիրույթը [–5; 5] միջակայքն է: Կառուցե՛ք այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ գիտենալով, որ այն.
ա) զույգ ֆունկցիա է, բ) կենտ ֆունկցիա է:



Նկ. 25

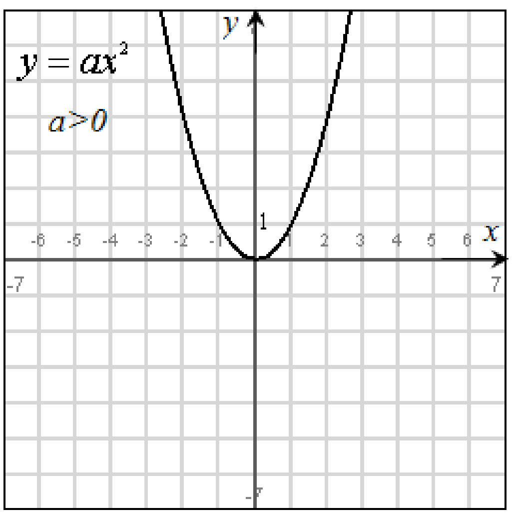
§5. Քառակուսային ֆունկցիա

Սահմանում: $y = ax^2 + bx + c$ բանաձևով տրված ֆունկցիան, որտեղ x-ը անկախ փոփոխական է, իսկ a-ն, b-ն և c-ն ինչ-որ հաստատուններ, ընդ որում $a \neq 0$, անվանում են ***քառակուսային ֆունկցիա:***

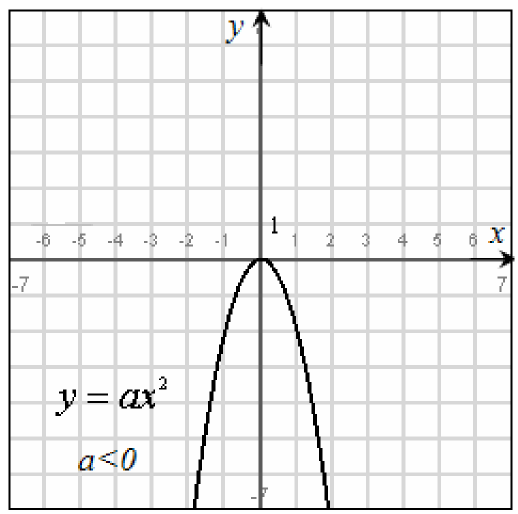
Քառակուսային ֆունկցիայի ուսումնասիրությունը սկսենք $b = c = 0$ մասնավոր դեպքից, այսինքն $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ ֆունկցիայի ուսումնասիրությունից:

Պարզ է, որ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ $D(y) = (-\infty; +\infty)$:

Եթե $x = 0$, ապա $y = ax^2 = 0$, այսինքն ֆունկցիայի գրաֆիկն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով: Եթե $x \neq 0$, ապա ֆունկցիան ընդունում է դրական արժեքներ, երբ $a > 0$, և բացասական արժեքներ, երբ $a < 0$: Քանի որ ցանկացած x-ի համար $y(-x) = y(x) = ax^2$, ապա $y = ax^2$ ֆունկցիան զույգ է և նրա գրաֆիկը համաչափ է y-ների առանցքի նկատմամբ (նկ. 26):



ա)



բ)

Նկ. 26

$y = ax^2$ $(a \neq 0)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն անվանում են ***պարաբոլ:*** Պարաբոլի և նրա համաչափության առանցքի հատման կետն անվանում են ***պարաբոլի գագաթ:***

Թվարկենք $y = ax^2$ ֆունկցիայի հատկությունները, երբ $a > 0$:

1. ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ $D(y) = (-\infty; +\infty)$,
2. ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը՝ $E(y) = [0; +\infty)$,
3. ֆունկցիան ունի մեկ զրո՝ $x = 0$-ն,

4. ֆունկցիան զույգ է,
5. ֆունկցիան նվազում է $(-\infty;0]$ միջակայքում և աճում է $[0;+\infty)$ միջակայքում,
6. ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը հավասար է զրոյի, որն ընդունում է $x=0$ կետում, իսկ մեծագույն արժեք չունի:

Այժմ թվարկենք $y=ax^2$ ֆունկցիայի հատկությունները, երբ $a<0$:

1. ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ $D(y)=(-\infty;+\infty)$,
2. ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը՝ $E(y)=(-\infty;0]$,
3. ֆունկցիան ունի մեկ զրո՝ $x=0$-ն,
4. ֆունկցիան զույգ է,
5. ֆունկցիան աճում է $(-\infty;0]$ միջակայքում և նվազում է $[0;+\infty)$,
6. ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը հավասար է զրոյի, որն ընդունում է $x=0$ կետում, իսկ փոքրագույն արժեք չունի:

Անցնենք ընդհանուր դեպքին՝ $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$: Դրա համար աջ մասում անջատենք լրիվ քառակուսի.

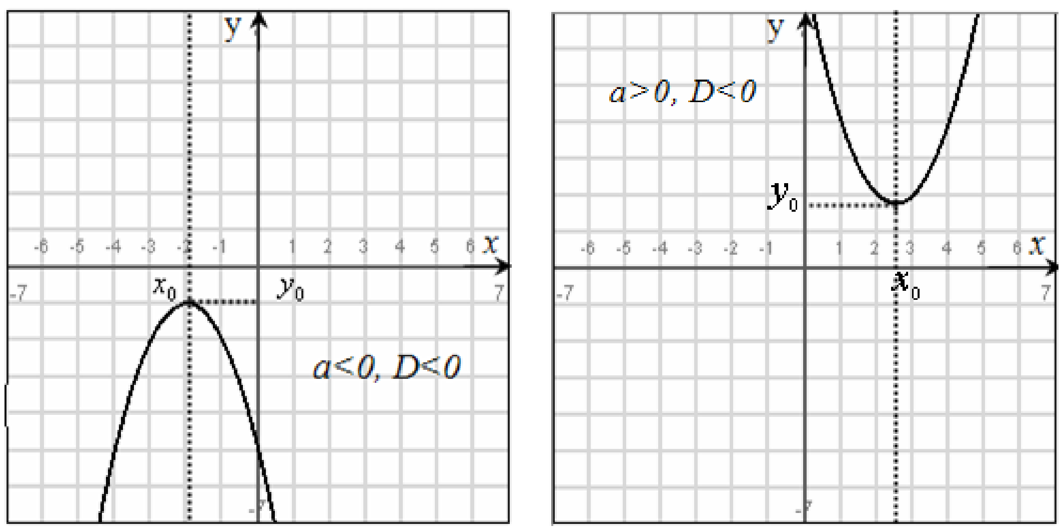
$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=a(x-x_0)^2+y_0,$$

որտեղ $x_0=-\dfrac{b}{2a}$, $y_0=-\dfrac{D}{4a}$:

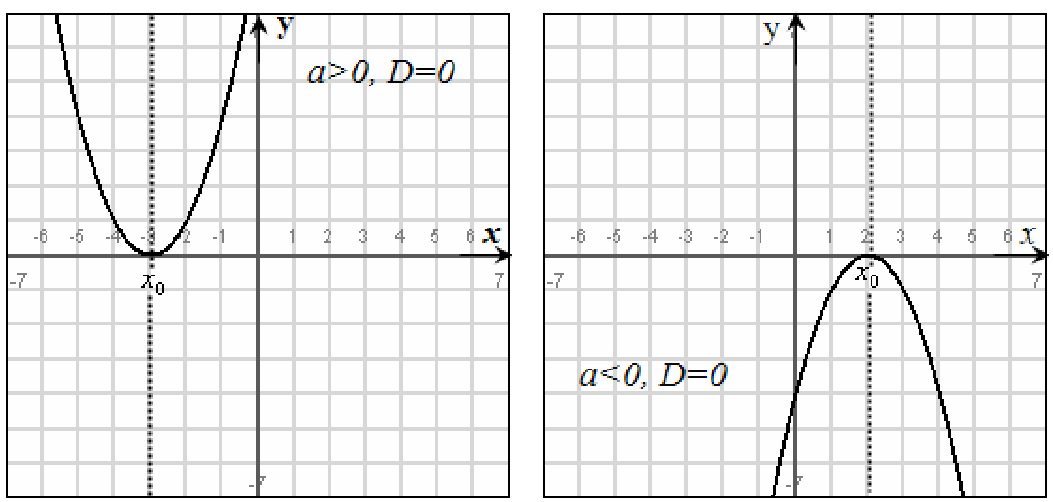
Քանի որ $y=f(x-x_0)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից այն x-երի առանցքով x_0-ով տեղաշարժելով, իսկ $y=f(x)+y_0$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից այն y-ների առանցքով y_0-ով տեղաշարժելով (տես էջ 41), ապա ընդհանուր դեպքում քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկը կստացվի $y=ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկից այնպիսի զուգահեռ տեղափոխությամբ, որի դեպքում $y=ax^2$ պարաբոլի գագաթը (0;0) կետից կտեղափոխվի $(x_0;y_0)$ կետը: Ուրեմն քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկը պարաբոլ է,

1. որը համաչափ է y-ների առանցքին զուգահեռ $x=x_0$ ուղղի նկատմամբ,
2. որի գագաթը $(x_0;y_0)$ կետն է,
3. որը հատում է y-ների առանցքը $(0;\ c)$ կետում,

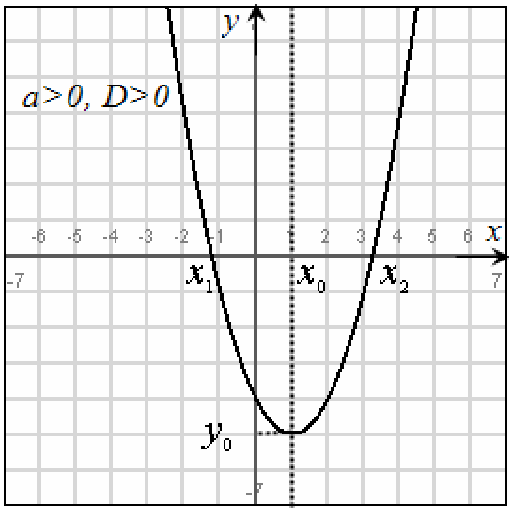
4. որի ճյուղերն ուղղված են վեր, եթե $a>0$, և ուղղված են ներքև, եթե $a<0$,
5. որը չի հատում x-երի առանցքը, եթե $D<0$ (նկ. 27),
6. որը շոշափում է x-երի առանցքը $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ կետում, եթե $D=0$ (նկ. 28),
7. որը հատում է x-երի առանցքը $ax^2+bx+c=0$ հավասարման արմատներ հանդիսացող x_1 և x_2 կետերում, եթե $D>0$ (նկ.29)։

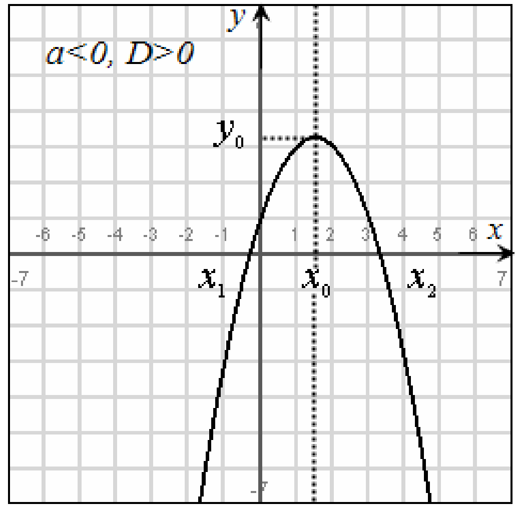


Նկ.27



Նկ. 28





Նկ. 29

Եթե $a > 0$, ապա քառակուսային ֆունկցիան չունի մեծագույն արժեք, իսկ փոքրագույն արժեքը հավասար է y_0-ի: Ուրեմն $E(y) = [y_0; +\infty)$:

Եթե $a < 0$, ապա քառակուսային ֆունկցիան չունի փոքրագույն արժեք, իսկ մեծագույն արժեքը հավասար է y_0-ի: Հետևաբար $E(y) = (-\infty; y_0]$:

Առաջադրանքներ

47. Քառակուսային ֆունկցիան տրված է $y = \frac{1}{4}x^2$ բանաձևով: Գտե՛ք.

ա) y-ի արժեքը, եթե x =–2,5; –1,5; 3,

բ) x-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում y =5; 3; 2:

48. Քառակուսային ֆունկցիան տրված է $y = 2x^2$ բանաձևով: Գտե՛ք.

ա) y-ի արժեքը, եթե x =–1,5; 0,5; 1,5,

բ) x-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում y =2; –3; 0:

49. Սխեմատիկորեն ցույց տվե՛ք, թե կոորդինատային հարթությունում ինչպես է դասավորված ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y = -3x^2$,   բ) $y = 0{,}8x^2$:

50. Հատվո՞ւմ են արդյոք $y = x^2 - 2x + 3$ պարաբոլն ու հետևյալ ուղիղը.

ա) $y = 2x - 8$,   բ) $y = -4$,   գ) $y = 3x - 3$:

Եթե հատվում են, ապա գտե՛ք հատման կետերի կոորդինատները:

51. $y=2x^2-7x+1$ ֆունկցիայի գրաֆիկին պատկանո՞ւմ է արդյոք հետևյալ կետը.
ա) M(2; –5), բ) N(–3; 10) գ) P(–1;10):

52. $y=x^2$ պարաբոլի ձևանմուշի օգնությամբ կառուցե՛ք տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը.
ա) $y=x^2-4$, դ) $y=-(x-3)^2+5$,
բ) $y=(x-5)^2$, ե) $y=(x-2)^2+1$,
գ) $y=-x^2+3$, զ) $y=(x+3)^2-2$:

53. Կառուցե՛ք ֆունկցիայի գրաֆիկը և նկարագրեցե՛ք ֆունկցիայի հատկությունները.
ա) $y=x^2+2x-15$, դ) $y=6x-2x^2$,
բ) $y=0{,}5x^2-3x+4$, ե) $y=(2x-1)(x+1)$,
գ) $y=4-0{,}5x^2$, զ) $y=(2-x)(x+6)$:

54. Գտե՛ք ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը.
ա) $y=3x^2-0{,}5x+\frac{1}{16}$, գ) $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-5{,}5$,
բ) $y=2x^2+1{,}2x+2$, դ) $y=-3x^2-2x-4\frac{2}{3}$:

55. b-ի և c-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $y=x^2+bx+c$ պարաբոլի գագաթը (6; –12) կետն է:

56. a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $y=ax^2-16x+1$ պարաբոլի համաչափության առանցքը $x=4$ ուղիղն է:

57. c-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $y=x^2-6x+c$ ֆունկցիայի գրաֆիկը գտնվում է հետևյալ ուղղից վեր.
ա) $y=4$, բ) $y=-1$:

58. Բանաձևով ներկայացրե՛ք որևէ քառակուսային ֆունկցիա, որը.
ա) $(-\infty;-3]$ միջակայքում նվազի, իսկ $[-3;+\infty)$ միջակայքում աճի,
բ) $(-\infty;6]$ միջակայքում աճի, իսկ $[6;+\infty)$ միջակայքում նվազի:

59. Ֆունկցիան տրված է $y=x^2+px+q$ բանաձևով: Գտե՛ք p-ի և q-ի արժեքները, եթե հայտնի է, որ.
ա) ֆունկցիայի զրոներն են 3 և 4 թվերը,

բ) ֆունկցիայի գրաֆիկը կոորդինատների առանցքները հատում է (0; 6) և (2; 0) կետերում:

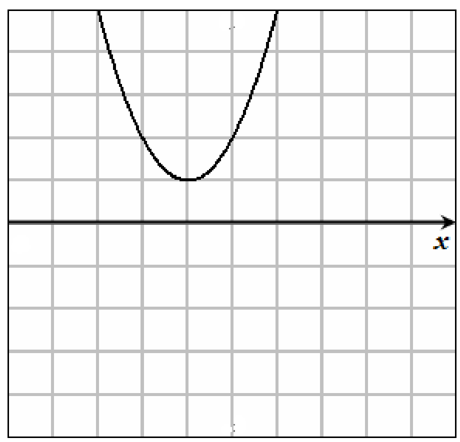
§6. Քառակուսի անհավասարումներ

Քառակուսի անհավասարումներ լուծելու համար բավական է պատկերել $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կարևորելով ֆունկցիայի զրոները (համապատասխան քառակուսի հավասարման արմատները) և պարաբոլի ճյուղերի ուղղությունը:

Արմատների քանակից և ճյուղերի դասավորությունից կախված առանձնացնենք վեց դեպք.

1) $a > 0$, $D < 0$:

Այս դեպքում պարաբոլի ճյուղերը ուղղված են վեր, և այն չի հատում x-երի առանցքը (նկ. 30):

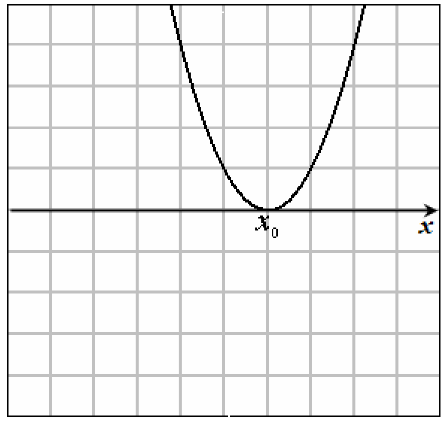


Նկ. 30

Հետևաբար $ax^2 + bx + c > 0$ և $ax^2 + bx + c \geq 0$ անհավասարումների լուծումն է $x \in (-\infty; +\infty)$, իսկ $ax^2 + bx + c < 0$ և $ax^2 + bx + c \leq 0$ անհավասարումները լուծում չունեն՝ $x \in \varnothing$:

2) $a > 0$, $D = 0$:

Այս դեպքում պարաբոլի ճյուղերը ուղղված են վեր, և այն x-երի առանցքի հետ ունի մեկ ընդհանուր կետ (նկ. 31):



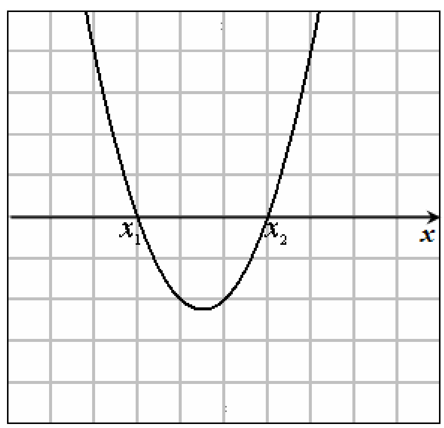
Նկ. 31

Հետևաբար

$$ax^2+bx+c>0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(-\infty;x_0)\cup(x_0;+\infty),$$
$$ax^2+bx+c\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(-\infty;+\infty),$$
$$ax^2+bx+c<0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in\varnothing,$$
$$ax^2+bx+c\leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x=x_0:$$

3) $a>0,\ D>0$:

Այս դեպքում պարաբոլի ճյուղերը նորից ուղղված են վեր, և այն x-երի առանցքը հատում է x_1 և x_2 կետերում (նկ. 32):



Նկ. 32

Հետևաբար

$$ax^2+bx+c>0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty),$$
$$ax^2+bx+c\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty),$$
$$ax^2+bx+c<0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(x_1;x_2),$$
$$ax^2+bx+c\leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in[x_1;x_2]:$$

4) $a<0,\ D<0$:

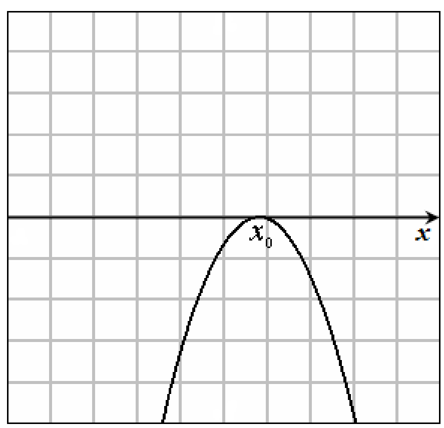
Այս դեպքում պարաբոլի ճյուղերը ուղղված են ներքև, և այն չի հատում x-երի առանցքը (նկ. 33):

Նկ. 33

Հետևաբար $ax^2+bx+c>0$ և $ax^2+bx+c\ge 0$ անհավասարումները լուծում չունեն՝ $x\in\varnothing$, իսկ $ax^2+bx+c<0$ և $ax^2+bx+c\le 0$ անհավասարումների լուծումն է $x\in(-\infty;+\infty)$:

5) $a<0,\ D=0$:

Այս դեպքում պարաբոլի ճյուղերը ուղղված են ներքև, և այն x-երի առանցքի հետ ունի մեկ ընդհանուր կետ (նկ. 34):



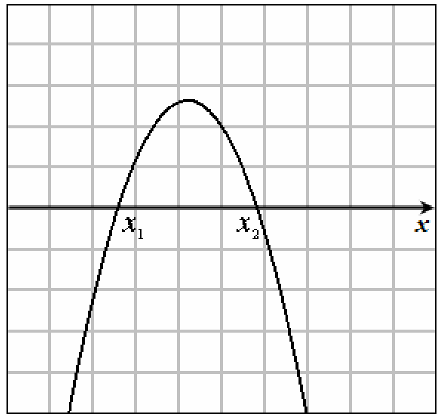
Նկ. 34

Հետևաբար

$$ax^2+bx+c>0 \iff x\in\varnothing,$$
$$ax^2+bx+c\ge 0 \iff x=x_0,$$
$$ax^2+bx+c<0 \iff x\in(-\infty;x_0)\cup(x_0;+\infty),$$
$$ax^2+bx+c\le 0 \iff x\in(-\infty;+\infty):$$

6) $a<0,\ D>0$:

Այս դեպքում պարաբոլի ճյուղերը նորից ուղղված են ներքև, և այն x-երի առանցքը հատում է x_1 և x_2 կետերում (նկ. 35):



Նկ. 35

Հետևաբար

$$ax^2+bx+c>0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(x_1;x_2),$$
$$ax^2+bx+c\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in[x_1;x_2],$$
$$ax^2+bx+c<0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty),$$
$$ax^2+bx+c\leq 0 \quad \Leftrightarrow x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty):$$

Դիտողություն: Կարելի էր բավարարվել առաջին երեք դեպքով, քանի որ եթե $a<0$**,** ապա բազմապատկելով անհավասարման երկու կողմերը -1-ով և փոխելով անհավասարման նշանը, կունենանք տրվածին համարժեք քառակուսի անհավասարում, որում x^2-ու գործակիցը դրական է:

Առաջադրանքներ

60. Լուծեցե՛ք անհավասարումը.

ա) $x^2<16$,
բ) $x^2\geq 3$,
գ) $0{,}2x^2>18$,
դ) $x^2>0$,
ե) $x^2\leq 0$,
զ) $-0{,}5x^2\leq x$,
է) $3x^2<-2x$,
ը) $7x<x^2$:

61. Լուծեցե՛ք անհավասարումը.

ա) $x^2+2x-48<0$,
բ) $2x^2-7x+6>0$,
գ) $-x^2+2x+15<0$,
դ) $-5x^2+11x-6>0$,
ե) $4x^2-12x+9>0$,
զ) $25x^2+30x+9<0$,
է) $-10x^2+9x>0$,
ը) $-2x^2+7x<0$:

62. Լուծեցե՛ք անհավասարումը.

ա) $2x^2+3x-5\geq 0$, ե) $6x^2-13x+5\leq 0$,

բ) $-6x^2+6x+36\geq 0$, զ) $-2x^2-5x-18\leq 0$,

գ) $2x^2+13x-7>0$, է) $3x^2-2x>0$,

դ) $-9x^2+12x-4<0$, ը) $8-x^2<0$:

63. Գտե՛ք ֆունկցիայի որոշման տիրույթը.

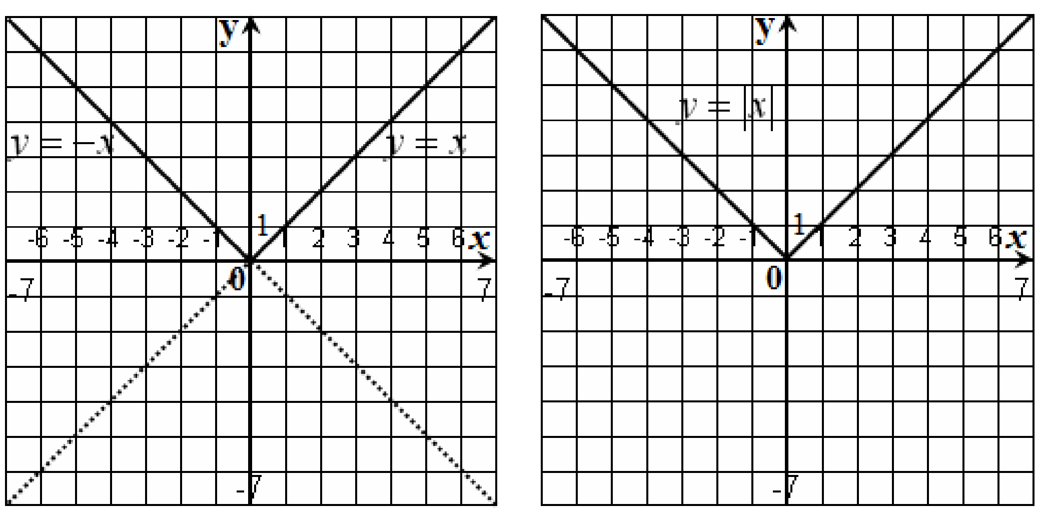
ա) $y=\sqrt{-4x^2+20x-25}$, գ) $y=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+7x-13}}$,

բ) $y=\sqrt{x^2-5x+6}$, դ) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-12x+18}}$:

§7. $y=|x|$, $y=x^3$ և $y=\dfrac{k}{x}$ ֆունկցիաները

1. $y=|x|$ **ֆունկցիան**

Քանի որ $|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$, ապա ոչ բացասական x-երի համար $y=|x|$ ֆունկցիան համընկնում է $y=x$ ֆունկցիայի, իսկ բացասական x-երի համար՝ $y=-x$ ֆունկցիայի հետ (նկ.36 ա)): Հետևաբար նրա գրաֆիկը ունի նկար 36 բ)-ում ներկայացված տեսքը:



ա) բ)

Նկ. 36

Քանի որ ցանկացած x-ի համար $y(-x)=|-x|=|x|=y(x)$, ապա $y=|x|$ ֆունկցիան զույգ է և նրա գրաֆիկը համաչափ է y-ների առանցքի նկատմամբ:

Թվարկենք $y=|x|$ ֆունկցիայի հատկությունները:

1. ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ $D(y)=(-\infty;+\infty)$,
2. ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը՝ $E(y)=[0;+\infty)$,
3. ֆունկցիան ունի մեկ զրո՝ $x=0$-ն,
4. ֆունկցիան զույգ է,
5. ֆունկցիան նվազում է $(-\infty;0]$ միջակայքում և աճում է $[0;+\infty)$ միջակայքում,
6. ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը հավասար է զրոյի, որն ընդունում է $x=0$ կետում, իսկ մեծագույն արժեք չունի:

2. $y=x^3$ ֆունկցիան

Քանի որ x^3 արտահայտությունը իմաստ ունի x-ի ցանկացած արժեքի համար, ապա ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ $D(y)=(-\infty;+\infty)$: Եթե $x=0$, ապա $y=0$, այսինքն ֆունկցիայի գրաֆիկն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով: Ֆունկցիան ընդունում է դրական արժեքներ, եթե $x>0$ և բացասական արժեքներ, եթե $x<0$: Քանի որ ցանկացած x-ի համար $y(-x)=-x^3=-y(x)$, ապա $y=x^3$ ֆունկցիան կենտ է և նրա գրաֆիկը համաչափ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:

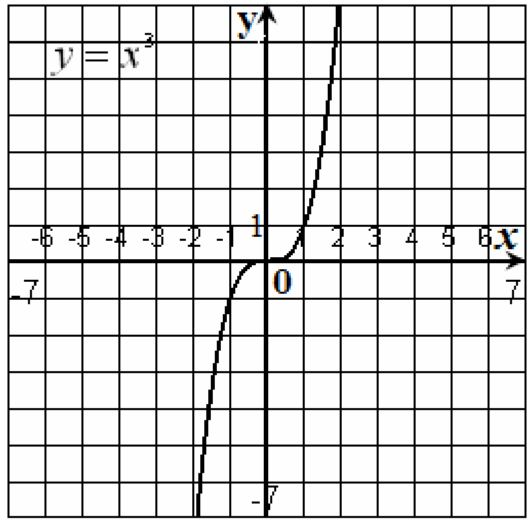
Ապացուցենք, որ $y=x^3$ ֆունկցիան աճող է:

Ենթադրենք x_1-ը և x_2-ը կամայական երկու թվեր են, ընդ որում $x_1>x_2$: Ցույց տանք, որ $x_1^3>x_2^3$:

Եթե $x_1>0$, իսկ $x_2<0$, ապա $x_1^3>0$, իսկ $x_2^3<0$: Հետևաբար $x_1^3>x_2^3$:

Իսկ եթե x_1-ը և x_2-ը ունեն նույն նշանը, ապա $x_1\cdot x_2>0$, իսկ $x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$: Հետևաբար նորից կունենանք $x_1^3>x_2^3$:

$y=x^3$ ֆունկցիայի գրաֆիկն անվանում են **խորանարդային պարաբոլ:** Այն ունի նկար 37-ում ներկայացված տեսքը:



Նկ. 37

3. $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ **հակադարձ համեմատականության ֆունկցիան**

Քանի որ $\frac{k}{x}$ արտահայտությունը իմաստ չունի միայն $x = 0$ կետում, ապա ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$:

Երբ $k > 0$, ֆունկցիան ընդունում է դրական արժեքներ, եթե $x > 0$ և բացասական արժեքներ, եթե $x < 0$:

Երբ $k < 0$, ֆունկցիան ընդունում է դրական արժեքներ, եթե $x < 0$ և բացասական արժեքներ, եթե $x > 0$:

Քանի որ $\frac{k}{x} = b$ $(k \neq 0)$ հավասարումը լուծում չունի միայն $b = 0$ դեպքում, ապա ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը՝ $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$:

Քանի որ զրոյից տարբեր ցանկացած x-ի համար $y(-x) = -\frac{k}{x} = -y(x)$, ապա $y = \frac{k}{x}$ ֆունկցիան կենտ է և նրա գրաֆիկը համաչափ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:

Պարզենք $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ ֆունկցիայի մոնոտոնության հարցը:

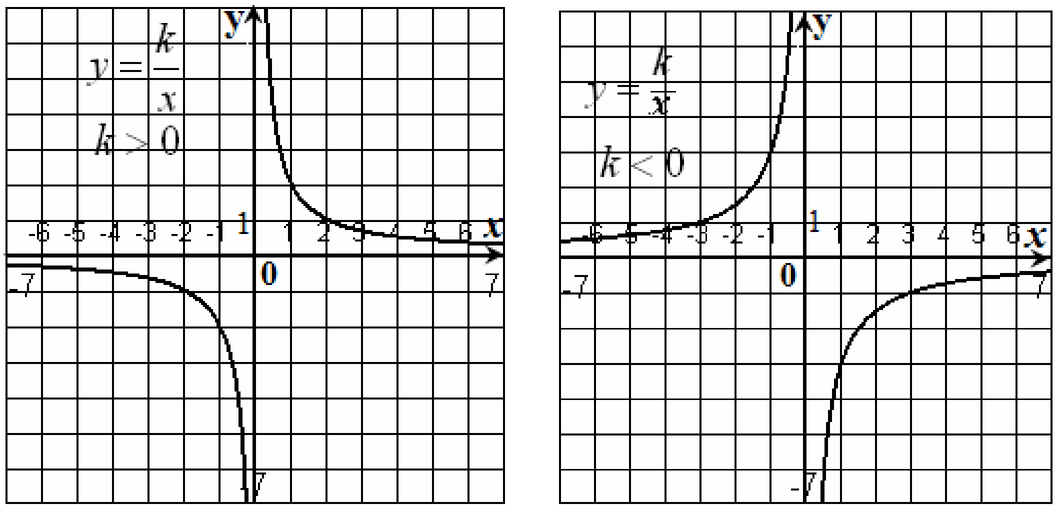
Ենթադրենք x_1-ը և x_2-ը կամայական բացասական թվեր են, ընդ որում $x_1 > x_2$: Այդ դեպքում $x_1 \cdot x_2 > 0$, $x_2 - x_1 < 0$: Հետևաբար

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{k}{x_1}-\frac{k}{x_2}=\frac{k(x_2-x_1)}{x_1x_2}<0, \quad \text{երբ} \quad k>0 \quad \text{և} \quad f(x_1)-f(x_2)=$$

$$=\frac{k}{x_1}-\frac{k}{x_2}=\frac{k(x_2-x_1)}{x_1x_2}>0, \text{ երբ } \ k<0:$$

Այսպիսով, $(-\infty;0)$ և $(0;+\infty)$ միջակայքերում $y=\dfrac{k}{x}$ ֆունկցիան նվազում է, երբ $k>0$ և աճում է, երբ $k<0$:

Հակադարձ համեմատականության ֆունկցիայի գրաֆիկն անվանում են **հիպերբոլ:** Այն ունի նկար 38-ում ներկայացված տեսքը:



ա) բ)

Նկ. 38

Առաջադրանքներ

64. $y=|x|$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթին պատկանո՞ւմ են արդյոք հետևյալ թվերը.

ա) 5, բ) –4, գ) 0, դ) –10:

65. Պատկանո՞ւմ են արդյոք հետևյալ թվերը $y=|x|$ ֆունկցիայի արժեքների բազմությանը.

ա) 3, բ) –2,6, գ) 0, դ) –13:

66. Հետևյալ միջակայքերից որոնցո՞ւմ է $y=|x|$ ֆունկցիան մոնոտոն.

ա) [–5; –2], բ) (–1; 4], գ) [0; 7), դ) (3,1; 9):

67. $y = a$ ուղիղը քանի՞ կետում է հատում $y = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե.

ա) $a = 2{,}3$, բ) $a = -3$, գ) $a = 0$, դ) $a = 52$:

68. Ճի՞շտ է արդյոք, որ $y = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է.

ա) y-ների առանցքի նկատմամբ,

բ) x-երի առանցքի նկատմամբ,

գ) կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:

69. Պատկանո՞ւմ են արդյոք հետևյալ թվերը $y = x^3$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթին.

ա) 6, բ) –8, գ) 0, դ) –1,3:

70. Պատկանո՞ւմ են արդյոք հետևյալ թվերը $y = x^3$ ֆունկցիայի արժեքների բազմությանը.

ա) 8, բ) –8, գ) 0, դ) 27:

71. Ճի՞շտ է արդյոք, որ $y = x^3$ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է.

ա) x-երի առանցքի նկատմամբ,

բ) կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ,

գ) y-ների առանցքի նկատմամբ:

72. Պատկանո՞ւմ են արդյոք հետևյալ թվերը $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթին.

ա) 9,5, բ) –2,7, գ) 0:

73. Պատկանո՞ւմ են արդյոք հետևյալ թվերը $y = \frac{-1}{x}$ ֆունկցիայի արժեքների բազմությանը.

ա) 5, բ) $\frac{1}{2}$, գ) 0, դ) 7:

74. Ճի՞շտ է արդյոք, որ $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է.

ա) y-ների առանցքի նկատմամբ,

բ) կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ,

գ) x-երի առանցքի նկատմամբ:

75. k-ի ո՞ր արժեքների դեպքում $y = \frac{k}{x}$ ֆունկցիան կլինի.

ա) աճող, բ) նվազող:

§8. Գործողություններ ֆունկցիաների հետ

Սահմանում: Տրված $y=f(x)$ և $y=g(x)$ ֆունկցիաների գումար (տարբերություն) անվանում են այն $F(x)$ ֆունկցիան, որը որոշված է $D(F)=D(f)\cap D(g)$ բազմության վրա և $F(x)=f(x)+g(x)$ ($F(x)=f(x)-g(x)$):

Սահմանում: Տրված $y=f(x)$ և $y=g(x)$ ֆունկցիաների արտադրյալ անվանում են այն $F(x)$ ֆունկցիան, որը որոշված է $D(F)=D(f)\cap D(g)$ բազմության վրա և $F(x)=f(x)\cdot g(x)$:

Սահմանում: Տրված $y=f(x)$ և $y=g(x)$ ֆունկցիաների քանորդ անվանում են այն $F(x)$ ֆունկցիան, որը որոշված է $D(f)\cap\{D(g):g(x)\neq 0\}$ բազմության վրա և $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$:

Սահմանում: Տրված $y=f(x)$ և $y=g(x)$ ֆունկցիաների համադրույթ (կոմպոզիցիա) անվանում են այն $F(x)$ ֆունկցիան, որը որոշված է այն x-երի բազմության վրա $D(g)$-ից, որ $g(x)\in D(f)$ և $F(x)=f(g(x))$:

Այս դեպքում ասում են, որ F-ը բարդ ֆունկցիա է:

Այն որ $F(x)$-ը $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների համադրույթն է գրվում է նաև այսպես. $F(x)=f\circ g$: $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները կարող են համադրվել նաև այլ կերպ` $g\circ f$:

Եթե $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները տրված են արտահայտություններով, ապա $f\circ g$ համադրույթի արտահայտությունը ստանալու համար պետք է $f(x)$ ֆունկցիայի արտահայտության մեջ x-ի փոխարեն տեղադրել $g(x)$-ի արտահայտությունը:

Ֆունկցիաների գումարի, տարբերության արտադրյալի, քանորդի կամ համադրույթի որոշման տիրույթը գտնելու համար պետք է գրել համապատասխան բանաձևը, առանց ձևափոխություններ կատարելու գտնել ստացված արտահայտության ԹԱԲ-ը, ապա նոր միայն կատարել հնարավոր ձևափոխությունները:

Օրինակ 1. Գտնենք $f(x)=(x+3)^2$ և $g(x)=\dfrac{2}{x+3}$ ֆունկցիաների արտադրյալի որոշման տիրույթն ու արտահայտությունը:

Կունենանք $F(x)=f(x)\cdot g(x)=(x+3)^2\dfrac{2}{x+3}$: Ուրեմն $D(F)=(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$: Ձևափոխելով գրված արտահայտությունը՝ կունենանք $F(x)=2x+6$:

Օրինակ 2. Գտնենք $f(x)=(x+1)^2$ և $g(x)=\dfrac{1}{x+2}$ ֆունկցիաների $f(g(x))$ և $g(f(x))$ համադրույթների որոշման տիրույթերն ու արտահայտությունները:

Ունենք $f(g(x))=\left(\dfrac{1}{x+2}+1\right)^2$: Ուրեմն $D(f(g(x)))=$ $=(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$: Ձևափոխելով գրված արտահայտությունը՝ կունենանք $f(g(x))=\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^2$:

Իսկ $g(f(x))=\dfrac{1}{(x+1)^2+2}$: Ուրեմն $D(g(f(x)))=(-\infty;+\infty)$: Ձևափոխելով գրված արտահայտությունը՝ կունենանք $g(f(x))=\dfrac{1}{x^2+2x+3}$:

Թեորեմ: Աճող (նվազող) ֆունկցիաների գումարը աճող (նվազող) ֆունկցիա է, եթե նրա որոշման տիրույթը պարունակում է գոնե երկու թիվ:

Ապացուցում: Ենթադրենք $F(x)=f(x)+g(x)$, որտեղ $f(x)$-ը և $g(x)$-ը աճող ֆունկցիաներ են:

Եթե x_1-ը և x_2-ը ($x_1>x_2$) կամայական երկու թվեր են $D(F)$-ից, ապա $f(x)$-ը և $g(x)$-ը որոշված են այդ կետերում, իսկ

$$F(x_1)-F(x_2)=f(x_1)+g(x_1)-(f(x_2)+g(x_2))=$$
$$=[f(x_1)-f(x_2)]+[g(x_1)-g(x_2)]:$$

Քանի որ $x_1>x_2$, իսկ $f(x)$-ը և $g(x)$-ը աճող ֆունկցիաներ են, ապա $[f(x_1)-f(x_2)]>0$, $[g(x_1)-g(x_2)]>0$: Ուրեմն $F(x_1)-F(x_2)>0$, կամ որ նույնն է $F(x_1)>F(x_2)$:

Նույն կերպ կարելի է ապացուցել համապատասխան թեորեմը նվազող ֆունկցիաների համար:

Թեորեմ: Աճող (նվազող) ֆունկցիաների համադրույթը աճող (նվազող) ֆունկցիա է, եթե նրա որոշման տիրույթը պարունակում է գոնե երկու թիվ:

Ապացույց: Ենթադրենք $F(x) = f(g(x))$, որտեղ $f(x)$-ը և $g(x)$-ը աճող ֆունկցիաներ են:

Եթե x_1 և x_2 ($x_1 > x_2$) կամայական երկու թվեր են $D(F)$-ից, ապա $g(x)$ ֆունկցիան որոշված է այդ թվերի համար, իսկ $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $g(x_1)$ և $g(x_2)$ թվեր համար: Ցույց տանք, որ $f(g(x_1)) > f(g(x_2))$:

Քանի որ $x_1 > x_2$, իսկ $g(x)$-ը աճող ֆունկցիա է, ապա $g(x_1) > g(x_2)$: Քանի որ $g(x_1) > g(x_2)$, իսկ $f(x)$-ը աճող ֆունկցիա է, ապա $f(g(x_1)) > f(g(x_2))$: Ուրեմն $F(x_1) > F(x_2)$:

Նույն կերպ կարելի է ապացուցել համապատասխան թեորեմը նվազող ֆունկցիաների համար:

Առաջադրանքներ

76. Գտե՛ք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների գումար, տարբերություն կամ արտադրյալ հանդիսացող ֆունկցիայի որոշման տիրույթը եթե.

   ա) $D(f) = [-3;2]$, $D(g) = [0;7]$,

   բ) $D(f) = (-1;5]$, $D(g) = (4;6)$,

   գ) $D(f) = [3;8)$, $D(g) = (-2;3]$:

77. $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$: Գտե՛ք $D(F)$-ը, եթե.

   ա) $D(f) = [-4;5]$, $D(g) = [-3;7]$, իսկ $g(x) = 0$ միայն երբ $x = 1$,

   բ) $D(f) = [-2;2]$, $D(g) = [2;4)$, իսկ $g(x) = 0$ երբ $x = 2$:

78. $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = 2x^2 - 3x + 5$, $h(x) = \dfrac{2}{x}$, $\varphi(x) = |x|$ ֆունկցիաների համար գրել $F(x)$ ֆունկցիայի բանաձևը և գտնել որոշման տիրույթը, եթե.

   ա) $F(x) = f(f(x))$, դ) $F(x) = h(f(x))$, է) $F(x) = \varphi(g(x))$,

   բ) $F(x) = h(g(x))$, ե) $F(x) = g(h(x))$, ը) $F(x) = g(\varphi(x))$,

   գ) $F(x) = h(h(x))$, զ) $F(x) = f(g(x))$, թ) $F(x) = f(h(x))$:

79. Տրված ֆունկցիան ներկայացնել երկու ֆունկցիաների համադրույթի տեսքով.

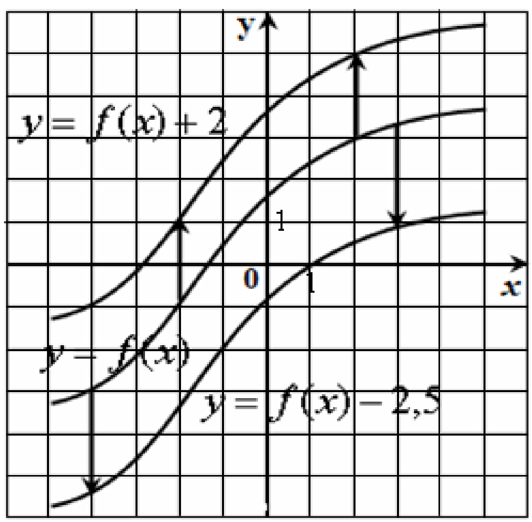
ա) $y=\dfrac{4}{x+2}$, գ) $y=2x^3-7$, ե) $y=(x+3)^3$,

բ) $y=(x-1)^2-2$, դ) $y=|7x+2|$, զ) $y=5|x|-4$:

§9. Ֆունկցիայի գրաֆիկի ձևափոխություններ

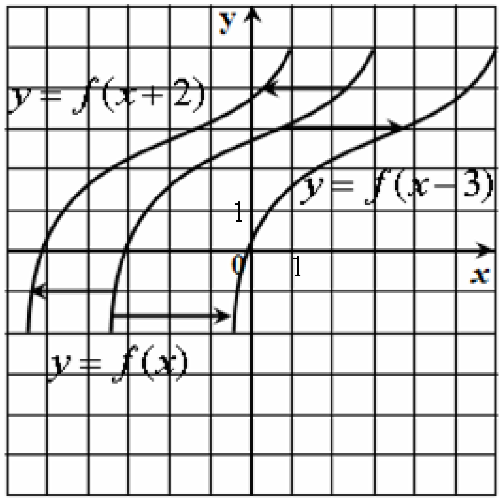
Եթե հայտնի է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, ապա ինչ-որ ձևափոխությունների օգնությամբ կարելի է կառուցել առավել բարդ ֆունկցաների գրաֆիկներ:

1. $y=f(x)+a$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը y-ների առանցքի ուղղությամբ a-ով տեղաշարժել:



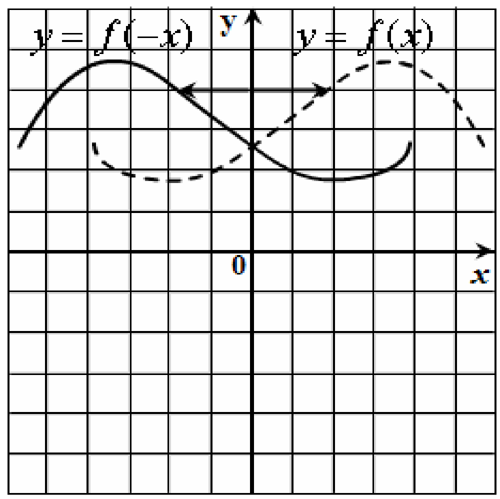
Նկ. 39

2. $y=f(x+b)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը x-երի առանցքի ուղղությամբ $-b$-ով տեղաշարժել:



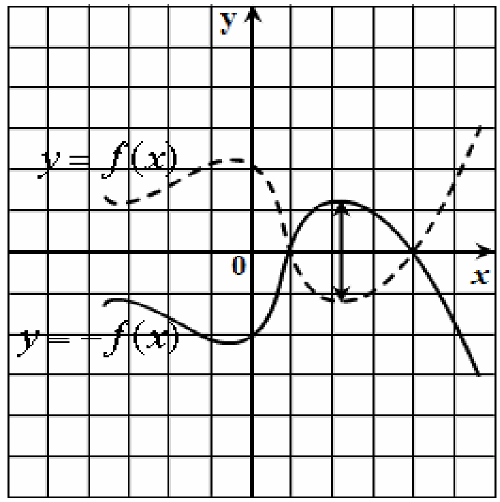
Նկ. 40

3. $y=f(-x)$ և $y=f(x)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները համաչափ են y-ների առանցքի նկատմամբ:



Նկ. 41

4. $y=-f(x)$ և $y=f(x)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները համաչափ են x-երի առանցքի նկատմամբ:

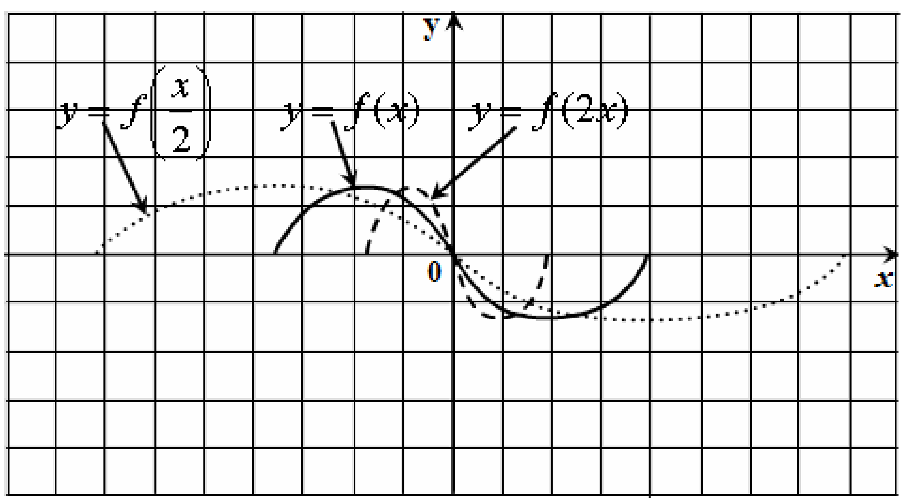


Նկ. 42

5. *y=f(kx)* ֆունկցիայի գրաֆիկը, կառուցելու համար անհրաժեշտ է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

x-երի առանցքի երկայնքով դեպի *y*-ների առանցքը *k* անգամ «սեղմել», եթե *k>1*

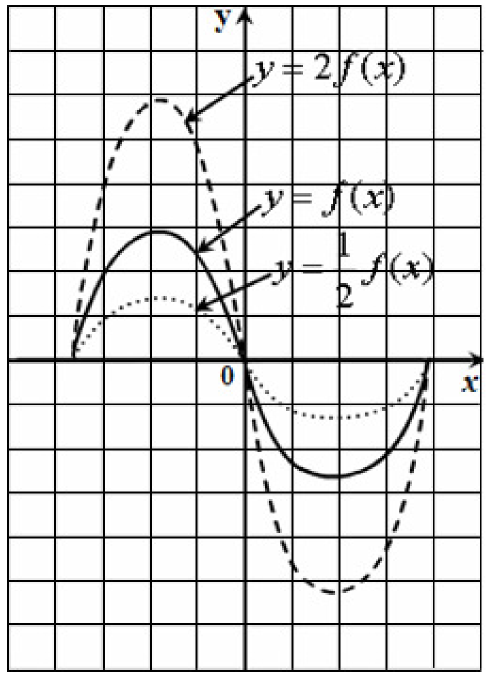
և $\frac{1}{k}$ անգամ «ձգել», հեռացնելով *y*-ների առանցքից, եթե *0<k<1*:



Նկ. 43

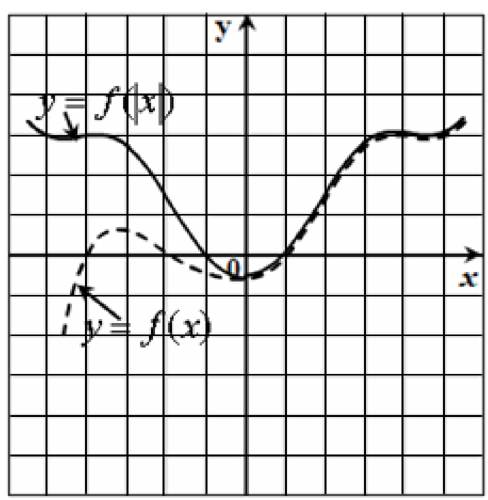
6. *y=Af(x)* ֆունկցիայի գրաֆիկը, կառուցելու համար անհրաժեշտ է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

y-ների առանցքի երկայնքով *A* անգամ «ձգել», հեռացնելով *x*-երի առանցքից, եթե *A>1* և $\frac{1}{A}$ անգամ «սեղմել» դեպի x-երի առանցքը, եթե $0<A<1$:



Նկ. 44

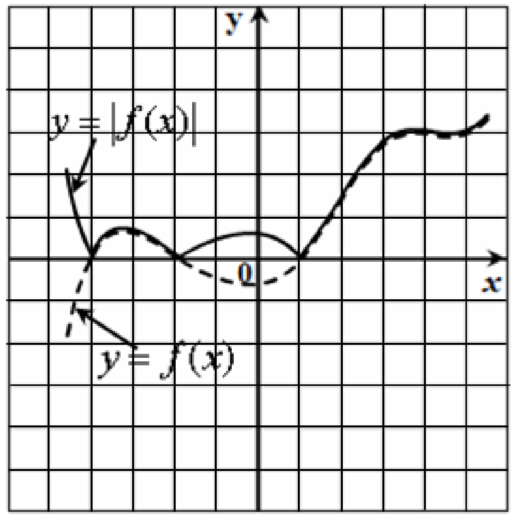
7. $y = f(|x|)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, կառուցելու համար պետք է ոչ բացասական x-երի համար կառուցել $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, իսկ բացասական x-երին համապատասխանող մասը ստանալ նրանից՝ y-ների առանցքի նկատմամբ նրա համաչափը կառուցելով:



Նկ. 45

8. $y = |f(x)|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, կառուցելու համար պետք է վերցնել $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի այն մասը, որը գտնվում է

x-երի առանցքի վրա և նրանից վեր, իսկ x-երի առանցքից ներքև գտնվող մասը y-ների առանցքի նկատմամբ համաչափ արտապատկերել:



Նկ. 46

Առաջադրանքներ

80. Ձևափոխելով $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կառուցե՛ք հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.
ա) $y = |2x^2 - x + 3|$, գ) $y = |x^2 - 6x - 7|$, ե) $y = x^2 - 5|x| + 6$,
բ) $y = x^2 + 4|x| + 12$, դ) $y = |2x - x^2 + 8|$, զ) $y = -x^2 + 7|x| - 10$:

81. Ձևափոխելով $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կառուցե՛ք հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.
ա) $y = -\frac{1}{x}$, գ) $y = \frac{1}{x-1}$, ե) $y = \frac{4x+3}{x-1}$, է) $y = \frac{1}{|x|}$, թ) $y = -\frac{1}{|x|}$,
բ) $y = \frac{5}{x}$, դ) $y = \frac{2}{x+3}$, զ) $y = \frac{x+4}{3-x}$, ը) $y = \left|\frac{x}{x-1}\right|$, ժ) $y = \frac{|x|+2}{3-|x|}$:

82. Ձևափոխելով $y = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կառուցե՛ք հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.
ա) $y = -|x|$, գ) $y = -3|x|$, ե) $y = |x - 3|$, է) $y = |7x - 3| + 2$,
բ) $y = 2|x|$, դ) $y = |8 - 4x|$, զ) $y = |3x + 1|$, ը) $y = ||x + 2| - 4|$:

83. Հնարավո՞ր է արդյոք վերականգնել $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) ըստ $y=f(-x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի,

բ) ըստ $y=f(|x|)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի,

գ) ըստ $y=3f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի,

դ) ըստ $y=|f(x)|$ ֆունկցիայի գրաֆիկի:

§10. Բնական ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիա

Սահմանում: $y=x^n$ ֆունկցիան, որտեղ n-ը բնական թիվ է, անվանում են ***բնական ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիա:***

$y=x$, $y=x^2$ և $y=x^3$ աստիճանային ֆունկցիաները մենք արդեն ուսումնասիրել ենք: Դրանց հատկությունները և գրաֆիկները ձեզ հայտնի են:

Այժմ աստիճանային ֆունկցիայի հատկություններն ու գրաֆիկի առանձնահատկությունները պարզենք, երբ աստիճանացուցիչը՝ n-ը երեքից մեծ բնական թիվ է:

Քանի որ x^n արտահայտությունը, որտեղ n-ը բնական թիվ է, իմաստ ունի ցանկացած x-ի դեպքում, ապա ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ $D(y)=(-\infty;+\infty)$:

Մնացած հատկությունները ներկայացնելու համար n-ի զույգ և կենտ արժեքները դիտարկենք առանձին:

Սկզբում դիտարկենք այն դեպքը, երբ n-ը զույգ թիվ է:

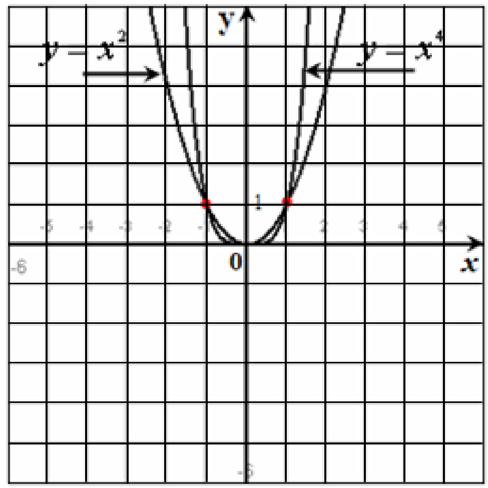
$y=x^n$ ֆունկցիայի հատկությունները զույգ n-ի դեպքում նման են $y=x^2$ ֆունկցիայի հատկություններին.

1. ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ $D(y)=(-\infty;+\infty)$,
2. ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը՝ $E(y)=[0;+\infty)$,
3. ֆունկցիան ունի մեկ զրո՝ $x=0$-ն,
4. ֆունկցիան զույգ է,
5. ֆունկցիան նվազում է $(-\infty;0]$ միջակայքում և աճում է $[0;+\infty)$ միջակայքում,
6. ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը հավասար է զրոյի, որն ընդունում է $x=0$ կետում, իսկ մեծագույն արժեք չունի:

Ապացուցենք 5-րդ հատկությունը:

Ենթադրենք $x_2>x_1\geq 0$: Եթե $x_1=0$, ապա ակնհայտ է, որ $x_2^n>x_1^n$: Իսկ եթե $x_1>0$, ապա անդամ առ անդամ բազմապատկելով

$x_2 > x_1$ անհավասարումները, կստանանք $x_2^n > x_1^n$: Ուրեմն $[0;+\infty)$ միջակայքում ֆունկցիան աճում է:



Նկ. 47

Հիմա ենթադրենք $x_2 < x_1 \le 0$: Այդ դեպքում $-x_2 > -x_1 \ge 0$ և ըստ վերը ապացուցածի՝ $(-x_2)^n > (-x_1)^n$: Հաշվի առնելով, որ n-ը զույգ է, կունենանք $x_2^n > x_1^n$: Ուրեմն $(-\infty;0]$ միջակայքում ֆունկցիան նվազում է:

Քննարկենք n-ի և m-ի իրարից տարբեր զույգ արժեքների դեպքում $y = x^m$ և $y = x^n$ ֆունկցիաների գրաֆիկների փոխդասավորությունը:

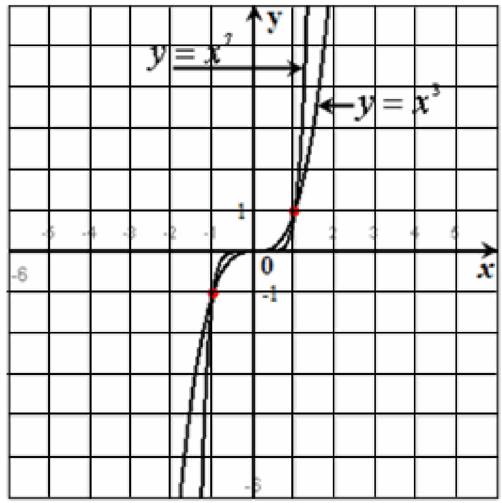
Այդ գրաֆիկները հատվում են (-1;1), (0;0) և (1;1) կոորդինատներ ունեցող կետերում: Եթե $m > n$, ապա $x^m < x^n$, երբ $x \in (0;1)$ և $x^m > x^n$, երբ $x \in (1;+\infty)$: Քանի որ $(-x)^n = x^n$, ապա $x^m < x^n$, երբ $x \in (-1;0)$ և $x^m > x^n$, երբ $x \in (-\infty;-1)$:

Այժմ դիտարկենք $y = x^n$ ֆունկցան, երբ n-ը կենտ է: Այս դեպքում ֆունկցիայի հատկությունները նման են $y = x^3$ ֆունկցիայի հատկություններին.

1. ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ $D(y) = (-\infty;+\infty)$,
2. ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը՝ $E(y) = (-\infty;+\infty)$,
3. ֆունկցիան ունի մեկ զրո՝ $x = 0$-ն,
4. ֆունկցիան կենտ է,
5. ֆունկցիան աճող է:

Ապացուցենք 5-րդ հատկությունը:

$[0;+\infty)$ միջակայքում ֆունկցիայի աճելու ապացույցը նույն է ինչ որ զույգ ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիայի դեպքում:



Նկ. 48

Ապացուցենք, որ ֆունկցիան աճում է $(-\infty;0]$ միջակայքում: Ենթադրենք $x_2 < x_1 \le 0$: Այդ դեպքում $-x_2 > -x_1 \ge 0$, և քանի որ $[0;+\infty)$ միջակայքում ֆունկցիայի աճում է, ապա $(-x_2)^n > (-x_1)^n$: Կենտ n-երի համար վերջինս համարժեք է $-x_2^n > -x_1^n$-ին: Հետևաբար $x_2^n < x_1^n$:

Իսկ եթե $x_2 < 0$, $x_1 > 0$, ապա պարզ է, որ $x_2^n < x_1^n$:
Այսպիսով, ֆունկցիան աճող է:

Քննարկենք n-ի և m-ի իրարից տարբեր կենտ արժեքների դեպքում $y = x^m$ և $y = x^n$ ֆունկցիաների գրաֆիկների փոխդասավորությունը:

Այդ գրաֆիկները հատվում են (-1;-1), (0;0) և (1;1) կոորդինատներ ունեցող կետերում: Եթե $m > n$, ապա $x^m < x^n$, երբ $x \in (0;1)$ և $x^m > x^n$, երբ $x \in (1;+\infty)$: Քանի որ $(-x)^n = -x^n$, ապա $x^m < x^n$, երբ $x \in (-\infty;-1)$ և $x^m > x^n$, երբ $x \in (-1;0)$:

Առաջադրանքներ

84. Ձևափոխելով $y = x^n$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կառուցե՛ք հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.

ա) $y = (x-3)^4$, գ) $y = -3(x+5)^7$, ե) $y = \left|(x-3)^7\right|$,

բ) $y = (|x|-2)^6$, դ) $y = \left|(2x+5)^3 - 1\right|$, զ) $y = \left|-(x-2)^4 + 1\right|$:

85. Ֆունկցիան տրված է $f(x)=x^{56}$ բանաձևով: Համեմատե՛ք.

ա) $f(3{,}7)$ և $f(4{,}2)$, գ) $f(-7)$ և $f(6)$,
բ) $f(-5{,}2)$ և $f(-6{,}5)$, դ) $f(37)$ և $f(-29)$:

86. Ֆունկցիան տրված է $g(x)=x^{67}$ բանաձևով: Համեմատե՛ք.

ա) $g(8{,}9)$ և $g(7{,}6)$, գ) $g(-10)$ և $g(7)$,
բ) $g(-4{,}6)$ և $g(-5{,}5)$, դ) $g(-63)$ և $g(63)$:

87. Նշե՛ք արգումենտի մի որևէ արժեք, որի դեպքում $y=x^6$ ֆունկցիայի արժեքն ավելի մեծ է, քան 2^6, 10^6, 10^{12}, 10^{18}:

88. Նշե՛ք արգումենտի մի որևէ արժեք, որի դեպքում $y=x^5$ ֆունկցիայի արժեքն ավելի փոքր է, քան -3^5, -10^5, -10^{21}:

89. Համեմատե՛ք.

ա) 3^{16} և 3^{22}, գ) $(-2{,}3)^{14}$ և $(-2{,}3)^{16}$, ե) $(1{,}7)^{18}$ և $(1{,}7)^{28}$,
բ) $0{,}3^{16}$ և $0{,}3^{22}$, դ) $\left(-\frac{1}{7}\right)^{12}$ և $\left(-\frac{1}{7}\right)^{10}$, զ) $(0{,}23)^8$ և $(0{,}23)^6$:

90. Համեմատե՛ք.

ա) 2^{17} և 2^{19}, գ) $(-4{,}7)^{15}$ և $(-4{,}7)^{19}$, ե) $(3{,}6)^{13}$ և $3{,}6$,
բ) $0{,}2^{17}$ և $0{,}2^{19}$, դ) $\left(-\frac{2}{9}\right)^{13}$ և $\left(-\frac{2}{9}\right)^{11}$, զ) $(0{,}15)^9$ և $0{,}15$:

§11. Հակադարձ ֆունկցիա

Ինչպես գիտեք ֆունկցիայի որոշման տիրույթի յուրաքանչյուր թվի համապատասխանում է արժեքների բազմության միայն մեկ թիվ: Բայց միշտ չէ, որ արժեքների բազմության ամեն մի թիվ որոշման տիրույթի միայն մեկ թվի է համապատասխանում:

Սահմանում: Ֆունկցիան, որի արժեքների բազմության ամեն մի թիվ որոշման տիրույթի ճիշտ մեկ թվի է համապատասխանում (այսինքն եթե $x_1 \neq x_2$, ապա $f(x_1)\neq f(x_2)$), անվանում են ***փոխմիարժեք ֆունկցիա:***

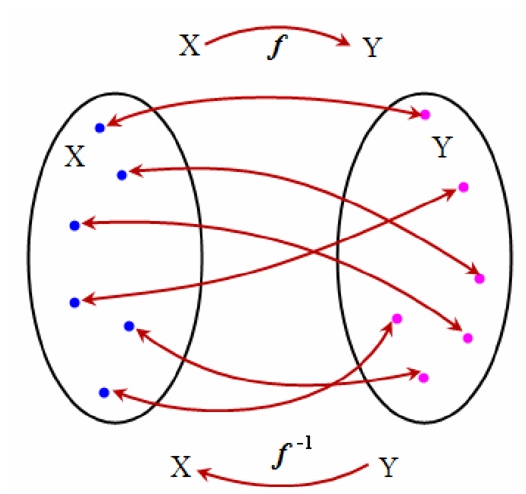
Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան փոխմիարժեք է, ապա $E(y)$-ի ցանկացած y_0 կետի համապատասխանում է $D(y)$-ի միայն մեկ x_0 կետ, այնպիսին որ $f(x_0)=y_0$: Հետևաբար, դիտարկելով x-ի այդպիսի կախվածությունը y-ից, մենք կունենանք մի նոր ֆունկցիա, որը որոշված է $E(y)$-ի վրա (նկ. 49):

Այդ ֆունկցիան անվանում են f ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիա: f ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան հաճախ նշանակում են f^{-1}-ով:

Սահմանում: φ ֆունկցիան անվանում են D բազմության վրա որոշված f ֆունկցիայի ***հակադարձ ֆունկցիա,*** եթե այն որոշված է f ֆունկցիայի արժեքների E բազմության վրա և D բազմության ցանկացած x-ի համար $\varphi(f(x)) = x$:

Եթե ֆունկցիան ունի հակադարձ, այն անվանում են ***հակադարձելի:***

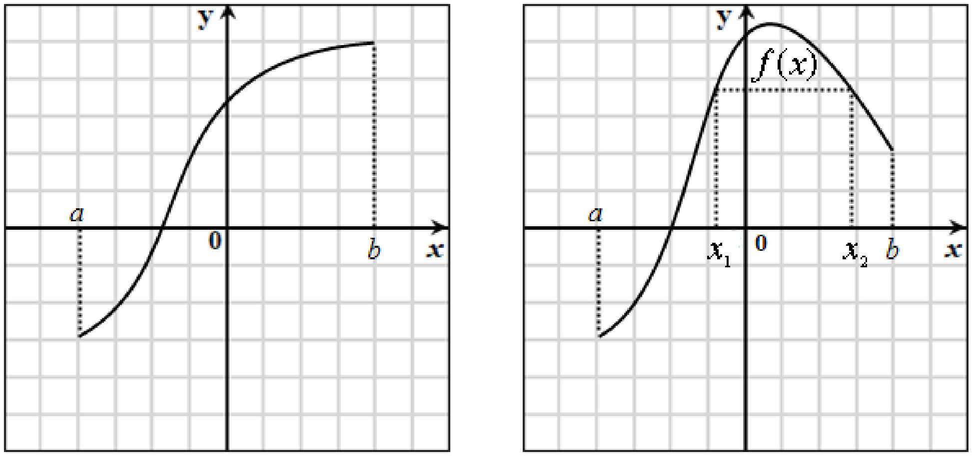
Եթե φ ֆունկցիան f ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան է, ապա f ֆունկցիան իր հերթին φ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան է: Ասում են, որ f և φ ֆունկցիաները փոխհակադարձ են:



Նկ. 49

Որպեսզի ֆունկցիան լինի փոխմիարժեք անհրաժեշտ է և բավարար, որ x-երի առանցքին զուգահեռ ցանկացած ուղիղ այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը հատի ոչ ավել քան մեկ կետում:

Նկար 50-ում պատկերված են $[a;b]$ միջակայքում որոշված ֆունկցիաների գրաֆիկներ: ա)-ում ներկայացված ֆունկցիան փոխմիարժեք է, իսկ բ)-ում ներկայացվածը՝ ոչ:

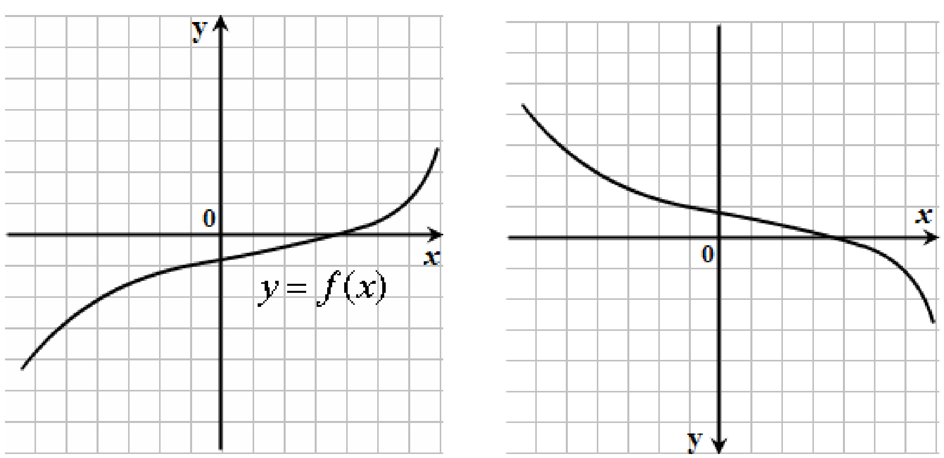


ա)   բ)

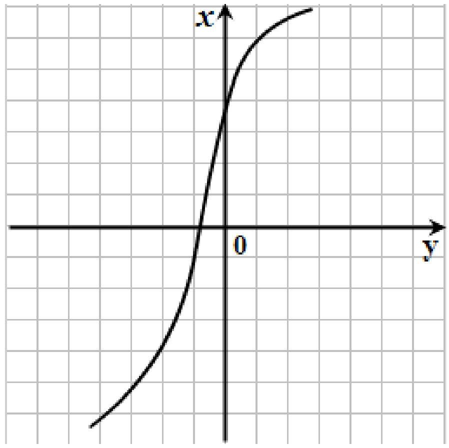
Նկ. 50

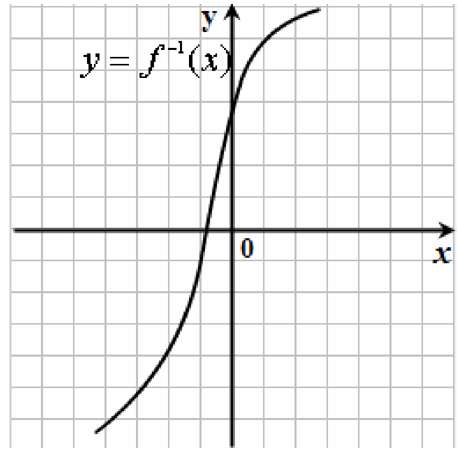
Ենթադրենք $y=f(x)$ ֆունկցիան փոխմիարժեք է: Այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը կոորդինատային հարթության $(x;f(x))$ կետերի բազմությունն է (նկ. 51 ա)): Իսկ $y=f^{-1}(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կոորդինատային հարթության $(f(x);x)$ կետերի բազմությունն է: Դա նշանակում է, որ հակադարձ ֆունկցիայի գրաֆիկը կստացվի տրված ֆունկցիայի գրաֆիկից կոորդինատային հարթության այնպիսի ձևափոխությամբ, որի դեպքում x-երի և y-ների առանցքները կփոխարինվեն մեկը մյուսով:

Դրան կարելի է հասնել, օրինակ, եթե կոորդինատային հարթությունն արտապատկերենք x-երի առանցքի նկատմամբ (նկ. 51 բ)), ապա ստացված պատկերը ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ պտտենք 90^0-ով (նկ. 51 գ)): Ընդունված տեսքի բերելու համար մնում է փոխել x-ի և y-ի տեղերը (նկ. 51 դ)):



ա)   բ)

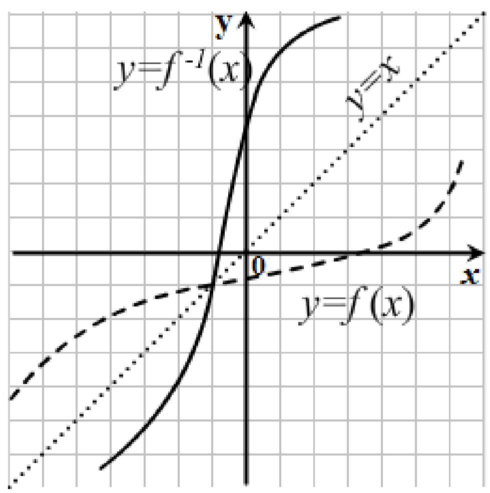




գ) դ)

Նկ. 51

Հակադարձ ֆունկցիայի գրաֆիկը կարող եք ստանալ նաև $y=x$ ուղղի նկատմամբ տրված ֆունկցիայի գրաֆիկի համաչափը կառուցելով (նկ. 52):



Նկ. 52

Առանց ապացուցման ներկայացնենք մի քանի թեորեմ ֆունկցիայի հակադարձելիության և հակադարձ ֆունկցիայի հատկությունների մասին:

1. D բազմության վրա որոշված ֆունկցիան հակադարձելի է միայն այն դեպքում, երբ այն փոխմիարժեք է այդ բազմության վրա:

2. Յուրաքանչյուր մոնոտոն ֆունկցիա հակադարձելի է:

3. Եթե ֆունկցիան աճող (նվազող) է, ապա նրա հակադարձ ֆունկցիան ևս աճող (նվազող) է:

4. Ֆունկցիայի և նրա հակադարձ ֆունկցիայի գրաֆիկները համաչափ են $y=x$ ուղղի նկատմամբ:

f ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան գտնելու համար պետք է.

ա) $y = f(x)$ հավասարումից գտնել x-ը (որը պետք է լինի միակը ֆունկցիայի որոշման տիրույթում, հակառակ դեպքում ֆունկցիան հակադարձ չունի),

բ) ստացված բանաձևում փոխել x-ի և y-ի տեղերը:

Դիտարկենք մի քանի օրինակ:

Օրինակ 1. Գտնենք $y = 3x - 2$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան:

Ինչպես գիտենք այս ֆունկցիան աճող է ամբողջ որոշման տիրույթում ($k > 0$): Ուրեմն այն հակադարձելի է: $y = 3x - 2$ հավասարումից գտնենք x-ը. $x = \dfrac{y+2}{3}$: Այժմ փոխենք x-ի և y-ի տեղերը. $y = \dfrac{x+2}{3}$:

Օրինակ 2. Գտնենք $y = x^2$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան:

Այս ֆունկցիան փոխմիարժեք ֆունկցիա չէ: Հետևաբար այն չունի հակադարձ: Բայց այն նվազում է $(-\infty; 0]$ միջակայքում և աճում է $[0; +\infty)$ միջակայքում: Այս միջակայքերից յուրաքանչյուրում առանձին դիտարկելով $y = x^2$ ֆունկցիան՝ կունենանք հակադարձելի ֆունկցիաներ:

$y = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը $(-\infty; 0]$ միջակայքն է, իսկ արժեքների տիրույթը՝ $[0; +\infty)$ միջակայքը: Հետևաբար նրա հակադարձ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը կլինի $[0; +\infty)$ միջակայքը, իսկ արժեքների տիրույթը՝ $(-\infty; 0]$ միջակայքը: $y = x^2$ հավասարումից գտնենք x-ը. $x = \pm\sqrt{y}$: Քանի որ x-ը պետք է պատկանի $(-\infty; 0]$ միջակայքին, ապա վերցնենք $x = -\sqrt{y}$: Մնում է փոխել x-ի և y-ի տեղերը. $y = -\sqrt{x}$: Իսկ եթե $y = x^2$ ֆունկցիան դիտարկվում է $[0; +\infty)$ միջակայքում, ապա նրա հակադարձ կլինի $y = \sqrt{x}$ ֆունկցիան:

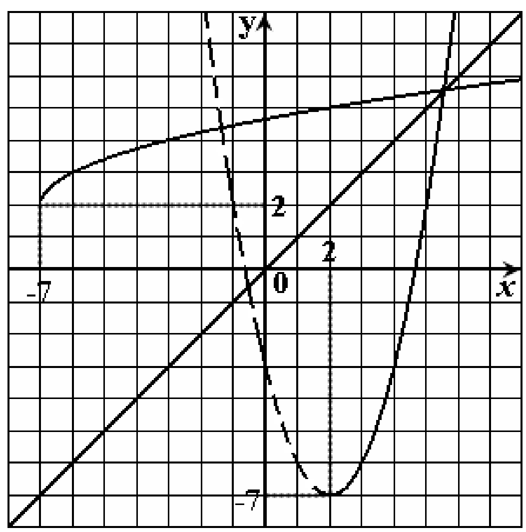
Օրինակ 3. Գտնենք $y = x^3$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան:

Ինչպես գիտենք այս ֆունկցիան աճող է ամբողջ որոշման տիրույթում: Ուրեմն այն հակադարձելի է: $y = x^3$ հավասարումից գտնենք x-ը. $x = \sqrt[3]{y}$: Այժմ փոխենք x-ի և y-ի տեղերը. $y = \sqrt[3]{x}$:

Օրինակ 4. Գտնենք $y = x^2 - 4x - 3$, $x \in [2;+\infty)$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան և կառուցենք նրա գրաֆիկը:

Ձևափոխելով $x^2 - 4x - 3$ արտահայտությունը՝ կունենանք. $y = (x-2)^2 - 7$: Եթե $x \in (-\infty;+\infty)$, ապա այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը (2;–7) կետում գագաթ ունեցող և ճյուղերը վեր ուղղված պարաբոլ է (նկ. 53): $[2;+\infty)$ միջակայքում ֆունկցիան աճում է և նրա արժեքների տիրույթն է $[-7;+\infty)$ միջակայքը: Ուրեմն այն ունի հակադարձ, և հակադարձ ֆունկցիան որոշված է $[-7;+\infty)$ միջակայքում, իսկ արժեքների տիրույթը $[2;+\infty)$ միջակայքն է:

$y = x^2 - 4x - 3$ հավասարումից գտնենք x-ը. $x^2 - 4x - 3 - y = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = 2 \pm \sqrt{7+y}$: Հաշվի առնելով, որ x-ը պետք է պատկանի $[2;+\infty)$ միջակայքին՝ կունենանք. $x = 2 + \sqrt{7+y}$: Մնում է փոխել x-ի և y-ի տեղերը. $y = 2 + \sqrt{7+x}$:



Նկ. 53

Առաջադրանքներ

91. $\varphi(x)$ ֆունկցիան $f(x)$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան է: Գտե՛ք $D(\varphi)$ և $E(\varphi)$, եթե.

ա) $D(f) = (-2;3)$, $E(f) = (1;4)$,

բ) $D(f) = (-\infty;+\infty)$, $E(f) = (0;+\infty)$,

գ) $D(f) = [0;+\infty)$, $E(f) = [-2;+\infty)$,

դ) $D(f) = (-\infty;5]$, $E(f) = (0;3]$:

92. $\varphi(x)$ ֆունկցիան $f(x)$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան է: Գտե՛ք $\varphi(-4)$-ը, $\varphi(0)$-ն, $\varphi(5)$-ը, եթե հայտնի է, որ $f(-6)=0$, $f(1)=-4$, $f(2{,}3)=5$:

93. Ճի՞շտ է արդյոք, որ ֆունկցիայի և նրա հակադարձ ֆունկցիայի գրաֆիկները համաչափ են.

ա) y-ների առանցքի նկատմամբ,

բ) x-երի առանցքի նկատմամբ,

գ) $y=x$ ուղղի նկատմամբ,

դ) կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:

94. Գտե՛ք տրված ֆունկցիաների հակադարձ ֆունկցիան.

ա) $y=7x+3$,

բ) $y=\dfrac{2}{x}$,

գ) $y=-\dfrac{3}{x+2}$,

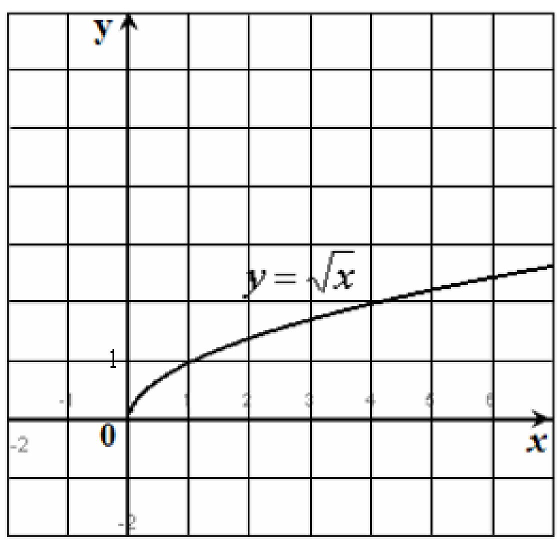
դ) $y=|x|$, $x\in(-\infty;0]$,

ե) $y=x^2-6$, $x\in[0;+\infty)$

զ) $y=x^2-8x-1$, $x\in(-\infty;4]$:

§12. $y=\sqrt[n]{x}$ ֆունկցիան

Ինչպես տեսանք նախորդ պարագրաֆում $y=\sqrt{x}$ ֆունկցիան $y=x^2$ ֆունկցիայի հակադարձն է $[0;+\infty)$ միջակայքում: Այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկար 54-ում:

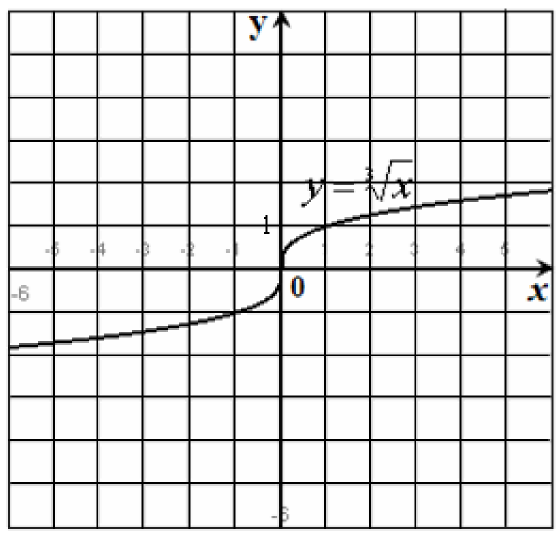


Նկ. 54

$y=\sqrt{x}$ ֆունկցիայի հատկությունները հետևում են $y=x^2$ ֆունկցիայի ($x\in[0;+\infty)$) հատկություններից և հակադարձ ֆունկցիայի մասին թեորեմներից: Թվարկենք դրանք:

1. ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ $D(y)=[0;+\infty)$,
2. ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը՝ $E(y)=[0;+\infty)$,
3. ֆունկցիան ունի մեկ զրո՝ $x=0$-ն,
4. ֆունկցիան աճող է:

Նախորդ պարագրաֆում պարզվեց նաև որ $y=\sqrt[3]{x}$ ֆունկցիան $y=x^3$ ֆունկցիայի հակադարձն է: Այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկար 55-ում:

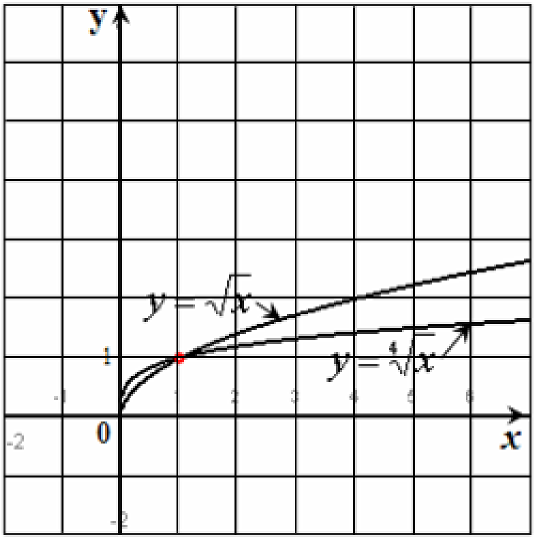


Նկ. 55

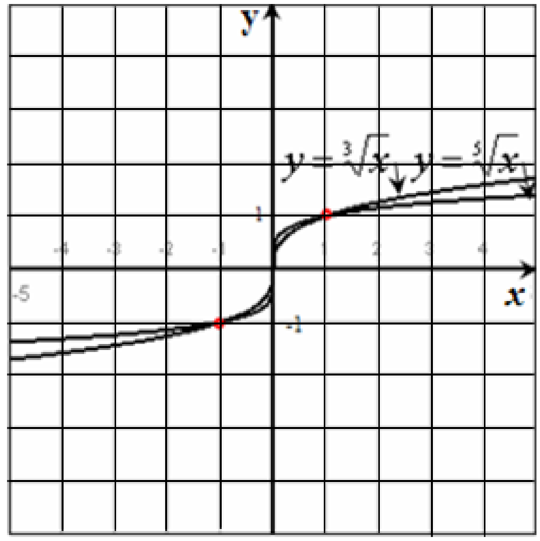
$y=\sqrt[3]{x}$ ֆունկցիայի հատկությունները հետևում են $y=x^3$ ֆունկցիայի հատկություններից և հակադարձ ֆունկցիայի մասին թեորեմներից: Թվարկենք դրանք:

1. ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ $D(y)=(-\infty;+\infty)$,
2. ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը՝ $E(y)=(-\infty;+\infty)$,
3. ֆունկցիան ունի մեկ զրո՝ $x=0$-ն,
4. ֆունկցիան աճող է:

$y=\sqrt[n]{x}$ ֆունկցիայի հատկությունները զույգ n-ի դեպքում նման են $y=\sqrt{x}$ ֆունկցիայի հատկություններին, իսկ կենտ n-ի դեպքում նման են $y=\sqrt[3]{x}$ ֆունկցիայի հատկություններին (տես նկ. 56–57):



Նկ. 56



Նկ. 57

Դիտողություն: Քանի որ դրական կոտորակային ցուցիչով աստիճանն իմաստ ունի միայն ոչ բացասական հիմքի դեպքում, ապա $y=x^{\frac{1}{n}}$ ֆունկցիան որոշված է միայն ոչ բացասական x-երի համար: Իսկ այդպիսի x-երի համար $x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$: Ուրեմն $y=x^{\frac{1}{n}}$ ֆունկցիան զույգ n-ի դեպքում նույնն է ինչ որ $y=\sqrt[n]{x}$ ֆունկցիան:

Բայց կենտ n-ի դեպքում $y=x^{\frac{1}{n}}$ ֆունկցիան տարբերվում է $y=\sqrt[n]{x}$ ֆունկցիայից և նրա հետ համընկնում է միայն ոչ բացասական x-երի դեպքում:

Առաջադրանքներ

95. Ձևափոխելով $y=\sqrt[n]{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կառուցե՛ք հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.

ա) $y=2\sqrt{x}$, գ) $y=-\frac{4}{5}\sqrt[3]{x}$, ե) $y=\sqrt{x-1}$, է) $y=\sqrt[3]{3x-4}$,

բ) $y=\sqrt[5]{-x}$, դ) $y=\sqrt[3]{x}-5$, զ) $y=\sqrt[4]{|x|-1}$, ը) $y=\left|\sqrt{3x}-1\right|$:

96. Ելնելով $y=\sqrt[3]{x}$ ֆունկցիայի մոնոտոնությունից՝ գնահատե՛ք $\sqrt[3]{x}$ արտահայտության արժեք, եթե.

ա) $1\le x\le 8$, բ) $-1\le x\le 1$, գ) $-27\le x\le 0$:

97. Ելնելով $y=\sqrt[4]{x}$ ֆունկցիայի մոնոտոնությունից՝ գնահատե՛ք $\sqrt[4]{x}$ արտահայտության արժեք, եթե.

ա) $0 \le x \le 1$, բ) $1 < x < 81$, գ) $256 \le x \le 625$:

98. Գտեք ֆունկցիայի որոշման տիրույթը.

ա) $y=\sqrt{2x-1}$, գ) $y=\dfrac{2+x}{\sqrt[3]{x+5}}$, ե) $y=(4-3x)^{\frac{1}{3}}$,

բ) $y=\sqrt[5]{3x+1}$, դ) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$, զ) $y=(x^2-4x+3)^{\frac{1}{5}}$:

§13. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ

1. Ֆունկցիայի պարբերականությունը

Սահմանում: $y=f(x)$ ֆունկցիան անվանում են ***պարբերական,*** եթե գոյություն ունի այնպիսի $T \neq 0$ թիվ, որ այդ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի ցանկացած x թվի համար

1) $x \pm T \in D(f)$,

2) $f(x+T)=f(x)$:

Այդպիսի T թիվն անվանում են $y=f(x)$ ֆունկցիայի պարբերություն:

Սահմանում: Պարբերական ֆունկցիայի փոքրագույն դրական պարբերությունն անվանում են ***հիմնական պարբերություն:***

Եթե ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը T-ն է, ապա ասում են, որ ֆունկցիան T- պարբերական է:

Եթե ֆունկցիան T- պարբերական է, ապա T հեռավորության վրա գտնվող ցանկացած երկու կետերում ֆունկցիայի արժեքները հավասար են: Ուրեմն T- պարբերական ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար կարող ենք T երկարության որևէ հատվածի վրա կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը, ապա ստացված պատկերը x-երի առանցքով Tk-ով $(k \in Z)$ տեղաշարժել:

2. $\mathbf{y=\sin x}$ ֆունկցիայի հատկությունները.

1. ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ $D(\sin)=(-\infty;+\infty)$,

2. ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը՝ $E(\sin)=[-1;1]$,

3. ֆունկցիան կենտ է. $\forall x \in (-\infty;+\infty): \sin(-x)=-\sin x$,

4. ֆունկցիան 2π-պարբերական է.
$\forall x \in (-\infty;+\infty):\ \sin(2\pi+x)=\sin x$,

5. ֆունկցիայի զրոներն են $x = \pi k,\ k \in Z$ կետերը,

6. $\sin x > 0,\ \forall x \in (2\pi k, \pi + 2\pi k),\ k \in Z$,

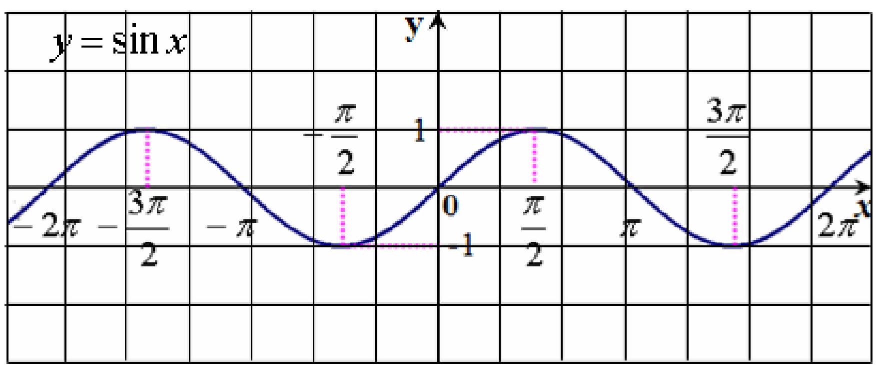
7. $\sin x < 0,\ \forall x \in (\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k),\ k \in Z$,

8. $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right],\ k \in Z$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում ֆունկցիան աճում է,

9. $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right],\ k \in Z$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում ֆունկցիան նվազում է,

10. ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը 1-ն է, որն ընդունում է $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ կետերում,

11. ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը -1-ն է, որն ընդունում է $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$, կետերում:



Նկ. 58

3. $y = \cos x$ ֆունկցիայի հատկությունները.

1. ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ $D(\cos) = (-\infty; +\infty)$,

2. ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը՝ $E(\cos) = [-1; 1]$,

3. ֆունկցիան զույգ է. $\forall x \in (-\infty; +\infty)$: $\cos(-x) = \cos x$,

4. ֆունկցիան 2π-պարբերական է. $\forall x \in R$: $\cos(2\pi + x) = \cos x$,

5. ֆունկցիայի զրոներն են $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ կետերը,

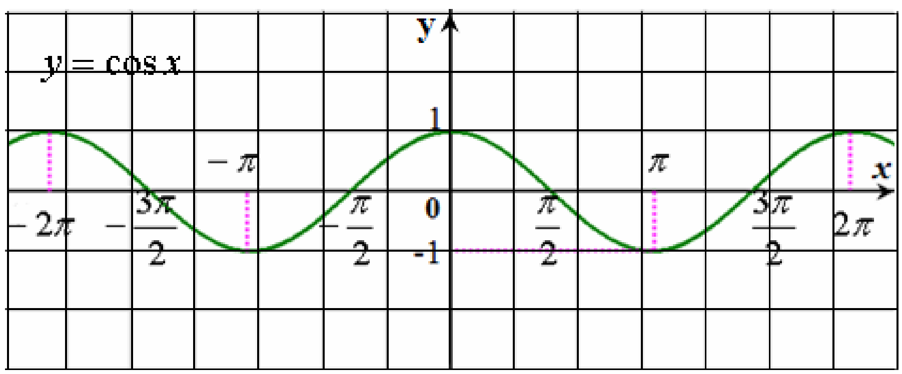
6. $\cos x > 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in Z$, *7.* $\cos x < 0,\ \forall x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in Z$,

8. $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k],\ k \in Z$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում ֆունկցիան աճում է,

9. $[2\pi k; \pi + 2\pi k],\ k \in Z$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում ֆունկցիան նվազում է,

10. ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը 1-ն է, որն ընդունում է $x = 2\pi k,\ k \in Z$ կետերում,

11. ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը -1-ն է, որն ընդունում է $x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$ կետերում:



Նկ. 59

4. y = tgx ֆունկցիայի հատկությունները.

1. ֆունկցիայի որոշման տիրույթը $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right);\ k \in Z$ միջակայքերի միավորումն է,

2. ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը՝ $E(tg) = (-\infty; +\infty)$,

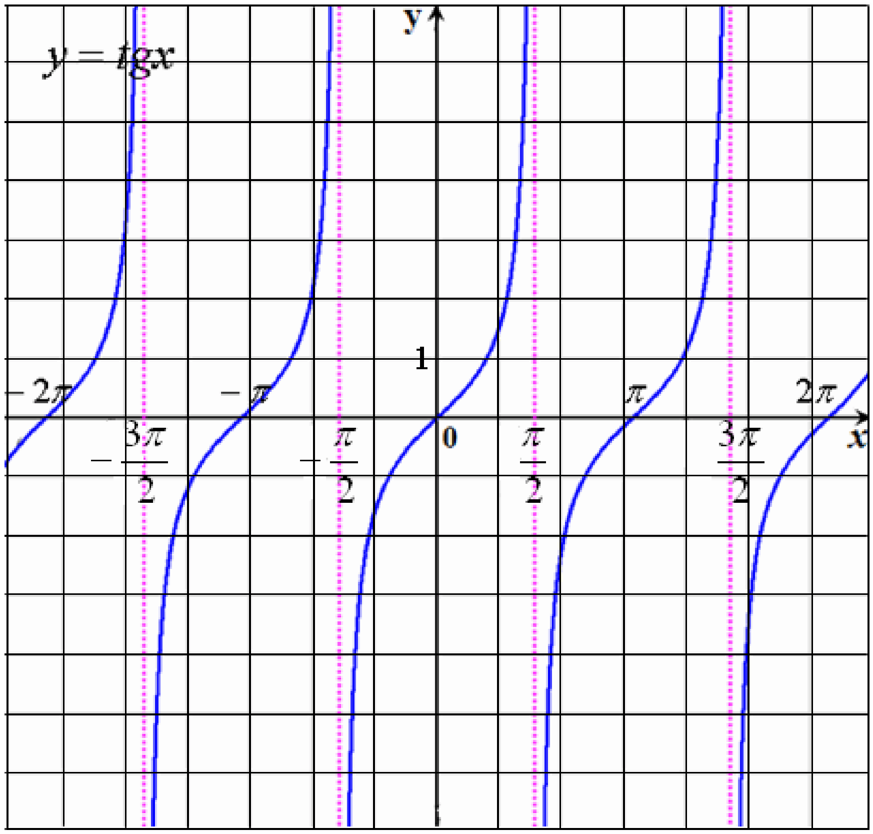
3. ֆունկցիան կենտ է. $\forall x \in D(tg):\ tg(-x) = -tgx$,

4. ֆունկցիան π-պարբերական է. $\forall x \in D(tg):\ tg(\pi + x) = tgx$,

5. ֆունկցիայի զրոներն են $x = \pi k,\ k \in Z$ կետերը,

6. $tgx > 0,\ \forall x \in \left(\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in Z$,

7. $tgx < 0,\ \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi k\right),\ k \in Z$, *8.* $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k\right),\ k \in Z$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում ֆունկցիան աճում է:



Նկ. 60

5. y = ctgx ֆունկցիայի հատկությունները.

1. ֆունկցիայի որոշման տիրույթը $(\pi k, \pi + \pi k), k \in Z$ միջակայքերի միավորումն է,

2. ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը՝ $E(ctg) = (-\infty; +\infty)$,

3. ֆունկցիան կենտ է. $\forall x \in D(ctg)$: $ctg(-x) = -ctgx$,

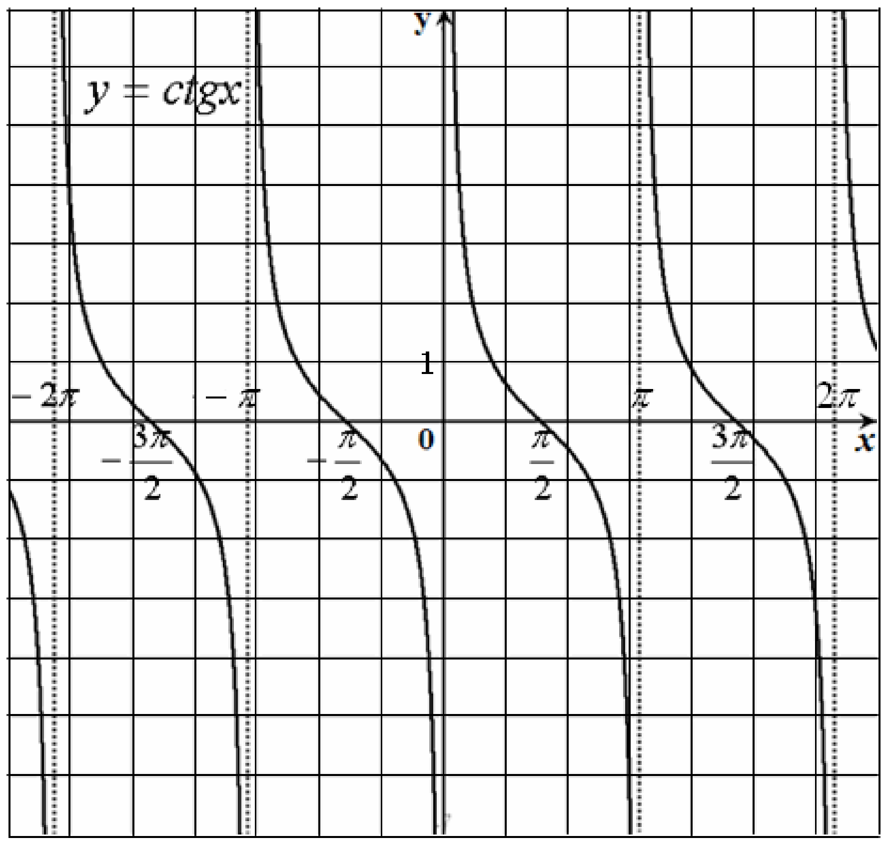
4. ֆունկցիան π-պարբերական է.
$\forall x \in D(ctg)$: $ctg(\pi + x) = ctgx$,

5. ֆունկցիայի զրոներն են $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ կետերը,

6. $ctgx > 0, \forall x \in \left(\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z$,

7. $ctgx < 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi + \pi k\right), k \in Z$,

8. $(\pi k, \pi+\pi k),\ k\in Z$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում ֆունկցիան նվազում է:



Նկ. 61

Առաջադրանքներ

99. Ձևափոխելով եռանկյունաչափական ֆունկցիաների գրաֆիկները՝ կառուցե՛ք հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.

ա) $y = sin\,2x$, գ) $y = 2\,sin\,x$, ի) $y = cos\,5x$,

բ) $y = 3\,cos\,\frac{x}{4}$, է) $y = tg\,4x$, լ) $y = ctg\,\frac{3x}{2}$,

գ) $y = 2\,sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$, ը) $y = \frac{1}{4}cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, խ) $y = tg(3x+1)$,

դ) $y = |sin\,x|$, թ) $y = |cos\,x|$, ծ) $y = |ctgx|$,

ե) $y = 2\,sin|2x|$, ժ) $y = cos|x|$, կ) $y = \frac{1}{2}-\left|cos\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)\right|$:

100. Գտե՛ք ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը՝ ելնելով ֆունկցիայի գրաֆիկի ձևափոխման օրինաչափությունից.

ա) $y = sin\,3x$, բ) $y = 2\,sin\,x$, գ) $y = cos\,5x$,

դ) $y = cos\,\frac{x}{2}$, ե) $y = tg\,4x$, զ) $y = ctg\,\frac{3x}{2}$,

է) $y = 2\,sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, ը) $y = \frac{1}{4}cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, թ) $y = tg(3x+1)$:

§14. Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ

1. $\mathbf{y = \arcsin x}$ ֆունկցիան

Սահմանում: a $(|a| \le 1)$ թվի արկսինուս են անվանում $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ հատվածի այն թիվը, որի սինուսը հավասար է a.

$$\arcsin a = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]. \\ \sin\alpha = a \end{cases}$$

$y = \arcsin x$ ֆունկցիան $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքում $y = \sin x$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան է:

$\mathbf{y = \arcsin x}$ ֆունկցիայի հատկությունները.

1. ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ $D(\arcsin) = [-1;1]$,

2. ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը՝ $E(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$,

3. $\forall a \in [-1;\ 1]:\ \sin(\arcsin a) \equiv a$,

4. ֆունկցիան կենտ է. $\forall x \in [-1;1]:\ \arcsin(-x) = -\arcsin x$,

5. ֆունկցիայի զրոն $x = 0$-ն է,

6. $\arcsin x > 0,\ \forall x \in (0;1]$,

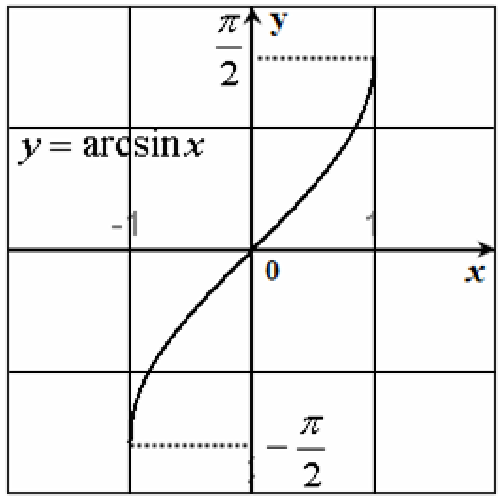
7. $\arcsin x < 0,\ \forall x \in [-1;0)$,

8. $\forall \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]:\ \arcsin(\sin\alpha) = \alpha$,

9. ֆունկցիան աճող է,

10. ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը $\frac{\pi}{2}$-ն է, որն ընդունում է $x=1$ կետում,

11. ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը $-\frac{\pi}{2}$-ն է, որն ընդունում է $x=-1$ կետում:



Նկ. 62

2. $\mathbf{y=\arccos x}$ ֆունկցիան

Սահմանում: a $(|a|\le 1)$ թվի արկկոսինուս են անվանում $[0;\pi]$ հատվածի այն թիվը, որի կոսինուսը հավասար է a.

$$\arccos a=\alpha \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha\in[0;\pi]\\ \cos\alpha=a\end{cases}.$$

$y=\arccos x$ ֆունկցիան $[0;\pi]$ միջակայքում $y=\cos x$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան է:

$\mathbf{y=\arccos x}$ ֆունկցիայի հատկությունները.

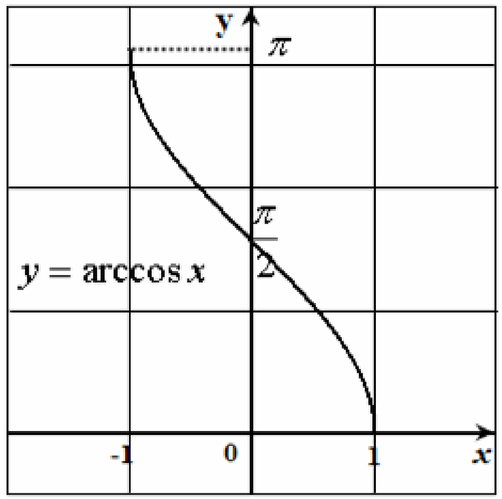
1. ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ $D(\arccos)=[-1;1]$,
2. ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը՝ $E(\arccos)=[0;\pi]$,
3. $\forall a\in[-1;\ 1]:\ \cos(\arccos a)\equiv a$,
4. $\forall a\in[-1;\ 1]:\ \arccos(-a)=\pi-\arccos a$,
5. ֆունկցիայի զրոն $x=1$-ն է,
6. $\arccos x>0, \forall x\in[-1;1)$,

7. $\forall\alpha\in[0;\pi]$: $\arccos(\cos\alpha)=\alpha$,

8. ֆունկցիան նվազող է,

9. ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը π-ն է, որն ընդունում է $x=-1$ կետում,

10. ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը 0-ն է, որն ընդունում է $x=1$ կետում:



Նկ. 63

3. y = arctgx ֆունկցիան

Սահմանում: *a* թվի արկտանգենս են անվանում $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքի այն թիվը, որի տանգենսը հավասար է *a*.

$$arctga=\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\\ tg\alpha=a\end{cases}.$$

$y=arctgx$ ֆունկցիան $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում $y=tgx$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան է:

y = arctgx ֆունկցիայի հատկությունները.

1. ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ $D(arctg)=(-\infty;+\infty)$, *2.* ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը՝ $E(arctg)=\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$,

3. $\forall a\in(-\infty;+\infty):\quad tg(arctga)\equiv a$,

4. ֆունկցիան կենտ է. $\forall x\in(-\infty;+\infty):\ \mathrm{arctg}\,(-x)=-arctgx$,

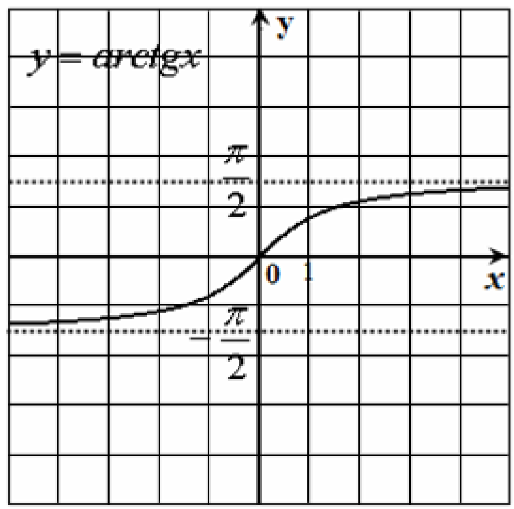
5. ֆունկցիայի զրոն $x=0$-ն է,

6. $arctgx>0, \forall x\in(0,+\infty)$,

7. $arctgx<0, \forall x\in(-\infty,0)$,

8. $\forall\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right):\ arctg(tg\alpha)=\alpha$,

9. ֆունկցիան աճող է:



Նկ. 64

4. y = arcctgx ֆունկցիան

Սահմանում: a թվի արկկոտանգենս են անվանում $(0;\pi)$ միջակայքի այն թիվը, որի կոտանգենսը հավասար է a.

$$arcctga=\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha\in(0;\pi)\\ ctg\alpha=a\end{cases}.$$

$y=arcctgx$ ֆունկցիան $(0;\pi)$ միջակայքում $y=ctgx$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան է:

y = arcctgx ֆունկցիայի հատկությունները.

1. ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ $D(arcctg)=(-\infty;+\infty)$,

2. ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը՝ $E(arcctg)=(0;\pi)$,

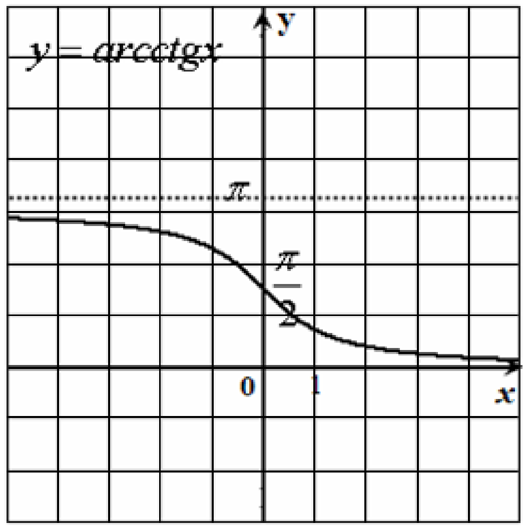
3. $\forall a\in(-\infty;+\infty):\ ctg(arcctga)\equiv a$,

4. $\forall a \in (-\infty;+\infty)$: $arcctg(-x) = \pi - arcctgx$,

5. $arcctgx>0$, $\forall a \in (-\infty;+\infty)$,

6. $\forall a \in (0;\pi)$: $arcctg(ctga) = a$,

7. ֆունկցիան նվազող է:



Նկ. 65

Առաջադրանքներ

101. Ձևափոխելով հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների գրաֆիկները՝ կառուցեք հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.

ա) $y = arccos|x|$,

բ) $y = |arcsin\,x|$,

գ) $y = arccos(\,x+1\,) - 2$,

դ) $y = \dfrac{\pi}{2} + arcsin\,x$,

ե) $y = arctg|x|$,

զ) $y = arcctgx - \dfrac{\pi}{2}$,

է) $y = arctg(-x)$,

ը) $y = 2arcctg(x-1)$:

102. Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը.

ա) $y = arcsin(\,2x-1\,)$,

բ) $y = arccos(\,x^2+3x-2\,)$,

գ) $y = \sqrt{arcsin\,x}$,

դ) $y = \dfrac{1}{arccos\,x}$,

ե) $y = \sqrt{arctgx}$,

զ) $y = arcctgx + arcsin\,x$:

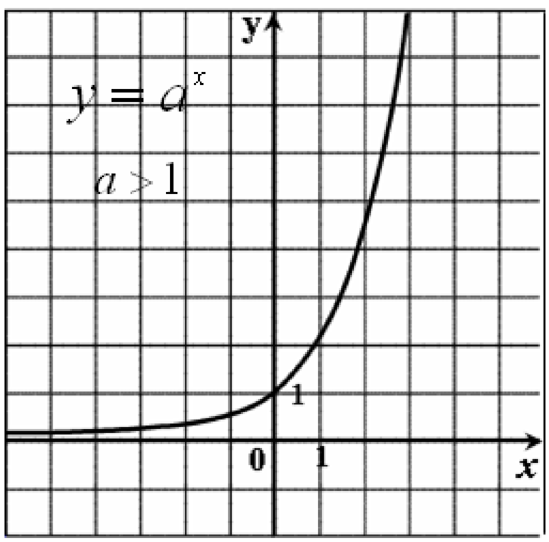
§15. Ցուցչային և լոգարիթմական ֆունկցիաներ

1. Ցուցչային ֆունկցիա

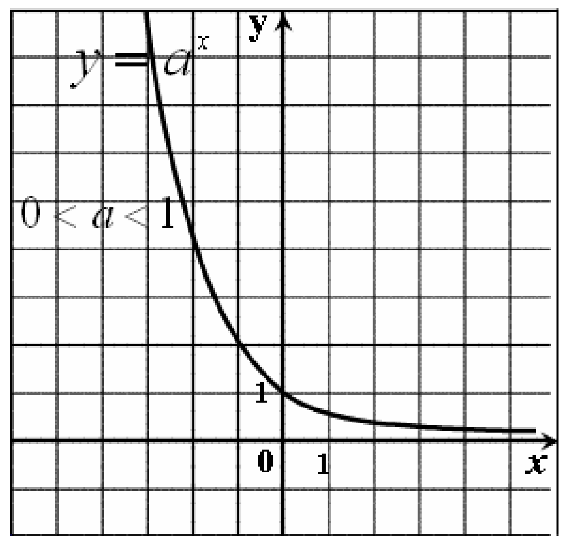
Սահմանում: $y = a^x$ ֆունկցիան, որտեղ a-ն մեկից տարբեր դրական թիվ է ($a > 0$, $a \neq 1$) անվանում են ***ցուցչային ֆունկցիա:***

Թվարկենք ցուցչային ֆունկցիայի հատկությունները:

1. ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ $D(y) = (-\infty; +\infty)$,
2. ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը՝ $E(y) = (0; +\infty)$,
3. ֆունկցիան ոչ զույգ է, ոչ կենտ
4. ֆունկցիան աճող է, երբ $a > 1$ և նվազող է, երբ $0 < a < 1$ (նկ. 66 ա) և բ)):



ա)



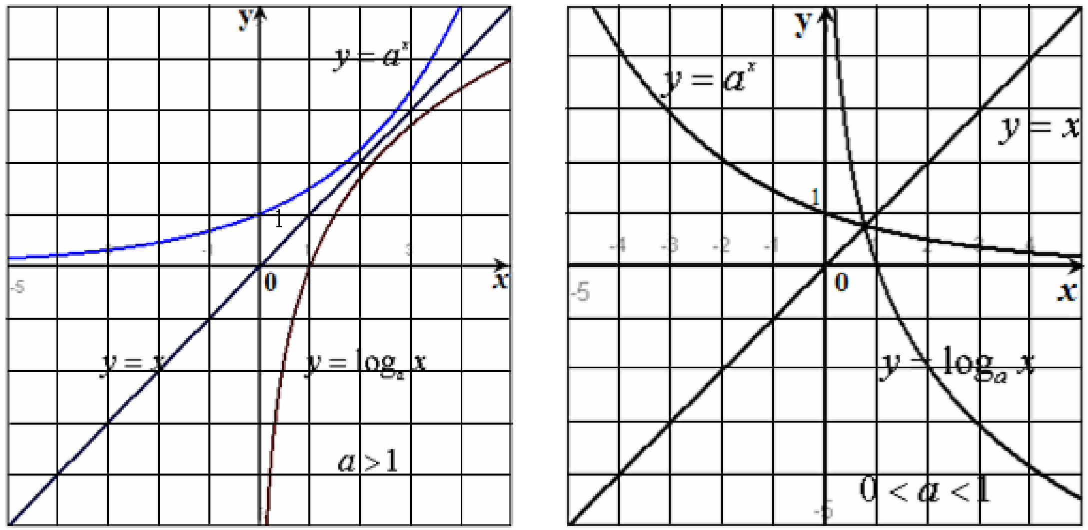
բ)

Նկ. 66

2. Լոգարիթմական ֆունկցիա

$y = a^x$ աճող ($a > 1$) կամ նվազող է ($0 < a < 1$): Հետևաբար այն հակադարձելի է: Ցուցչային ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան անվանում են լոգարիթմական ֆունկցիա՝ $y = \log_a x$:

$y = \log_a x$ և $y = a^x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները համաչափ են $y = x$ ուղղի նկատմամբ (նկ. 67 ա) և բ)):

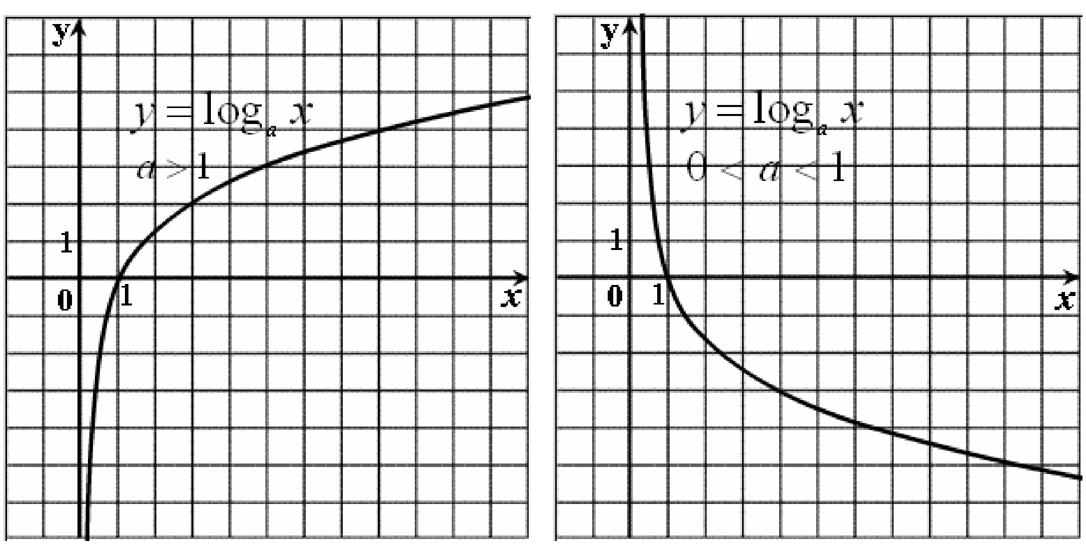


ա) բ)

Նկ. 67

Լոգարիթմական ֆունկցիայի հատկությունները հետևում են ցուցչային ֆունկցիայի հատկություններից և հակադարձ ֆունկցիայի մասին թեորեմներից: Թվարկենք դրանք:

1. ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ $D(y) = (0; +\infty)$,
2. ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը՝ $E(y) = (-\infty; +\infty)$,
3. ֆունկցիան ունի մեկ զրո՝ $x = 1$-ը,
4. ֆունկցիան ոչ զույգ է, ոչ կենտ
5. ֆունկցիան աճող է, երբ $a > 1$ և նվազող է, երբ $0 < a < 1$ (նկ. 68 ա) և բ)):



ա) բ)

Նկ. 68

Առաջադրանքներ

103. Ձևափոխելով $y=a^x$ և $y=\log_a x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները՝ կառուցեք հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.

ա) $y=2^{x-1}$,   ե) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$,   ը) $y=\lg(x-3)$,

բ) $y=3+5^{-x}$,   զ) $y=3^{|x|}$,   թ) $y=|\log_4 x|$,

գ) $y=1-2^x$,   է) $y=\log_2(2x+1)$,   ժ) $y=\lg|x|$:

դ) $y=|5^x-2|$,

§16. Խառը օրինակներ

Օրինակ 1. Կառուցենք $f(x)=x+\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Այս ֆունկցիան որոշված է ամբողջ թվային առանցքի վրա, բացի 0 կետից, այսինքն $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$: Հետևաբար պարզ է, որ ցանկացած x-ի համար $D(f)$-ից $-x$-ը նույնպես $D(f)$-ից է: Բացի այդ, ցանկացած x-ի համար $D(f)$-ից $f(-x)=-x-\frac{1}{x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f(x)$: Ուրեմն ֆունկցիան կենտ է: Հետևաբար կարելի է դրական x-երի համար կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը, իսկ բացասական x-երի համար գրաֆիկը ստանալ կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ նրա համաչափը կառուցելով:

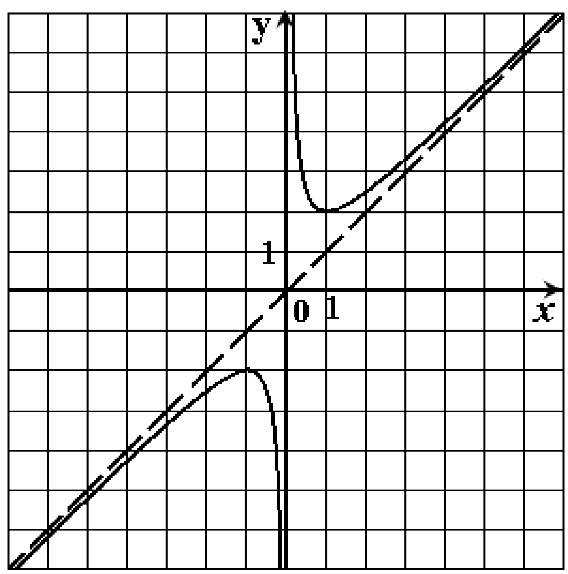
Եթե $x>0$, ապա $f(x)>x>0$: Ուրեմն ֆունկցիայի գրաֆիկը գտնվում է առաջին քառորդում և ընկած է $y=x$ ուղղի և y-ների առանցքի միջև: Պարզ է, որ զրոյին ձգտող դրական x-երի համար ֆունկցիայի արժեքները անվերջ աճում են, իսկ x-ի արժեքների մեծացմանը զուգընթաց ֆունկցիայի արժեքները ավելի ու ավելի քիչ են տարբերվում $y=x$ ֆունկցիայի համապատասխան արժեքներից: Քանի որ դրական x-երի համար $x+\frac{1}{x}-2=\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$, ապա $f(x)\geq 2$: Բացի այդ, $f(1)=2$: Ուրեմն դրական x-երի համար ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը 2-ն է, որը ֆունկցիան ընդունում է $x=1$ կետում:

Ֆունկցիայի աճման և նվազման հարցը պարզելու համար պարզենք $f(x_1)-f(x_2)$ արտահայտության նշանը: Ունենք $f(x_1)-f(x_2)=x_1-x_2+\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}$:

Եթե $0<x_1<x_2\le 1$, ապա $0<x_1x_2<1$, իսկ $x_2-x_1>0$: Հետևաբար $\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}>x_2-x_1$ և $f(x_1)-f(x_2)=x_1-x_2+\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}>x_1-x_2+x_2-x_1=0$: Այսպիսով, եթե $0<x_1<x_2\le 1$, ապա $f(x_1)>f(x_2)$, այսինքն $(0;1]$ միջակայքում ֆունկցիան նվազող է:

Եթե $1\le x_1<x_2$, ապա $x_1x_2>1$, իսկ $x_2-x_1>0$: Հետևաբար $\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}<x_2-x_1$ և $f(x_1)-f(x_2)=x_1-x_2+\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}<x_1-x_2+x_2-x_1=0$: Այսպիսով, եթե $1\le x_1<x_2$, ապա $f(x_1)<f(x_2)$, այսինքն $[1;+\infty)$ միջակայքում ֆունկցիան աճող է:

Այս ամենը հաշվի առնելով կունենանք նկար 69-ում պատկերված գրաֆիկը:



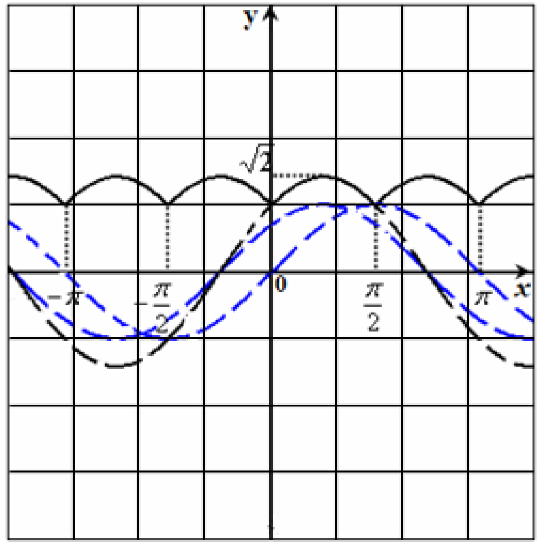
Նկ. 69

Օրինակ 2. Կառուցենք $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Այս ֆունկցիան որոշված է ամբողջ թվային առանցքի վրա, այսինքն $D(f)=(-\infty;+\infty)$:

Քանի որ ցանկացած x-ի համար $D(f)$-ից $x\pm\frac{\pi}{2}$-ը նույնպես $D(f)$-ից է և $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|\cos x|+|-\sin x|=$ $=|\cos x|+|\sin x|=f(x)$, ապա $\frac{\pi}{2}$-ը այս ֆունկցիայի համար պարբերություն է: Հետևաբար կարելի է կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը, օրինակ $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ հատվածի վրա, ապա ստացված պատկերը x-երի առանցքով $\frac{\pi}{2}k$-ով $(k\in Z)$ տեղաշարժել:

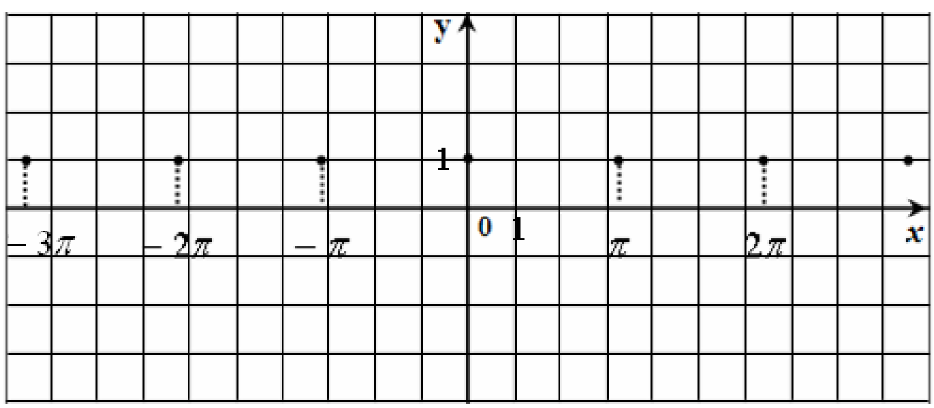
Քանի որ $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ հատվածում $\sin x\geq 0, \cos x\geq 0$, ապա $f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$: Ուրեմն $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ հատվածում $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար պետք է $y=\sin x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը x-երի առանցքի ուղղությամբ $-\frac{\pi}{4}$-ով տեղաշարժել, y-ների առանցքի երկայնքով $\sqrt{2}$ անգամ «ձգել», հեռացնելով x-երի առանցքից, ապա վերցնել այդ գրաֆիկի $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ աբսցիսներին համապատասխանող մասը: Կատարելով վերևում նշված գործողությունները՝ կստանանք նկար 70-ում պատկերված գրաֆիկը:



Նկ. 70

Օրինակ 3. Կառուցենք $f(x)=2^{\sqrt{-\sin^2 x}}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Այս ֆունցիան որոշված է այն x-երի համար որոնց դեպքում $-\sin^2 x \geq 0$: Վերջինս համարժեք է $\sin x = 0$ պայմանին: Հետևաբար ֆունկցիան որոշված է միայն $x=\pi k$ $(k\in Z)$ կետերում: Այդ կետերից յուրաքանչյուրում ֆունկցիայի արժեք հավասար է 1-ի: Այսպիսով, ֆունկցիայի գրաֆիկը կոորդինատային հարթության $(\pi k;1)$ $(k\in Z)$ կետերի բազմությունն է (նկ. 71):

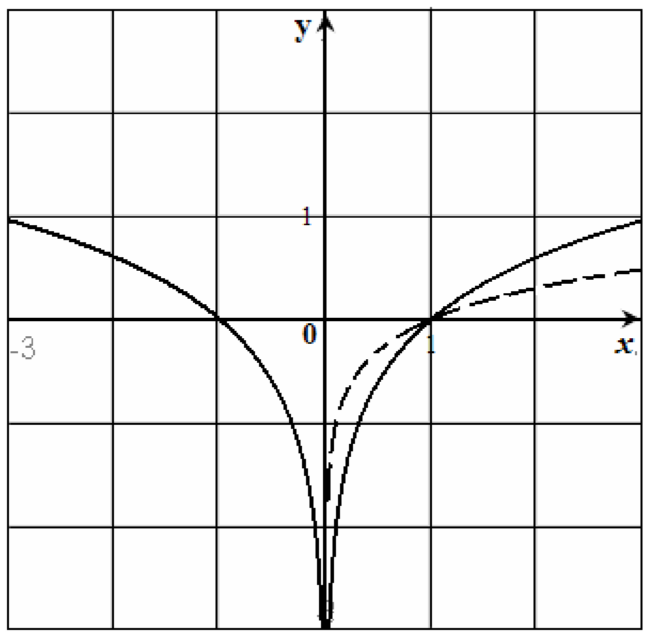


Նկ. 71

Օրինակ 4. Կառուցենք $f(x)=\lg x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Այս ֆունկցիան որոշված է ամբողջ թվային առանցքի վրա, բացի 0 կետից, այսինքն՝ $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$: Հետևաբար պարզ է, որ ցանկացած x-ի համար $D(f)$-ից $-x$-ը նույնպես $D(f)$-ից է: Բացի այդ, ցանկացած x-ի համար $D(f)$-ից $f(-x)=\lg(-x)^2=f(x)$: Ուրեմն ֆունկցիան զույգ է: Հետևաբար կարելի է դրական x-երի համար կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը, իսկ բացասական x-երի համար գրաֆիկը ստանալ y-ների առանցքի նկատմամբ նրա համաչափը կառուցելով:

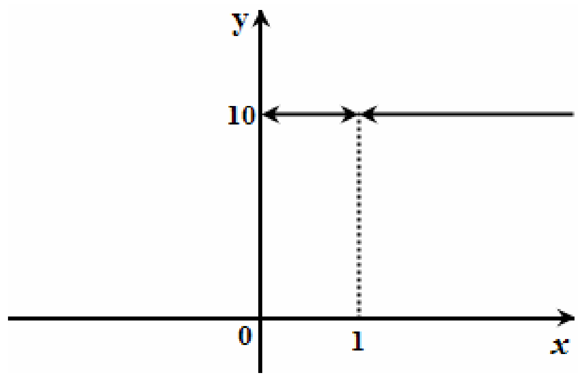
Քանի որ $x>0$ համար $f(x)=2\lg x$, ապա դրական x-երի համար այդ գրաֆիկը համընկնում է $y=2\lg x$ (վերջինս որոշված է միայն դրական x-երի համար): $y=2\lg x$ ֆունկցիայի գռաֆիկը ստացվում է $y=\lg x$ ֆունկցիայի գրաֆիկից այն y-ների առանցքի երկայնքով 2 անգամ «ձգելով», հեռացնել x-երի առանցքից: Այսպիսով, $f(x)=\lg x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ունի նկար 72-ում ներկայացված տեսքը:



Նկ. 72

Օրինակ 5. Կառուցենք $f(x)=x^{\frac{1}{\lg x}}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Այս ֆունկցիան որոշված է այն x-երի համար որոնք բավարարում են $x>0$ և $x\neq 1$ պայմաններին, այսինքն $D(f)=(0;1)\cup(1;+\infty)$: Այդպիսի x-երի համար $x^{\frac{1}{\lg x}}=x^{\log_x 10}=10$: Այսպիսով, $f(x)=x^{\frac{1}{\lg x}}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ունի նկար 73-ում ներկայացված տեսքը:



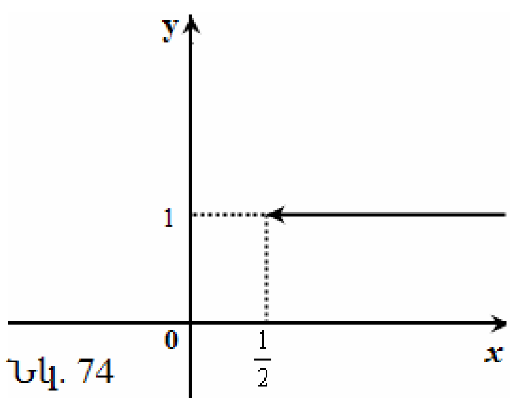
Նկ. 73

Օրինակ 6. Կառուցենք $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\log_2\sqrt{4x^2-4x+1}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Ձևափոխենք $\log_2\sqrt{4x^2-4x+1}$ արտահայտությունը: Կունենանք

$$\log_2\sqrt{4x^2-4x+1}=\log_2\sqrt{(2x-1)^2}=\log_2|2x-1|=1+\log_2\left|x-\frac{1}{2}\right|:$$

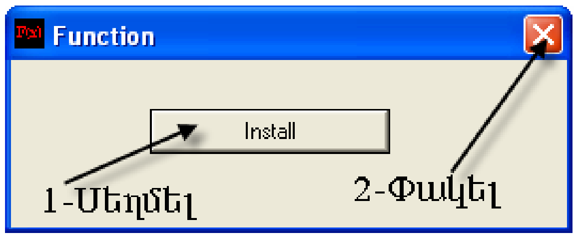
Այսպիսով, $f(x)=-\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)+1+\log_2\left|x-\frac{1}{2}\right|$: Առաջին գումարելին իմաստ ունի $\frac{1}{2}$-ից մեծ x-երի համար, իսկ երրորդը բոլոր x-երի համար, բացի $\frac{1}{2}$-ից: Հետևաբար $D(f)=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$: Իսկ քանի որ այդպիսի x-երի համար $\log_2\left|x-\frac{1}{2}\right|=\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$, ապա կունենանք $f(x)=1$: Այսպիսով, դիտարկվող ֆունկցիայի գրաֆիկը կունենա նկար 74-ում պատկերված տեսքը:



Նկ. 74

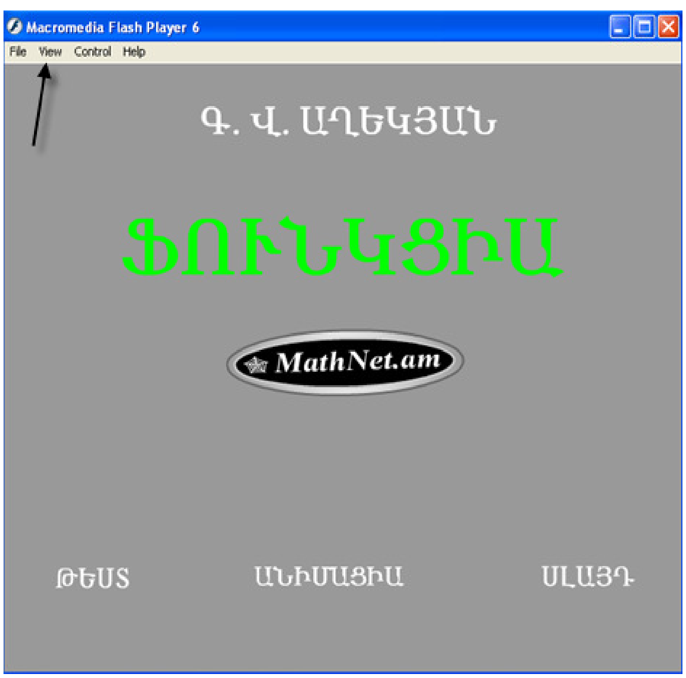
ՀԱՎԵԼՎԱԾ

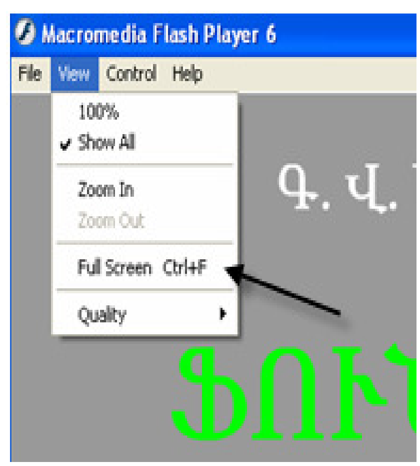
Առաջին անգամ էլեկտրոնային նյութերն օգտագործելիս լազերային սկավառակից գործարկե՛ք Fanction ֆայլը (նկ. 75), բացվող պատուհանում սեղմե՛ք Install կոճակը, ապա փակեք այդ պատուհանը (նկ. 76): Հաջորդ անգամների համար այդ գործողությունը մի կատարեք:



Նկ. 75 Նկ. 76 Նկ. 77

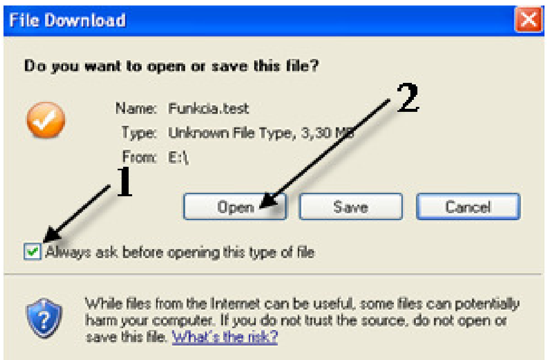
Էլեկտրոնային նյութերը (թեստեր, անիմացիաներ, սլայդներ) օգտագործելու համար միշտ լազերային սկավառակից գործարկե՛ք Start ֆայլը (նկ. 77): Բացվող պատուհանը (նկ. 78) ամբողջ էկրանով դիտելու համար View մենյուի ենթամենյուից ընտրեք Full Screen տողը (նկ. 79): Հետագա կառավարումը կատարվում է գրություն-կոճակների միջոցով:



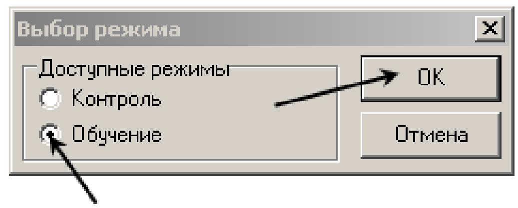


Նկ. 78 Նկ. 79

Թեստ անցկացնելու համար սեղմե՛ք «Թեստ» գրություն-կոճակը (նկ. 78): Եթե բացվել է նկար 80-ում ներկայացված պատուհանը, ապա սեղմե՛ք 1 և 2 համարներով նշված դիրքերը: Հաջորդ բացվող պատուհանում ընտրե՛ք **«Обучение»** տողը, հետո սեղմե՛ք **«OK»** կոճակը (նկ. 81):



Նկ. 80



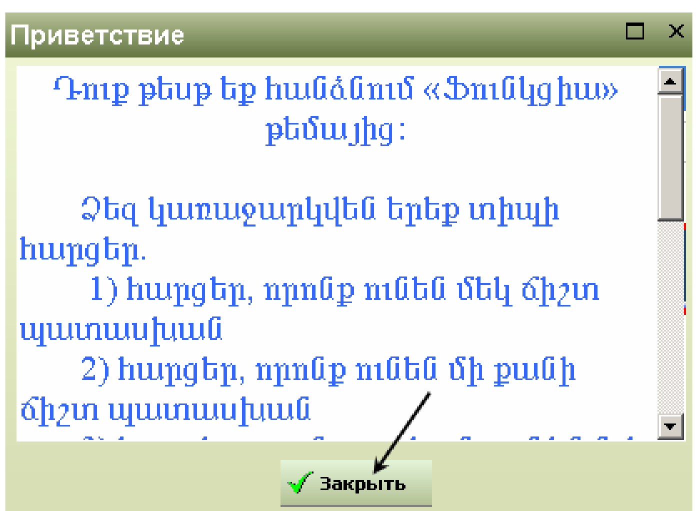
Նկ. 81

Ընթերցե՛ք բացվող պատուհանի տեքստը, ապա սեղմե՛ք **«Закрыть»** կոճակը (նկ. 82):

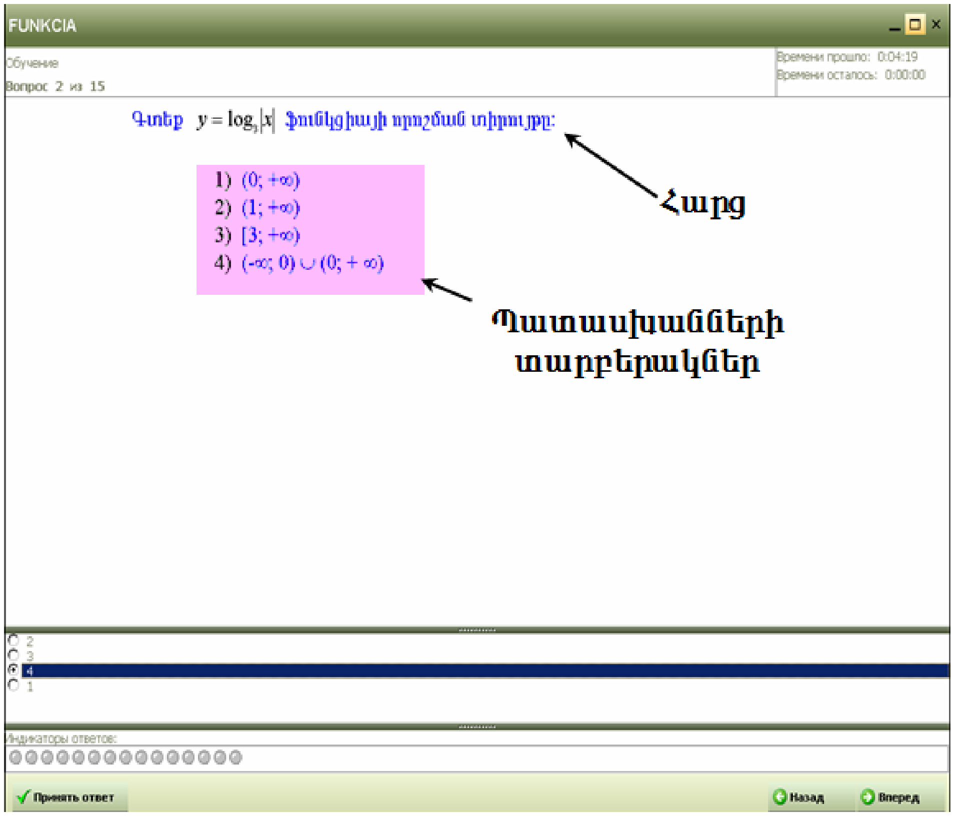
Հարցերի պատասխանների տարբերակները գրված են վերևից առաջին պատուհանում (նկ. 83):

Հարցերի պատասխանները պետք է ընտրել վերևից երկրորդ պատուհանում, ապա սեղմել էկրանի ներքևի ձախ անկյունում գտնվող **«Принять»** կոճակը (նկ. 84):

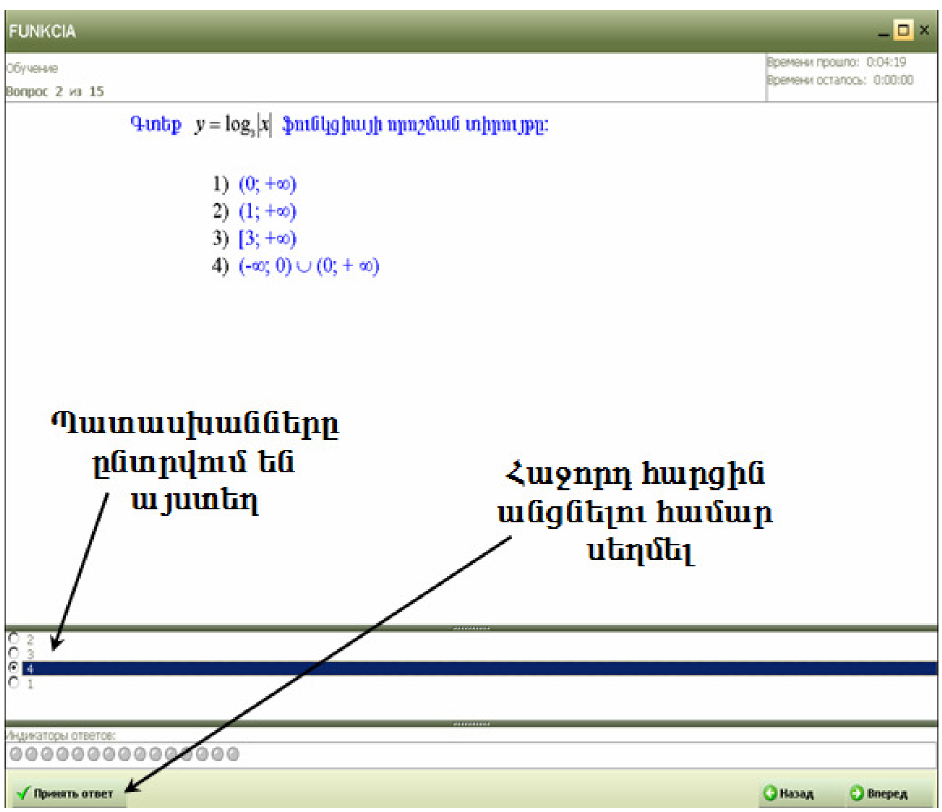
Սեղմելով էկրանի ներքևի աջ անկյունում գտնվող **«Вперед»** կոճակը՝ կարող եք որոշ հարցեր բաց թողնել: Բաց թողնված հարցերին պետք է վերադառնալ **«Назад»** կոճակի օգնությամբ (նկ. 85):



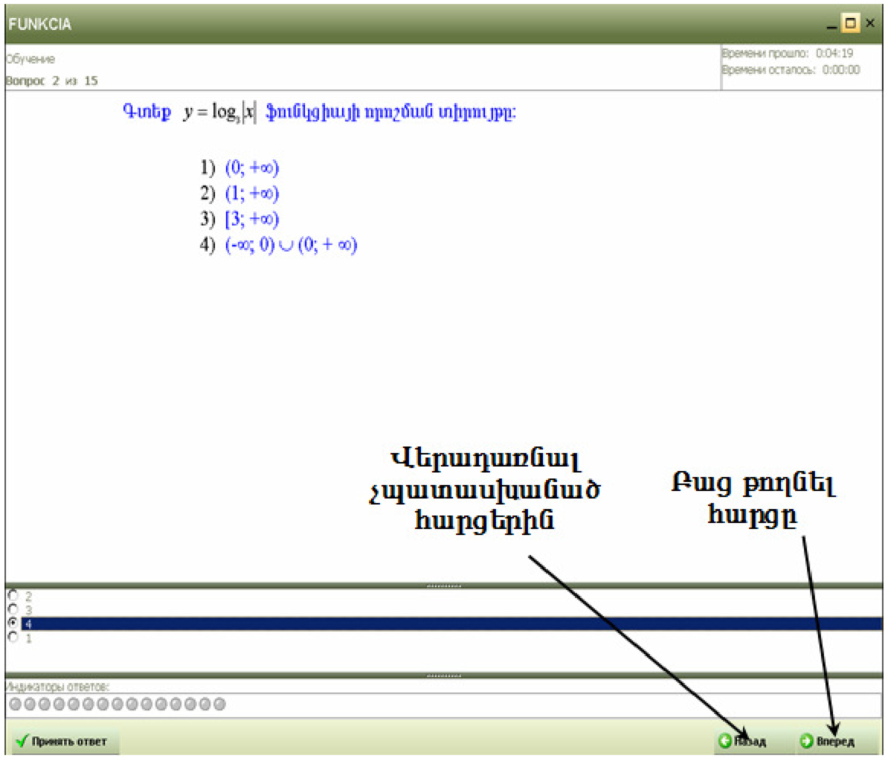
Նկ. 82


FUNKCIA
Обучение
Вопрос 2 из 15
Времени прошло: 0:04:19
Времени осталось: 0:00:00
Գտեք $y = \log_3|x|$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:
1) $(0; +\infty)$
2) $(1; +\infty)$
3) $[3; +\infty)$
4) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Հարց
Պատասխանների տարբերակներ
2
3
4
1
Индикаторы ответов:
Принять ответ
Назад
Вперед

Նկ. 83

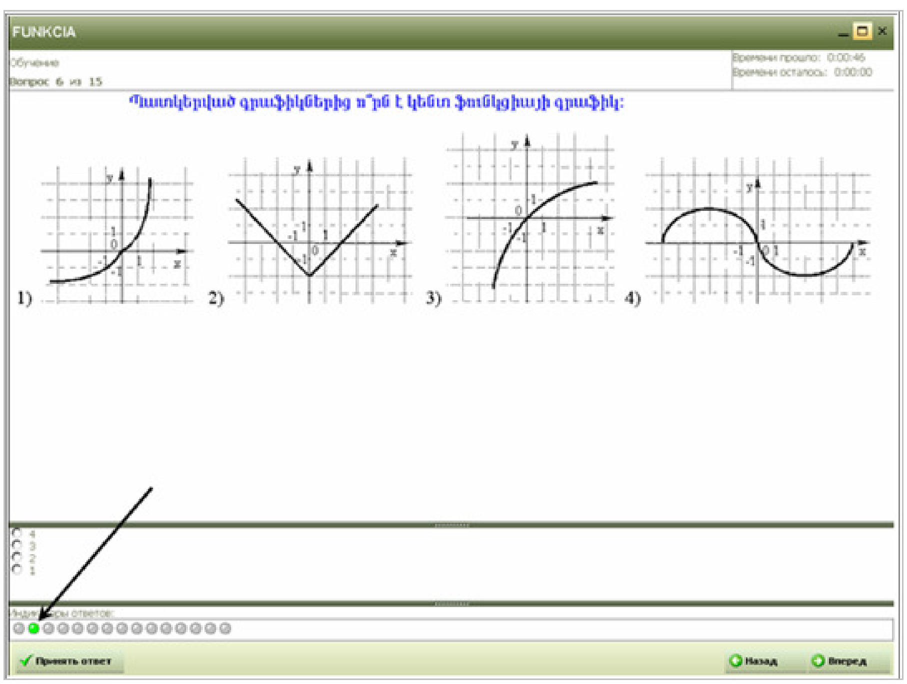

FUNKCIA
Обучение
Вопрос 2 из 15
Времени прошло: 0:04:19
Времени осталось: 0:00:00
Գտեք $y = \log_3|x|$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:
1) $(0; +\infty)$
2) $(1; +\infty)$
3) $[3; +\infty)$
4) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Պատասխանները ընտրվում են այստեղ
Հաջորդ հարցին անցնելու համար սեղմել
2
3
4
1
Индикаторы ответов:
Принять ответ
Назад
Вперед

Նկ. 84



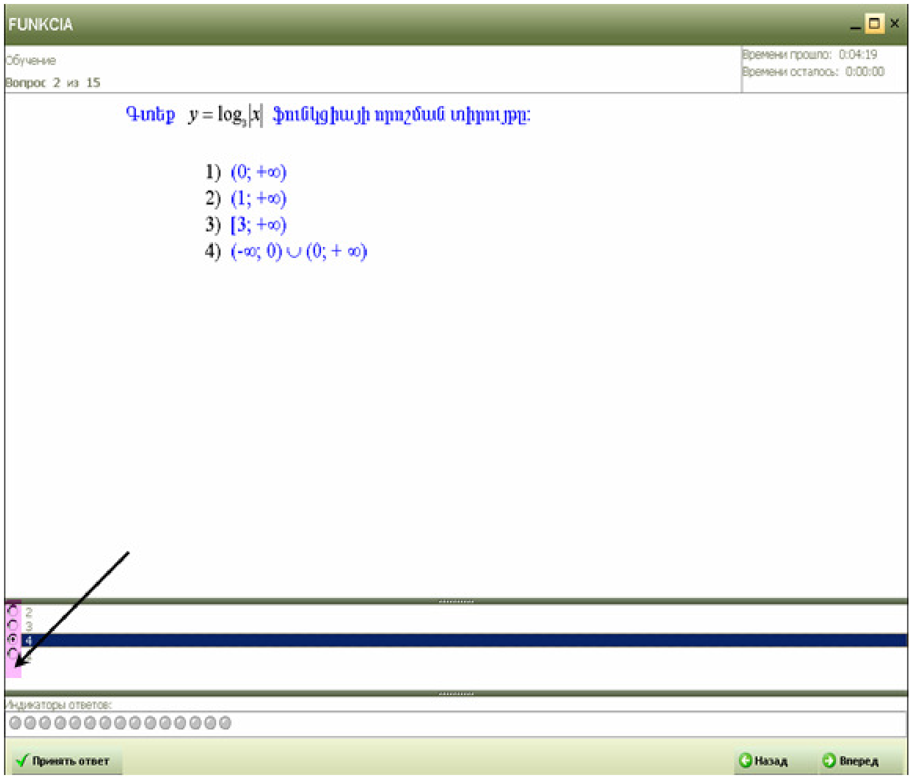
Նկ. 85

Եթե հարցին ճիշտ եք պատասխանել, ապա էկրանի ներքևի ձախ անկյունում հայտվում է կանաչ շրջանակ: Սխալ պատասխանի դեպքում շրջանակը կարմիր է (նկ. 86):



Նկ. 86

Մեկ ճիշտ պատասխան ունեցող հարցի դեպքում հնարավոր պատասխանների կողքին շրջանակներ են (նկ. 87):

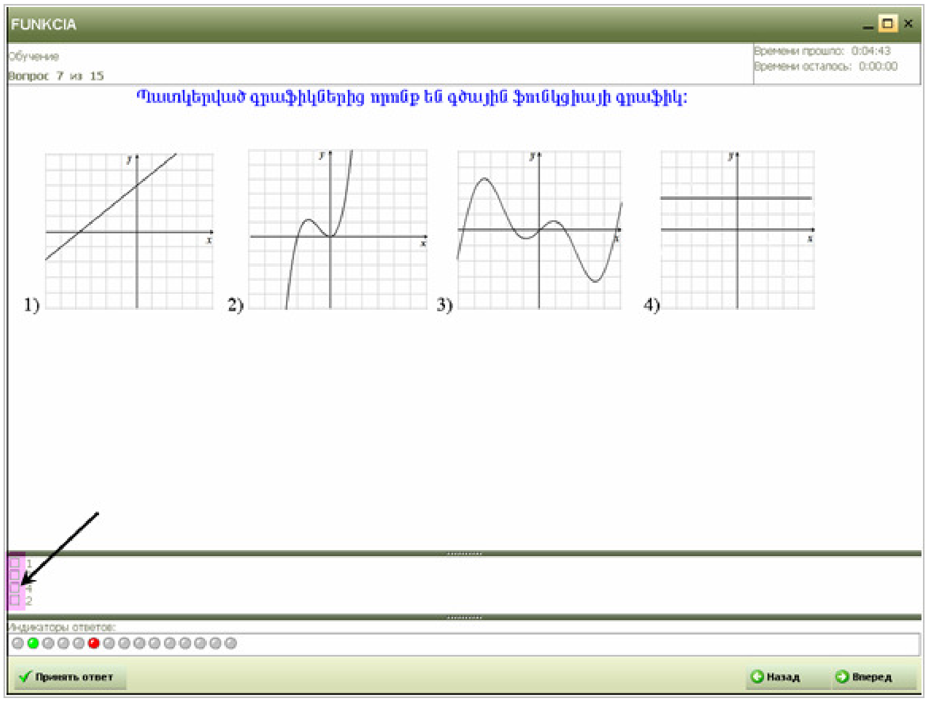


Նկ. 87

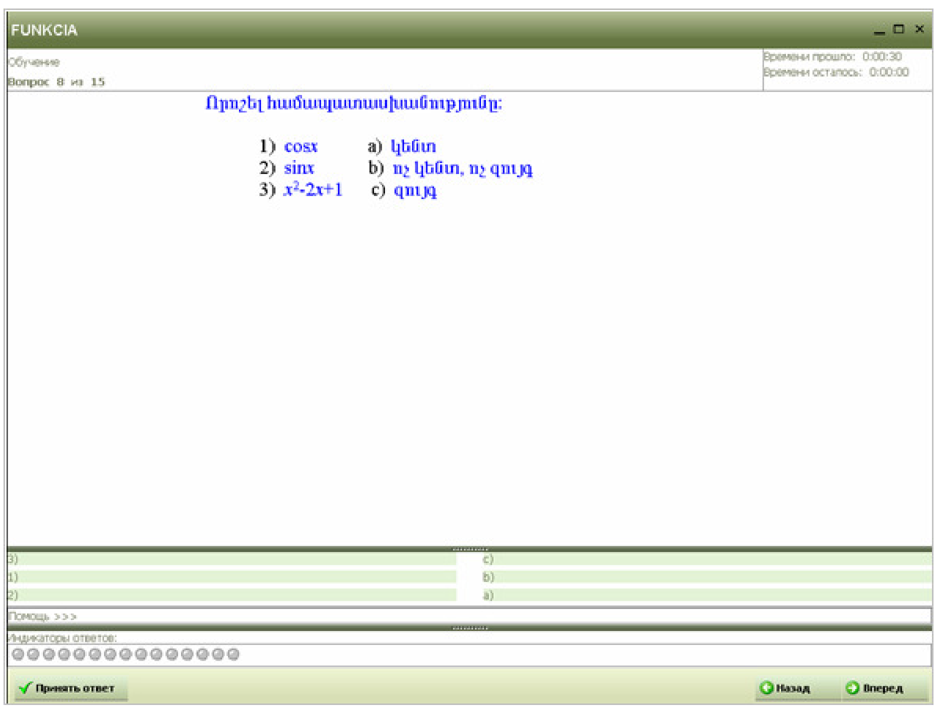
Մի քանի ճիշտ պատասխան ունեցող հարցի դեպքում հնարավոր պատասխանների կողքին քառակուսիներ են (նկ. 88):

Եթե պետք է որոշել համապատասխանությունը (նկ. 89), ապա պատասխանների բաժնում ձախ կողմում որևէ տողն ընտրելուց հետո աջ կողմում պետք է ընտրել դրան համապատասխանող տողը:

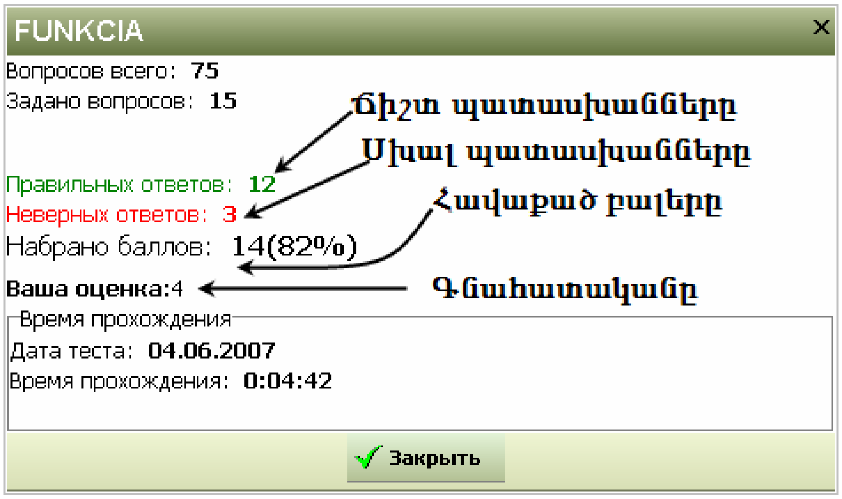
Բոլոր հարցերին պատասխանելուց հետո բացվող պատուհանում կտեսնեք թե քանի հարցի եք ճիշտ պատասխանել, քանիսին՝ սխալ: Կտեսնեք նաև հավաքած բալերը և գնահատականը (նկ. 90):


FUNKCIA
Обучение
Вопрос 7 из 15
Времени прошло: 0:04:43
Времени осталось: 0:00:00
Պատկերված գրաֆիկներից որոնք են գծային ֆունկցիայի գրաֆիկ:
1)
2)
3)
4)
Индикаторы ответов:
Принять ответ
Назад
Вперед

Նկ. 88

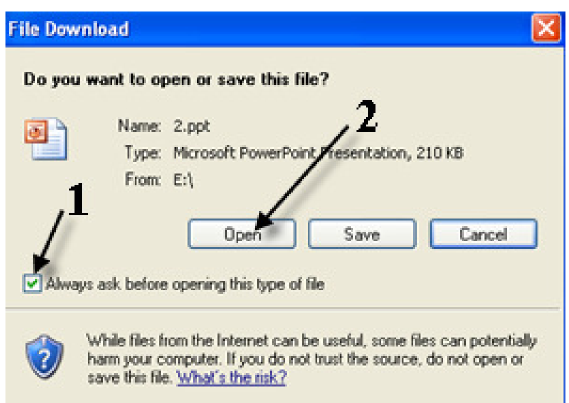

FUNKCIA
Обучение
Вопрос 8 из 15
Времени прошло: 0:00:30
Времени осталось: 0:00:00
Որոշել համապատասխանությունը:
1) cosx a) կենտ
2) sinx b) ոչ կենտ, ոչ զույգ
3) x²-2x+1 c) զույգ
Помощь >>>
Индикаторы ответов:
Принять ответ
Назад
Вперед

Նկ. 89

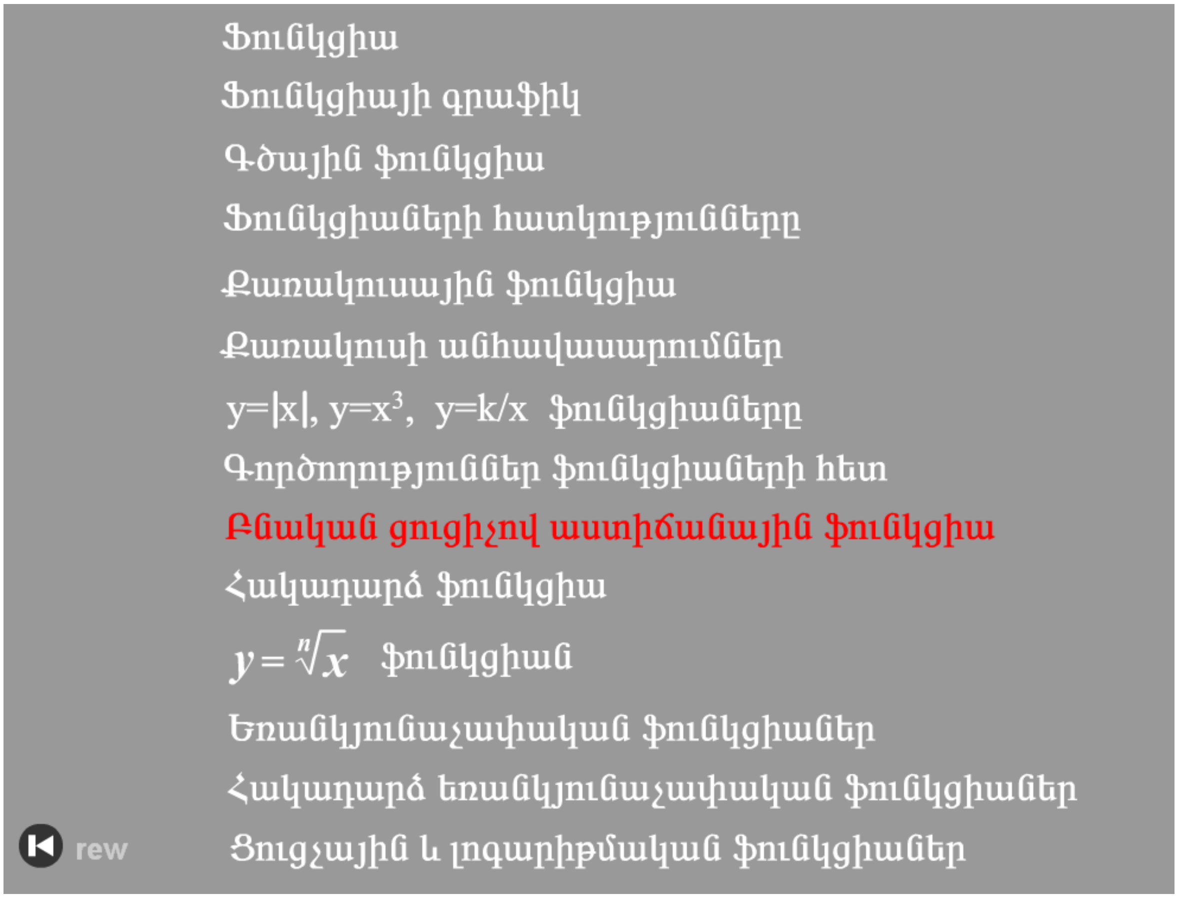


Նկ. 90

Սլայդներից օգտվելու համար Ձեր համակարգիչում պետք է տեղադրված լինի Microsoft Office PowerPoint փաթեթը: Եթե այն կա, ապա սեղմե՛ք «Սլայդ» գրություն-կոճակը (նկ. 78): Եթե բացվել է նկար 91-ում ներկայացված պատուհանը, ապա սեղմե՛ք 1 և 2 համարներով նշված դիրքերը: Հաջորդ բացվող պատուհանում ընտրեք Ձեզ անհրաժեշտ պարագրաֆի վերնագիր գրություն-կոճակը (նկ. 92):

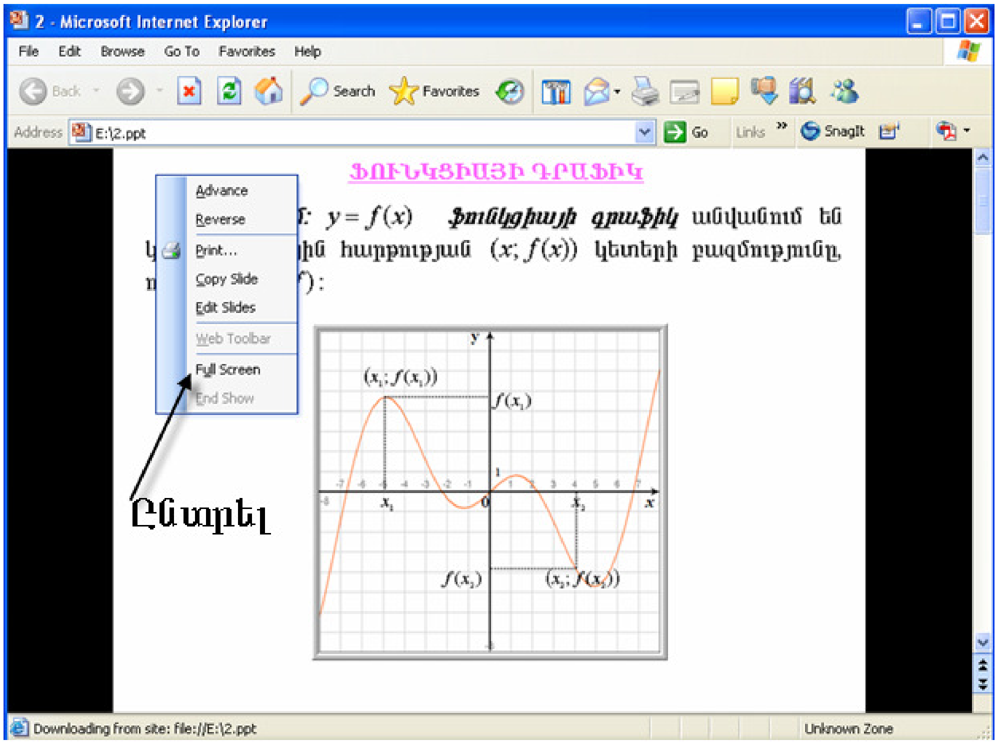


Նկ. 91



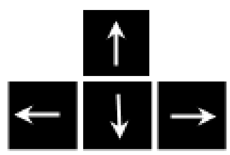
Նկ. 92

Ձեզ անհրաժեշտ ֆայլը բացելով կունենաք նկար 93-ում ներկայացված վիճակը: Ամբողջ էկրանով սլայդը դիտելու համար մկնիկի ցուցիչը պահելով այդ պատուհանի վրա՝ սեղմեք աջ ստեղնը, ապա բացվող ենթամենյուից ընտրեք Full Screen տողը (նկարում սլաքով ցույց է տրված այն):



Նկ. 93

Այդ պարագրաֆի մյուս սլայդներին անցնելու համար օգտվեք ստեղնաշարի նկար 94-ում ներկայացված կոճակներից:

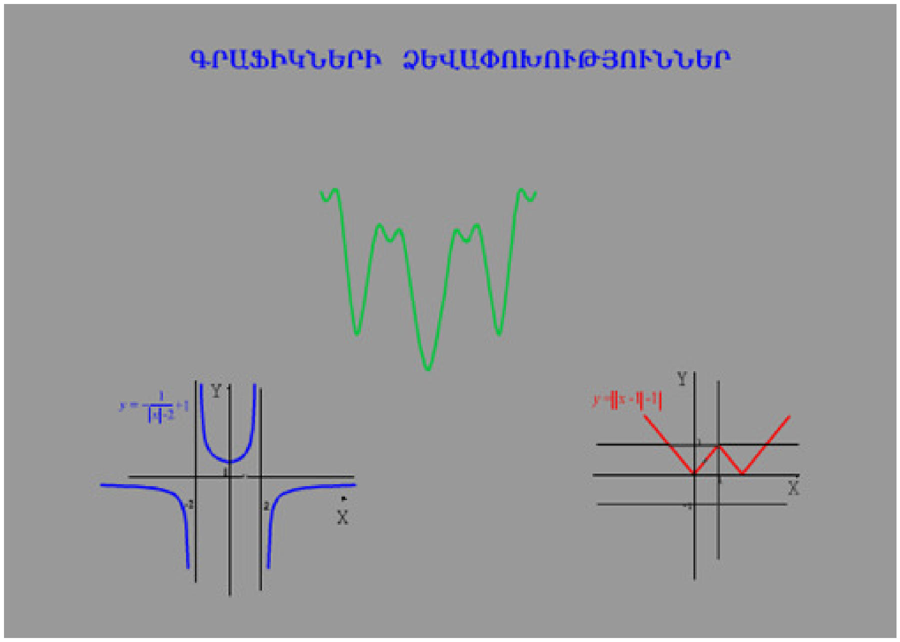


Նկ. 94

Սլայդների դիտումը ավարտելու համա սեղմեք ստեղնաշարի «Esc» կոճակը, որից հետո փակեք ֆայլը:

Անիմացիոն նյութերը վերաբերվում են ֆունկցիաների գրաֆիկներին և դրանց ձևափոխություններին: Այդ նյութերի բովանդակությունը և կառուցվածքը տե՛ս նկար 97-ում:

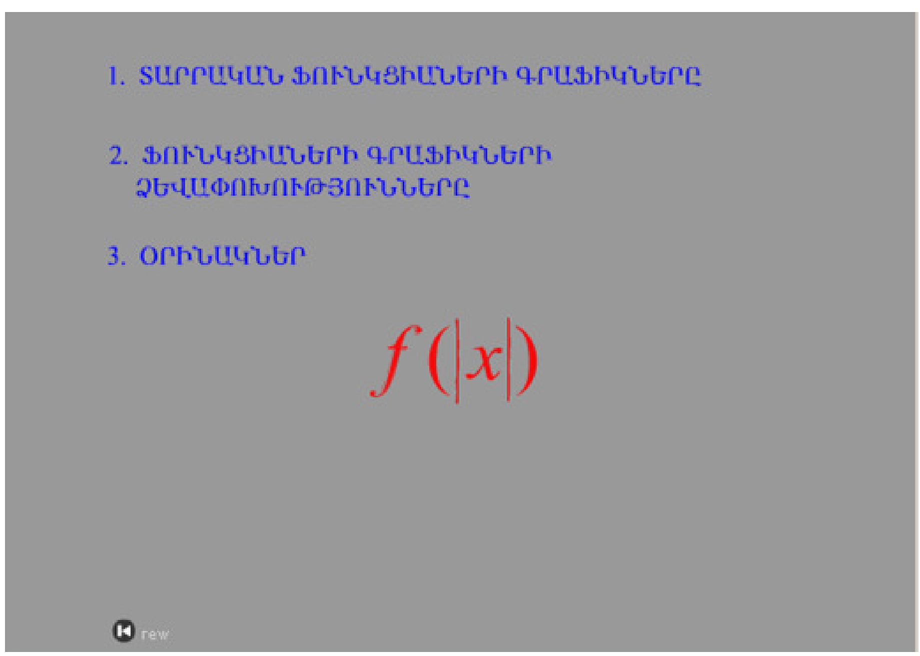
Անիմացիաները դիտելու համար սեղմե՛ք «Անիմացիա» գրություն-կոճակը (նկ. 78): Դրանից հետո Դուք կունենաք նկար 95-ում ներկայացված վիճակը:



Նկ. 95

Սեղմելով «Գրաֆիկների ձևափոխություններ» գրություն-կոճակը կանցնեք հաջորդ էջ և կունենաք նկար 96-ում ներկայացված վիճակը: Այնտեղ գրություն-կոճակների միջոցով կարող եք ընտրել առաջարկվող երեք բաժիններից որևէ մեկը կամ 

կոճակի միջոցով վերադառնալ նախորդ էջ:



Նկ. 96

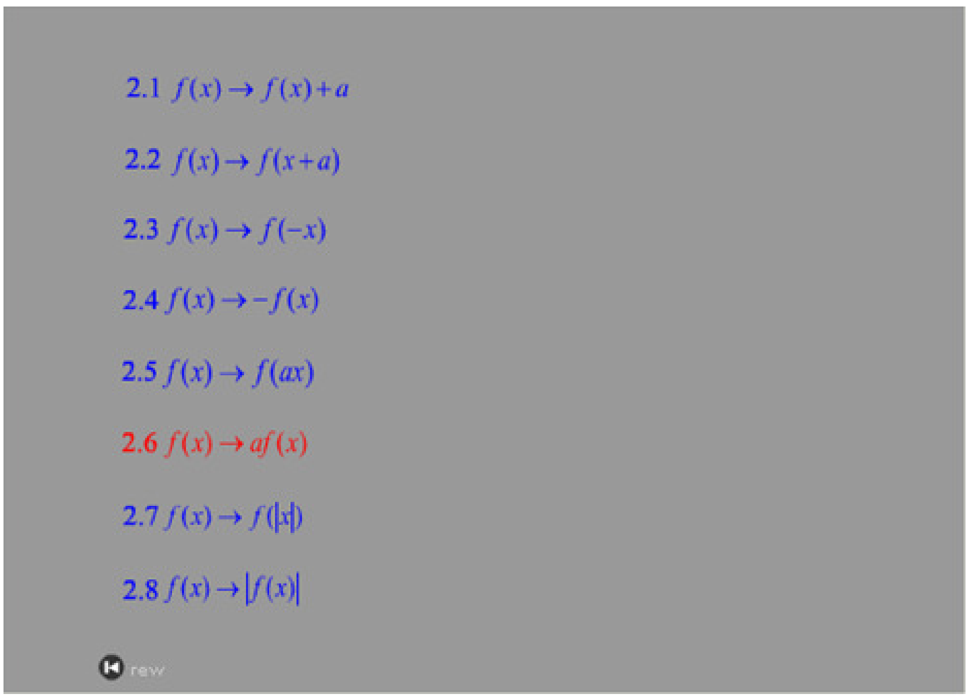
Գրաֆիկների ձևափոխություններ

- **Տարրական ֆունկցիաների գրաֆիկները**
- **Գրաֆիկների ձևափոխությունների տեսակները**
  - $y = f(x) + b$
  - $y = f(x+a)$
  - $y = Af(x)$
  - $y = -f(x)$
  - $y = f(kx)$
  - $y = f(-x)$
  - $y = f(|x|)$
  - $y = |f(x)|$
- **Օրինակներ**
  - $y = |x - 2|$
  - $y = -|x|$
  - $y = |-x|$
  - $y = |x-4| + 1$
  - $y = |1 - |1 - x||$
  - $y = \dfrac{1}{x-3}$
  - $y = -\dfrac{1}{x+1}$
  - $y = \dfrac{3x+6}{2x+5}$
  - $y = |x^2 - 4x + 3|$
  - $y = x^2 - 4|x| + 3$
  - $y = \left|\dfrac{x+3}{x-1}\right|$
  - $y = \dfrac{|x| - 3}{|x| - 2}$
  - $y = \dfrac{|x| + 2}{|x| + 1}$
  - $y = 3\cos\dfrac{x}{2}$
  - $y = |\sin x + \sqrt{3}\cos x|$

Նկ. 97

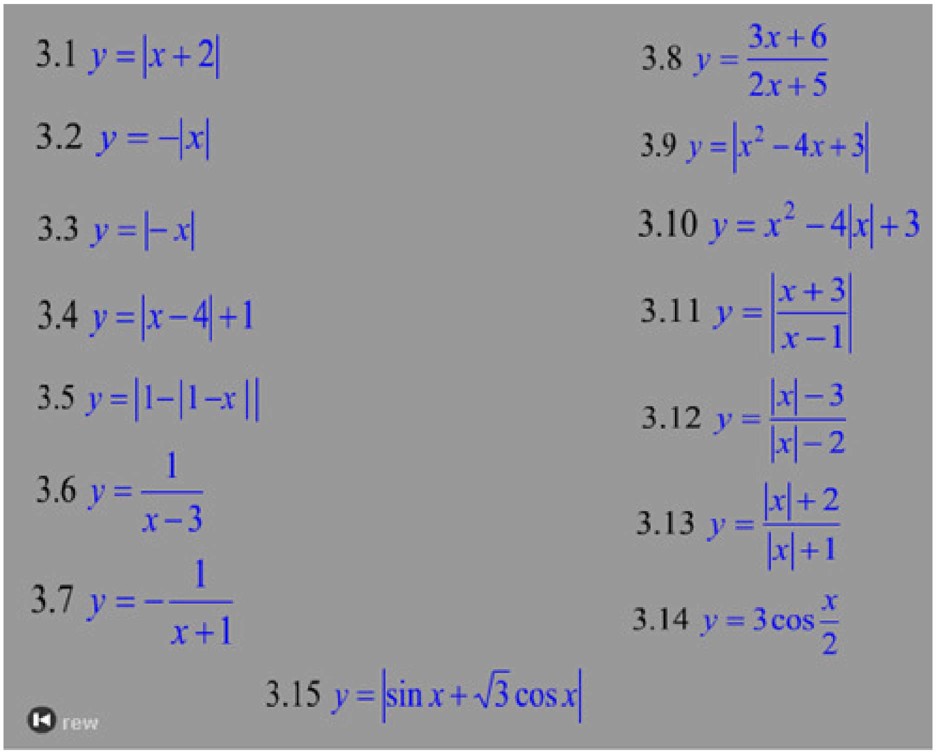
Եթե սեղմեք «Ֆունկցիաների գրաֆիկների ձևափոխությունները» գրություն-կոճակը, ապա կունենաք նկար 98-ում ներկայացված վիճակը և այնտեղ կարող եք ընտրել ձևափոխության ութ տեսակներից որևէ մեկը, այսինքն կարող եք դիտել այդ տիպի ձևափոխության մի քանի անիմացիոն օրինակ: Անիմացիաները զուգորդվում են ձայնային բացատրություններով (հայերեն):

Օգտվելով «stop», «play», «rew» կոճակներից` համապատասխանաբար կարող եք ցանկացած պահի կանգնեցնել անիմացիան, շարունակել անիմացիան, վերադառնալ նախորդ էջ (նկ. 100):

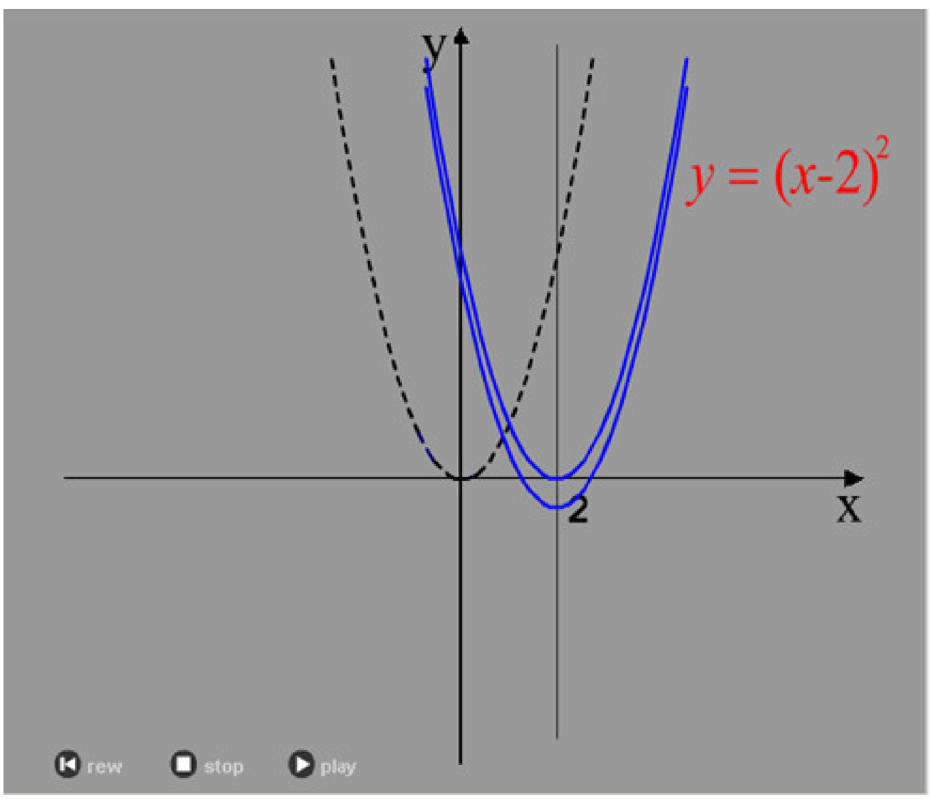


Նկ. 98

Եթե սեղմեք «Օրինակներ» գրություն-կոճակը, ապա կունենաք նկար 99-ում ներկայացված վիճակը և այնտեղ կարող եք ընտրել ներկայացված օհնակներից որևէ մեկը, այսինքն դիտել այդ ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցման անիմացման` զուգորդված ձայնային հայերեն բացատրություններով:


3.1 $y=|x+2|$
3.2 $y=-|x|$
3.3 $y=|-x|$
3.4 $y=|x-4|+1$
3.5 $y=|1-|1-x||$
3.6 $y=\frac{1}{x-3}$
3.7 $y=-\frac{1}{x+1}$
3.8 $y=\frac{3x+6}{2x+5}$
3.9 $y=|x^2-4x+3|$
3.10 $y=x^2-4|x|+3$
3.11 $y=\left|\frac{x+3}{x-1}\right|$
3.12 $y=\frac{|x|-3}{|x|-2}$
3.13 $y=\frac{|x|+2}{|x|+1}$
3.14 $y=3\cos\frac{x}{2}$
3.15 $y=|\sin x+\sqrt{3}\cos x|$
rew

Նկ. 99


y
$y=(x-2)^2$
2
x
rew
stop
play

Նկ. 100

Օգտվելով «stop», «play», «rew» կոճակներից՝ համապատասխանաբար կարող եք ցանկացած պահի կանգնեցնել անիմացիան, շարունակել անիմացիան, վերադառնալ նախորդ էջ (նկ. 100):

Ցանկացած էջում գտնվելիս, օգտվելով ստեղնաշարի «Esc» կոճակից, կարող եք վերադառնալ ամբողջ էկրանը չզբաղեցնող ռեժիմի և փակելով ֆայլը դուրս գալ ծրագրից:

Պատասխաններ

1. ա) 7; բ) 10; գ) $9\frac{2}{3}$: **2.** –1; 0,5; 3: **3.** ա) 115; բ) 54; գ) –2; դ) –37: **4.** ա) –2,2; բ) 1,8; գ) 1,2: **5.** ա) 0; –4; բ) –1: **6.** ա)$(-\infty;+\infty)$; բ) $(-\infty;+\infty)$; գ) $(-\infty;5)\cup(5;+\infty)$; դ) $(-\infty;-1)\cup(-1;4)\cup(4;+\infty)$; ե) $(-\infty;+\infty)$; զ) $[5;+\infty)$: **7.** ա) օրինակ $y=5-x$; բ) օրինակ $y=\frac{2}{x-7}$: **8.** ա) $(-\infty;+\infty)$; բ) $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$; գ) $[-9;+\infty)$: **9.** ա) այո; բ) ոչ; գ) այո; դ) ոչ; ե) ոչ; զ) այո: **10.** բ)-ն: **11.** ա) 4; 2; –3; 2; բ) ±1; ±2; –2, 4; գ) [–3; 4]; դ) $[-4;-2)\cup(2;4]$ $y>0$; (–2; 2) $y<0$: **12.** ա) –4; 2; 3; 5; –3; բ) –5; –6; 2; գ) [–5; 5]: **13.** ±2; $[-5;-2)\cup(2;5]$ $y>0$; (–2; 2) $y<0$: **14.** –5; –3; 0; 4; $[-6;-5)\cup(-3;0)\cup(4;5]$ $y>0$; $(-5;-3)\cup(0;4)$ $y<0$; [–3;5]: **17.** ա) 15; բ) $\frac{10}{3}$; –6; գ) –2; դ) չունի: **18.** ա) այո; բ) այո; գ) այո; դ) ոչ; ե) ոչ; զ) այո: **19.** 0; 6; 23; –44; –12; 4: **20.** ա) 6; –1; –7; –5; բ) 3,75; 1,5; 1; 2,25: **23.** ա) (0; 9,6); (4; 0); բ) (0; –28); (–40; 0); գ) (0; 6); (–5; 0); դ) (0; 2); (0,4; 0): **24.** $y=-\frac{11}{4}x+11$: **25.** ա) այո; բ) այո; գ) ոչ; դ) այո: **27.** ա) զուգահեռ են; բ) հատվում են; գ) հատվում են; դ) զուգահեռ են; ե) հատվում են; զ) հատվում են: **28.** ա) օրինակ $y=2{,}5x-1$; բ) օրինակ $y=x+4$: **29.** ա) օրինակ $y=3x+4$ և $y=3x-5$; բ) օրինակ $y=-x+3$ և $y=x$: **30.** ա) (1; 2); բ) (8; –6); գ) (–2; –110); դ) (1; 29); ե) (2; 28); զ) (4,4; –6): **31.** ա) [–2; 3] $\uparrow$; [–6; –2] և [3; 6] $\downarrow$; բ) $f_{մեծ.}$=4; $f_{փոքր.}$=–3: **33.** բ); դ); ե): **34.** ա); գ); զ): **35.** ա) այո; բ) այո: **36.** ա) այո; բ) այո: **37.** այո: **38.** ա); բ): **39.** բ)-ն: **40.** ա) $y=5$; $y=-3{,}2$; բ) $y=4x$; $y=-3x$; գ) $y=-x+7$; $y=-2x-3$: **41.** ոչ: **42.** ոչ: **47.** ա) 1,5625; 0,5625; 2,25; բ) $\pm2\sqrt{5}$; $\pm2\sqrt{3}$; $\pm2\sqrt{2}$: **48.** ա) 4,5; 0,5; 4,5; բ) ±1; $\varnothing$; 0: **50.** ա) ոչ; բ) ոչ; գ) այո; (2; 3); (3; 6): **51.** ա) այո; բ) ոչ; գ) այո: **54.** ա) $\left[\frac{1}{24};+\infty\right)$; բ) $[1{,}82;+\infty)$; գ) $(-\infty;2{,}5]$; դ) $\left(-\infty;-4\frac{1}{3}\right]$: **55.** –12; 24: **56.** 2: **57.** ա) $c>13$; բ) $c>8$: **59.** ա) –7; 12; բ) –5; 6: **60.** ա) (–4; 4); բ) $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right)$; գ) $\left(-\infty;-3\sqrt{10}\right)\cup\left(3\sqrt{10};+\infty\right)$;

դ) $(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$; ե) $\left(-\frac{2}{3};0\right)$; զ) $(-\infty;0)\cup(7;+\infty)$:

61. ա) $(-8;6)$; բ) $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)\cup(2;+\infty)$; գ) $(-\infty;-3)\cup(5;+\infty)$; դ) $(1;1{,}2)$;
ե) $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$; զ) $\varnothing$; է) $(0;0{,}9)$; ը) $(-\infty;0)\cup(3{,}5;+\infty)$:
62. ա) $(-\infty;-2{,}5]\cup[1;+\infty)$; բ) $[-2;3]$; գ) $(-\infty;-7)\cup(0{,}5;+\infty)$;
դ) $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$; ե) $\left[\frac{1}{2};\frac{5}{3}\right]$; զ) $(-\infty;+\infty)$; է) $(-\infty;0)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$;
ը) $(-2\sqrt{2};2\sqrt{2})$: **63.** ա) $\{2{,}5\}$; բ) $(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$ գ) $\varnothing$; դ) $(-\infty;+\infty)$:
64. ա) այո; բ) այո; գ) այո; դ) այո: **65.** ա) այո; բ) ոչ; գ) այո; դ) ոչ:
66. ա); գ); դ): **67.** ա) 2; բ) 0; գ) 1; դ) 2: **68.** ա) այո; բ) ոչ; գ) ոչ:
69. ա) այո; բ) այո; գ) այո; դ) այո: **70.** ա) այո; բ) այո; գ) այո;
դ) այո: **71.** ա) ոչ; բ) այո; գ) ոչ: **72.** ա) այո; բ) այո; գ) ոչ:
73. ա) այո; բ) այո; գ) ոչ; դ) այո: **74.** ա) ոչ; բ) այո; գ) ոչ:
75. ա) $k<0$; բ) $k>0$: **76.** ա) $[0;2]$; բ) $(4;5]$; գ) $\{3\}$:
77. ա) $[-3;1)\cup(1;5]$; բ) $\varnothing$: **78.** ա) $F(x)=9x-4$, $D(F)=(-\infty;+\infty)$;
բ) $F(x)=\frac{2}{2x^2-3x+5}$, $D(F)=(-\infty;+\infty)$; գ) $F(x)=x$,
$D(F)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; դ) $F(x)=\frac{2}{3x-1}$, $D(F)=\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\infty\right)$,
ե) $F(x)=\frac{5x^2-6x+8}{x^2}$, $D(F)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;
զ) $F(x)=6x^2-9x+14$, $D(F)=(-\infty;+\infty)$; է) $F(x)=|2x^2-3x+5|$,
$D(F)=(-\infty;+\infty)$; ը) $F(x)=2x^2-3|x|+5$, $D(F)=(-\infty;+\infty)$;
թ) $F(x)=\frac{6-x}{x}$, $D(F)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$: **79.** ա) $f(x)=x+2$,
$g(x)=\frac{4}{x}$, $y=g(f(x))$; բ) $f(x)=x^2-2$, $g(x)=x-1$, $y=f(g(x))$;
գ) $f(x)=2x-7$, $g(x)=x^3$, $y=f(g(x))$; դ) $f(x)=|x|$, $g(x)=7x+2$,
$y=f(g(x))$; ե) $f(x)=x+3$, $g(x)=x^3$, $y=g(f(x))$; զ) $f(x)=|x|$,
$g(x)=5x-4$, $y=g(f(x))$: **83.** ա) այո; բ) ոչ; գ) այո; դ) ոչ
85. ա) $f(3{,}7)<f(4{,}2)$; բ) $f(-5{,}2)<f(-6{,}5)$; գ) $f(-7)>f(6)$;

դ) $f(37) > f(-29)$: **86.** ա) $g(8{,}9) > g(7{,}6)$; բ) $g(-4{,}6) > g(-5{,}5)$; գ) $g(-10) < g(7)$; դ) $g(-63) < g(63)$: **89.** ա) $3^{16} < 3^{22}$; բ) $0{,}3^{16} > 0{,}3^{22}$: **90.** ա) $2^{17} < 2^{19}$; բ) $0{,}2^{17} > 0{,}2^{19}$: **94.** ա) $y = \frac{x-3}{7}$, բ) $y = \frac{2}{x}$, գ) $y = -\frac{2x+3}{x}$, դ) $y = -x$, $x \in [0;+\infty)$, ե) $y = \sqrt{x+6}$, զ) $y = 4 - \sqrt{17+x}$: **98.** գ) $(-\infty;-5) \cup (-5;+\infty)$, ե) $\left(-\infty;\frac{4}{3}\right]$, զ) $(-\infty;1] \cup [3;+\infty)$: **100.** ա) $\frac{2\pi}{3}$, բ) 4π, գ) 2π, դ) 2π, ե) $\frac{\pi}{4}$, զ) 2π, է) $\frac{2\pi}{5}$, ը) $\frac{2\pi}{3}$, թ) $\frac{\pi}{3}$: **102.** ա) $[0;1]$, բ) $\left[\frac{-3-\sqrt{21}}{2};\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{13}}{2};\frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right]$, գ) $[0;1]$, դ) $[-1;1)$, ե) $[0;+\infty)$, զ) $[-1;1]$:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ