

## VIII-IX классы

## Пропорциональные отрезки

1. В прямоугольный треугольник вписана полуокружность, радиус которой равен 12 см. Центр полуокружности делит гипотенузу в отношении 3:4. Определить отрезки на которые делится гипотенуза.
2. Из вершины тупого угла В параллелограмма ABCD проведена высота BE на боковую сторону AD и высота BF на сторону CD. Найти отрезки, на которые этими высотами делится боковая диагональ параллелограмма, равная 28 см, если  $AE:ED=3:8$   $CF:FD=2:3$ .
3. Основание AC равнобедренного треугольника ABC является полуокружности, которая пересекает сторону AB в точке M, а BC в точке N. Определить площадь треугольника, если хорда  $MN=6$  см и  $AM:BM=2:3$ .
4. В равнобедренном треугольнике ABC ( $AB=BC$ ) через точку пересечения медиан проведена прямая, параллельная AC и пересекающая сторону AB в точке M. Определить отрезки, на которые этой прямой делится сторона AB, если  $MN=12$  см, а площадь треугольника ABC равна  $108 \text{ см}^2$ .
5. В равнобедренной трапеции ABCD ( $AD \parallel BC$ ) высота BE делит диагональ AC в отношении 2:3, считая от вершины A. Определить продолжения боковых сторон трапеции до взаимного пересечения, если  $AD=28$  см и  $AB=20$  см.
6. В параллелограмме ABCD биссектриса тупого угла B пересекает сторону AD в точке E. Через точку E проведена прямая, параллельная диагонали AC и пересекающая сторону CD в точке F. Определить стороны параллелограмма, если  $ED=a$  и  $DF=b$ .
7. В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает катет BC в точке D. Через точку D проведена прямая параллельно AC, пересекающая гипотенузу AB в точке E. Определить AC, если  $AE=15$  см и  $CD=12$  см.
8. В треугольнике ABC медиана BD и биссектриса A пересекаются в точке O. Через точку O проведена прямая, параллельная AC и пересекающая AB в точке F и BC в точке K. Определить AB и BC, если  $AF=12$  см,  $AC=40$  см и  $KC=14$  см.
9. Из вершины B равнобедренного треугольника ABC ( $AB=BC$ ) проведена дуга окружности, которая касается стороны AC и пересекает стороны AB и BC в точках D и E. Определить периметр треугольника ABC, если отрезок DE равен 24 см и удален от стороны AC на 4 см.
10. В треугольнике ABC через точку пересечения медиан проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке D и сторону BC в точке E. Определить отрезок DE, если  $AD+EC=16$  см,  $AB:BC=3:5$  и периметр треугольника ABC равен 75 см.
11. В треугольнике ABC через точку пересечения биссектрис проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке D, а BC в точке E. Определить стороны AB и BC, если  $AC=a$ ,  $AD=b$  и  $EC=c$ .
12. Через точку D, взятую на стороне AC треугольника ABC, проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону BC в точке E. Определить сторону AC, если  $AD+EC=a$ ,  $BD+EB=b$  и  $ED=c$ .
13. На стороне AB треугольника ABC отложен отрезок BE, равный высоте BD треугольника, и через точку E проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая высоту BD в точке K, а сторону BC в точке F. Определить площадь треугольника ABC,  $AE=2$  дм и  $FC=3,4$  дм.
14. В равнобедренный треугольник ABC ( $AB=BC$ ) вписана окружность, и к окружности проведена касательная, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке D, а сторону BC в точке E. Определить отрезок DE, если  $AD=15$  см и  $BD=75$  см.
15. В равнобедренный треугольник ABC вписана окружность, касающаяся боковых сторон треугольника в точках D и E. Определить периметр треугольника ABC,

- если хорда DE равна 12 см, а отрезок касательной, заключенной между боковыми сторонами и параллельной основанию, равен 10 см.
16. На сторонах AB и BC треугольника ABC отложены отрезки BE и BF, равные высоте BD треугольника, и через точки E и F проведены прямые, параллельные стороне AC. Определить стороны AB и BC, если отрезки их, заключенные между проведенными прямыми, равны 9 см и 12 см, расстояние между этими прямыми равно 6 см.
  17. Биссектриса острого угла равнобедренной трапеции делит боковую сторону на отрезки 20 см и 30 см, считая от меньшего основания трапеции, которое равно 6 см. Определить площадь трапеции.
  18. В треугольнике ABC проведены высота BD и отрезок DE, параллельный стороне BC. Определить сторону BC, если  $BE=10$  см,  $CD=15$  см и  $AD+AE=15$  см.
  19. В равнобедренный треугольник ABC ( $AB=BC$ ) вписана окружность, которая касается стороны AC в точке D, а стороны BC в точке E; проведены отрезки DF и EK, параллельные стороне AB (точка F лежит на стороне BC, точка K на стороне AC). Определить сторону BC, если  $FE=a$ ,  $KD=b$ .
  20. В равнобедренный треугольник ABC ( $AB=BC$ ) вписана окружность, и к ней проведена касательная, параллельная стороне BC. Эта касательная пересекает сторону AB в точке D, а сторону AC в точке E. Определить стороны AB и AC, если  $EC=a$  и  $BD=b$ .
  21. Найти множество точек, которые делят отрезки прямых, лежащие между двумя данными параллельными прямыми, в отношении  $m:n$  (внутренним образом).
  22. (\*) Даны две точки P и Q и две параллельные прямые AB и CD. Через точку P провести секущую так, чтобы отрезок ее, заключенный между прямыми AB и CD, делился в отношении  $m:n$  перпендикуляром, опущенным на нее из точки Q.
  23. (\*) Построить окружность, проходящую через вершины A и B треугольника ABC, если известно, что центр ее делит один из отрезков, проведенных из вершины C до пересечения с AB, в отношении 1:2, считая от вершины C.
  24. (\*) По двум данным точкам A и B построить окружность, центр которой должен делить расстояние между данными прямыми CD и EF в данном отношении  $m:n$ .

#### Свойство биссектрисы угла треугольника

25. В равнобедренном треугольнике ABC ( $AB=BC$ ) биссектриса угла A делит сторону BC в отношении 2:3, считая от вершины B. Через точку пересечения биссектрис треугольника проведена прямая, параллельная стороне BC; отрезок этой прямой, заключенный между сторонами AB и AC, равен 10 см. Определить сторону AC.
26. В равнобедренном треугольнике ABC ( $AB=BC$ ) биссектриса угла A делит сторону BC в отношении 5:8, считая от вершины B. Средняя линия треугольника, параллельная стороне AC, делится этой биссектрисой на отрезки, разность которых равна 12 см. Определить периметр треугольника.
27. Доказать, что если в треугольнике ABC провести медиану AM и биссектрисы углов AMB и AMC до пересечения со сторонами треугольника в точках E и D, то отрезок ED будет параллелен стороне BC.
28. AD- биссектриса а треугольнике ABC, DF и DE-соответственно углов ADB и ADC. Доказать, что  $AF \cdot BD \cdot CE = BF \cdot DC \cdot AE$ .
29. Из вершины угла A треугольника ABC проведены биссектриса BD и медиана BE (точки D и E лежат на стороне AC). Определить сторону AC, если  $DE=a$ , и  $AB:BC=b:c$  ( $AB < BC$ ).
30. Диагональ равнобедренной трапеции делится биссектрисой острого угла в отношении 2:3, биссектрисой тупого угла - в отношении 5:6, считая от вершины тупого угла. Средняя линия трапеции равна 28 см. Определить боковую сторону трапеции.
31. В равнобедренной трапеции биссектриса острого угла, который равен  $60^\circ$ , делит диагональ трапеции в отношении 4:11, а меньшее основание на отрезки, разность которых равна 6 см. Определить среднюю линию трапеции.

32.  $AE$  и  $BD$  биссектрисы в треугольнике  $ABC$ , пересекающиеся в точке  $O$  (точки  $E$  и  $D$  лежат на сторонах треугольника). Определить отношение  $AO:OE$ , если  $AD=8$  см,  $DC=12$  см и  $CE=10$  см.
33. В треугольнике  $ABC$  биссектриса угла  $B$  точкой пересечения делит сторону  $AC$  на отрезки  $AD=12$  см и  $DC=8$  см. Через точку пересечения биссектрис треугольника проведена прямая, параллельная стороне  $AB$ . Отрезок этой прямой, заключенный между сторонами  $AC$  и  $BC$ , делится биссектрисой  $BD$  отношении  $1:2$ . Определить стороны  $AB$  и  $BC$ .
34. В треугольник вписана полуокружность, радиус которой равен  $12$  см. Центр этой полуокружности делит одну из сторон треугольника на отрезки равные  $15$  см и  $20$  см. Определить неизвестные стороны треугольника.
35. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса прямого угла до пересечения с гипотенузой  $AB$  в точке  $D$ . Из вершины большего острого угла  $A$  опущен перпендикуляр на биссектрису  $CD$  и продолжен до пересечения со стороной  $BC$  в точке  $E$ . Определить отрезки  $AD$  и  $BD$ , если  $BE=1$  дм и  $EC=3$  дм.
36. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AB=BC$ ) биссектриса угла  $A$  пересекает высоту  $BD$  в точке  $O$ , а сторону  $BC$  в точке  $E$ . Определить сторону  $AC$ , если  $BO:OD=4:3$  и  $EC=12$  см.
37. В треугольнике  $ABC$  биссектриса угла  $A$  пересекает высоту  $BD$  в точке  $O$ , а сторону  $BC$  в точке  $E$ . Определить сторону  $AC$ , если  $BO=7,5$  см,  $OD=4,5$  см и  $BE:EC=5:7$ .
38. В треугольнике  $ABC$  биссектрисы  $BD$  и  $AE$  пересекаются в точке  $O$ . Определить сторону  $AC$ , если  $AB=12$  см,  $AO:OE=3:2$  и  $AD:DC=6:7$ .
39. В треугольнике  $ABC$  вписана окружность, которая касается стороны  $AC$  в точке  $E$ . Биссектриса угла  $B$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $D$ . Определить стороны треугольника, если периметр его равен  $80$  см,  $ED=4$  см, и  $AD:DC=3:5$ .
40. В треугольнике  $ABC$  проведены высота  $BD$  и биссектрисы углов  $ABD$  и  $DBC$ , которые пересекают сторону  $AC$  соответственно в точках  $E$  и  $F$ . Определить периметр треугольника  $ABC$ , если  $AE:ED=5:3$ ,  $DF=10$  см и  $FC=26$  см.

#### Подобие треугольников

41. Стороны треугольника равны  $13$  см,  $14$  см и  $15$  см. Параллельно средней по величине стороне треугольника проведена прямая, которая периметр треугольника пополам. Определить отрезок этой прямой, заключенный между сторонами треугольника.
42. В равнобедренном треугольнике через точку пересечения биссектрис проведена прямая, параллельная основанию; отрезок этой прямой, заключенный между сторонами равен  $6$  см. Определить стороны треугольника, если его периметр равен  $32$  см.
43. Через центр вписанной в треугольник  $ABC$  окружности проведена прямая, параллельная стороне  $AC$  и пересекающая сторону  $AB$  в точке  $D$ , а сторону  $BC$  в точке  $E$ . Определить сторону  $AC$ , если  $BD=a$ , и  $BE=b$  и  $DE=c$ .
44. В равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна  $2$  дм, а основание  $2,4$  дм, вписана окружность, и к ней проведена касательная, параллельная основанию треугольника. Определить периметр треугольника отсекаемого касательной.
45. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AB=BC$ ) через вершину  $A$  проведена прямая, пересекающая высоту  $BD$  в точке  $O$ , а сторону  $BC$  в точке  $E$ . Определить отрезок  $AE$ , если  $AC=6$  см,  $OD=4$  см и  $OB=12$  см.
46. Определить диагонали параллелограмма, стороны которого равны  $a$  и  $b$ , а больший угол между диагоналями равен большему углу параллелограмма.
47. В прямоугольнике  $ABCD$   $AB=4$  см и  $BC=10$  см. На стороне  $BC$  взята точка  $M$  так, что проведенные отрезки  $AM$  и  $MD$  образуют прямой угол. Определить отрезки  $BM$  и  $MC$ .
48. Через вершину угла  $A$  треугольника  $ABC$  проведена прямая, пересекающая сторону  $BC$  в точке  $D$  так, что  $\angle ADC = \angle BAC$ . Через точку  $D$  проведена прямая,

- параллельная стороне  $AC$  и пересекающая сторону  $AB$  в точке  $E$ . Определить стороны треугольника  $AED$ , если  $AB=18$  см,  $BC=24$  см и  $AC=12$  см.
49. В равнобедренной трапеции перпендикуляр, опущенный из вершины острого угла на противоположную боковую сторону, делит ее на отрезки в 12 дм и 3 дм, считая от большего основания, которое равно 20 дм. Определить продолжение боковых сторон до взаимного пересечения.
  50. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $A$  проведены касательные к окружностям, которые пересекают их в точках  $D$  и  $C$  (касательная к одной окружности пересекает другую окружность). Доказать, что хорда  $AB$  есть средняя пропорциональная между хордами  $BC$  и  $BD$ .
  51. Через вершины углов  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  проведены прямые, пересекающие противоположные стороны соответственно в точках  $E$  и  $D$  так, что  $\angle DBC = \angle EAC$ . Точки  $E$  и  $D$  соединены отрезком прямой. Доказать, что, треугольник  $DEC$  подобен треугольнику  $ABC$ , и записать равенство соответственных углов.
  52.  $BD$  и  $AE$ -высоты равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB=BC$ ). Определить боковую сторону треугольника, если  $BD:AE=5:6$ , а отрезок прямой, соединяющий точки  $E$  и  $D$ , равен 15 см.
  53. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Доказать, что
    - а) радиус есть средняя пропорциональная между отрезками, на которые боковая сторона делится точкой касания;
    - б) диаметр есть средняя пропорциональная между основаниями трапеции.
  54. Около треугольника  $ABC$  вписана окружность. Через вершину  $A$  проведена касательная, а через вершину  $B$ - прямая, параллельная касательной, до пересечения со стороной  $AC$  в точке  $D$ . Доказать, что отрезок  $AB$  есть среднее геометрическое между отрезками  $AC$  и  $AD$ .
  55. В треугольнике  $ABC$  через точку  $D$ , взятую на стороне  $AB$ , проведена прямая до пересечения со стороной  $AC$  в точке  $E$  так, что  $AD:BE=AC:AB$ . Определить отрезки  $AD$  и  $DE$ , если  $AD+DE=0,9$  дм,  $BC=3$  дм и  $AC=2,4$  см.
  56. Через вершину  $B$  треугольника  $ABC$  проведена прямая, пересекающая сторону  $AC$  в точке  $D$  так, что  $AB:AD=AC:AB$ . Определить отрезки  $AD$  и  $BD$ , если  $AB=1,8$  дм,  $BC=2,4$  дм и  $AC=3,6$  дм.
  57. Дан треугольник  $ABC$ , у которого  $AB=9$  см,  $BC=12$  см и  $AC=6$  см. На стороне  $AB$  отложен  $AD=4$  см, и точка  $D$  соединена отрезком прямой с вершиной  $C$ . Определить отрезок  $CD$ .
  58. Боковые стороны трапеции равны 10 см и 15 см, а меньшая диагональ равна 12 см и является средней пропорциональной между основаниями трапеции. Определить основания трапеции.
  59. Основания трапеции равны 4 см и 9 см, а одна из диагоналей 6 см. Определить боковые стороны трапеции, если одна из них больше другой на 2,5 см.
  60. В треугольнике  $ABC$   $AB=12$  см,  $BC=18$  см и  $AC=15$  см. Из точки  $D$ , взятой на стороне  $AC$ , проведен перпендикуляр  $DE$  к стороне  $BC$ , а из точки  $E$ - перпендикуляр  $EF$  к стороне  $AB$ . Определить расстояние  $DF$ , если  $DE=8$  см и  $EF=12$  см.
  61. В треугольник  $ABC$  вписан параллелограмм так, что один из углов совпадает с углом  $A$ , а остальные вершины параллелограмма лежат на сторонах треугольника. Периметр параллелограмма равен 60 см, а стороны треугольника равны  $AB=26$  см,  $BC=52$  см и  $AC=39$  см. Определить диагональ параллелограмма, лежащую против угла  $A$ .
  62. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса угла  $B$ , которая пересекает сторону  $AC$  в точке  $D$  так, что  $\angle ADB = \angle ABC$ . Определить стороны  $AB$  и  $BC$ , если  $AD=8$  см и  $CD=10$  см.
  63. В равнобедренной трапеции  $ABCD$  диагональ  $AC$  перпендикулярна боковой стороне  $CD$  и делит высоту  $BE$  на отрезки  $BF=7$  см и  $FE=9$  см. Определить меньшее основание трапеции.
  64. В треугольнике  $ABC$  биссектриса угла  $B$  делит сторону  $AC$  на отрезки  $AD=a$  и  $DC=b$ . Через вершину угла  $A$  проведена прямая, пересекающая сторону  $BC$  в точке  $E$  так, что  $\angle AEC = \angle BDC$ . Определить стороны  $AB$  и  $BC$ , если  $EC=c$ .

65. В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC ( $AB=BC$ ). Через вершины углов В и С проведены касательные к окружности до пересечения в точке D. Определить отрезки, на которые делится сторона BC прямой, проходящей через точки А и D, если  $AB=a$  и  $AC=b$ .
66. В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC ( $AB=BC$ ). Из вершины А опущен перпендикуляр на сторону BC и продолжен до пересечения в точке Е с касательной к окружности, проходящей через вершину В. Определить BE, если AE делит высоту BD на отрезки, равные а и b, считая от вершины В.
67. Дана трапеция ABCD, у которой  $AB=CD=6$  см,  $BC=13$  см и  $AD=16$  см. На меньшем основании BC взята такая точка М, что проведенные отрезки прямых AM и DM образуют угол AMD, равный ABC. Определить отрезки AM и DM.
68. В равнобедренной трапеции ABCD через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям и пересекающая боковую сторону CD в точке Е. Через точку Е проведена прямая, параллельная диагонали AC и пересекающая большее основание в точке F. Определить меньшее основание BC, если  $DE=12$  см,  $DF=18$  см и периметр трапеции равен 64 см.
69. В трапеции ABCD диагонали AC и BD пересекаются в точке О. Определить диагонали трапеции, если  $AD=a$ ,  $DC=b$ .  $AB=c$  и  $\angle AOD = \angle ABC$ .
70. В треугольнике ABC через точку D, взятую на стороне AC, проведены две прямые: одна параллельна стороне AB и пересекает сторону BC в точке F, другая пересекает сторону AB в точке Е так, что  $\angle EDF = \angle C$ . Определить стороны AB и BC, если  $AD=a$ ,  $DC=b$ .  $AE=c$  и  $ED=d$ .
71. Основание равнобедренного треугольника равно а, а боковая сторона- b. Определить расстояние между основаниями равных высот треугольника.
72. В треугольнике ABC медиана AE делит высоту BD на отрезки, равные  $3\frac{1}{3}$  см и  $4\frac{2}{3}$  см. Определить стороны AB и BC, если  $AC=21$  см.
73. В прямоугольный треугольник вписана окружность, и через точки касания окружности с катетами проведены прямые, параллельные гипотенузе. Отрезки этих прямых, заключенные между катетами, равны 155 см и 20 см. Определить гипотенузу треугольника.
74. В треугольнике ABC через точку О, точку пересечения медианы AE и биссектрисы BD, проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая стороны AB в точке F и BC в точке К. Определить сторону AC, если  $OF=10$  см и  $OK=15$  см.
75. В треугольнике ABC биссектриса угла В пересекает сторону AC в точке D. Через точку D проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке Е так, что  $\angle BDE = \angle A$ . Определить стороны AB и AD, если  $CD=a$ ,  $EC=b$  и  $BD=c$ .
76. Через вершины А и В треугольника ABC проведены две прямые: первая пересекает сторону BC в точке D, вторая- сторону AC в точке Е; О-точка их взаимного пересечения. Определить стороны AB и BC, если  $AO=36$  см,  $OD=9$  см.  $OB=18$  см,  $OE=18$  см и  $BD=12$  см.
77. Основание равнобедренного треугольника равно 32 см, а внутренний отрезок прямой, проходящей через точку пересечения высот параллельно основанию, равен 14 см. Определить боковую сторону треугольника.
78. В окружность вписан четырехугольник ABCD, у которого  $AB=19$  см,  $CD=15$  см,  $BC=7$  см и  $AD=21$  см. Стороны AB и CD продолжены до взаимного пересечения в точке М. Определить отрезки MB и MC.
79. Высота BD треугольника ABC является диаметром окружности, которая пересекает стороны AB в точке М и BC в точке N. Точки М и N соединены отрезком прямой. Доказать, что треугольник BMN подобен треугольнику ABC и

$$MN = \frac{bh^2}{ac}, \text{ где } a, b \text{ и } c - \text{стороны треугольника, } h - \text{высота BD.}$$

Подобие многоугольников

80. В параллелограмме ABCD отрезки, соединяющие последовательно середины сторон, образуют параллелограмм EFKL, углы которого равны соответственно углам данного параллелограмма. а) Доказать, что параллелограмм EFKL подобен параллелограмму ABCD. б) Определить стороны параллелограмма EFKL, если его периметр равен 70 см, а стороны параллелограмма ABCD относятся, как 2:5.
81. Доказать, что если в прямоугольнике через произвольную точку М его диагонали провести прямые, параллельные сторонам прямоугольника, то полученные четыре прямоугольника, с общей вершиной М подобны данному.
82. Дана трапеция с основаниями а и b. Прямая, параллельная основаниям трапеции, делит ее на две другие подобные между собой трапеции. Найти общее основание этих трапеций.
83. Периметр трапеции ABCD равен 7,2 дм. О-точка пересечения диагоналей. Найти периметр четырехугольника, вершины которого отрезки диагоналей ОА, ОВ, ОС и ОD в отношении 1:3, считая от вершин трапеции.
84. Периметр параллелограмма равен 96 см; каждая диагональ его разделена на три равные части. Найти периметр четырехугольника, для которого эти точки деления являются вершинами.
85. Прямая делит прямоугольник на два других подобных прямоугольника, диагонали которых равны 15 см и 20 см. Найти стороны прямоугольника.
86. Меньшая диагональ меньшего из двух подобных ромбов равна 6 см, а большая диагональ другого ромба 12 см. Определить сторону каждого ромба, если разность их площадей равна 30 см<sup>2</sup>.
87. Стороны параллелограмма а и b (а<b). Определить стороны подобного ему параллелограмма, большая высота которого равна меньшей высоте данного параллелограмма.
88. Периметры двух подобных прямоугольников равны 56 см и 70 см, причем диагональ одного из них является стороной другого. Определить стороны прямоугольников.
89. Меньшая диагональ ромба ABCD (угол А-острый) равна 12 см. Из вершин В и D ромба опущены высоты на каждую из противоположных сторон; К и F точки их пересечения. Определить АВ, если АВ:BF=4:3.
90. Доказать, что если через произвольную точку М диагонали АС параллелограмма ABCD провести прямые, параллельные его сторонам, то полученные параллелограммы с диагоналями АМ и МС будут подобны.
91. Через точку К диагонали АС прямоугольника ABCD проведены два отрезка: EF||AD (точка Е лежит на стороне АВ, а F-на CD) и MN- произвольный (точка М лежит на стороне ВС, а N-на AD). а) Доказать, что четырехугольники АЕKN и КМCF подобны. б) Определить АВ и AD, если АК-КС=20 см, АЕ-ВЕ=12 см и трапеций АЕKN и КМCF относятся, как 3:2.
92. Вывести признаки подобия равнобедренных трапеций.
93. Через вершины тупых углов В и С равнобедренной трапеции ABCD проведены отрезки: CE||AB и BF||CD (точки Е и F лежат соответственно на диагоналях BD и AC). Отрезок EF равен 8 см, а периметры ABCD и BCEF равны 60 см и 40 см. Определить сторону АВ.

#### Отношение площадей подобных фигур

108. В прямоугольнике ABCD через точку Е, делящую диагональ АС в отношении 2:1 (считая от А), опущены перпендикуляры: EF на сторону AD и EK на сторону АВ. Площадь прямоугольника ABCD больше прямоугольника AKEF на 20 см<sup>2</sup>. Определить площадь каждого из этих прямоугольников.
109. На диагонали АС ромба ABCD взята точка Е, из которой проведены отрезки EF||BC и EK||AB (точка F лежит на АВ, а К-на AD). Определить острый угол ромба, если его площадь равна 18 дм<sup>2</sup>. а площадь четырехугольника AFEK равна 8 дм<sup>2</sup> и FB=2 дм.
110. В равнобедренном треугольнике ABC (AB=BC) прямая, проведенная параллельно АС, делит треугольник на две части, площади которых равны 192 см<sup>2</sup> и 240 см<sup>2</sup>,

считая от вершины В. Отрезок прямой, заключенный между сторонами АВ и ВС, равен 24 см. Определить АВ.

111. Отрезок прямой, заключенный между боковыми сторонами равнобедренной трапеции и параллельной основаниям, равен 35 см и делит трапецию на две подобные между собой трапеции, площади которых равны  $200\text{ см}^2$  и  $392\text{ см}^2$ . Определить боковую сторону трапеции.

112. Через точку F диагонали AC трапеции ABCD ( $AD \parallel BC$ ) проведены две прямые: одна-параллельно BC, пересекающая AB в точке E, другая- параллельно CD, пересекающая AD в точке K. Определить площадь трапеции AEFK, если площадь трапеции ABCD равна  $294\text{ см}^2$ , а  $AE:BE=5:2$ .

113. В прямоугольной трапеции ABCD ( $AD \parallel BC$ ,  $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ) диагональ AC перпендикулярна стороне CD и равна 20 см; площади треугольников ABC и ACD относятся, как 16:25. Определить периметр трапеции ABCD.

114. Площади двух подобных параллелограммов, один из которых построен на меньшей стороне другого, равны  $432\text{ см}^2$  и  $192\text{ см}^2$ , а разность периметров 40 см. Определить высоты параллелограммов.

115. Диагонали равнобедренной трапеции ABCD ( $AD \parallel BC$ ) пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC и AOD равны соответственно  $48\text{ см}^2$  и  $108\text{ см}^2$ , а средняя линия трапеции равна 20 см. Определить диагонали трапеции.

116. Через точку M большей диагонали параллелограмма ABCD проведены прямые, параллельные его сторонам. Площади полученных параллелограммов, заключающих отрезки диагонали AC, равны  $24\text{ см}^2$  и  $54\text{ см}^2$ , а разность между их меньшими сторонами равна 2 см. Определить площадь первого параллелограмма.

117. В треугольник ABC вписан параллелограмм ADEF так, что угол A общий, а вершина E лежит на стороне BC. Площадь параллелограмма равна  $36\text{ см}^2$ , а треугольника BDE  $24\text{ см}^2$ . Определить площадь треугольника ABC.

118. В треугольнике ABC, площадь которого равна  $3\text{ дм}^2$ , через вершину угла B проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке D так, что  $\angle ADB = \angle C$ . Определить площади полученных двух треугольников, если  $AB:AC=3:5$ .

119. BD и AE-высоты треугольника ABC, у которого сторона AC больше стороны BC на 5 см. Определить BC и AC, если площади треугольников BDC и AEC равны соответственно  $96\text{ см}^2$  и  $150\text{ см}^2$ .

120. Площади двух подобных ромбов равны  $600\text{ см}^2$  и  $1536\text{ см}^2$ . Определить сторону меньшего ромба, если его большая диагональ равна стороне большего из ромбов.

#### Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике

121. Дана равнобедренная трапеция, средняя линия которой равна 9 см, а площадь равна  $54\text{ см}^2$  и диагональ перпендикулярна боковой стороне. Определить основания трапеции.

122. Диагонали прямоугольной трапеции взаимно перпендикулярны, и большая из них точкой пересечения делится на отрезки, равные 36 см и 64 см. Определить основания трапеции.

123. Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла ромба на его сторону, делит большую диагональ на отрезки, равные 3,5 см и 12,5 см. Определить сторону и меньшую диагональ ромба.

124. Определить высоту равнобедренной трапеции, если ее диагональ перпендикулярна боковой стороне, а разность квадратов оснований равна  $a^2$ .

125. Диагональ равнобедренной трапеции равна  $3\sqrt{13}$  см и перпендикулярна боковой стороне. Разность оснований равна 8 см. Определить площадь трапеции.

126. Определить катеты прямоугольного треугольника, у которого перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, больше одного из отрезков гипотенузы на 3 см и меньше другого на 4 см.

127. Определить меньший катет прямоугольного треугольника и длину перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу, если больший катет треугольника меньше гипотенузы на 2 см и больше прилежащего к нему отрезка гипотенузы на 1,6 см.

128. В окружность вписана трапеция, боковая сторона которой равна 15 см, а средняя линия 16 см и большее основание является диаметром окружности. Определить площадь трапеции.
129. Меньшее из оснований равнобедренной трапеции равно 7 см, а диагональ равна 20 см и перпендикулярна боковой стороне. Определить площадь трапеции.
130. В окружность вписана трапеция, средняя линия равна 16 см, боковая сторона больше меньшего из оснований на 8 см и большее основание является диаметром окружности. Определить высоту трапеции.
131. Из вершины большего угла параллелограмма опущена высота на его стороны. Точками пересечения большая из диагоналей параллелограмма делится на отрезки, равные  $a$ ,  $b$  и  $c$  ( $b$ -средний отрезок). Определить стороны параллелограмма.
132. Доказать, что в прямоугольном треугольнике квадрат величины, обратной высоте, проведенной к гипотенузе, равен сумме квадратов величин, обратных катетам.

### Теорема Пифагора

133. Определить периметр равнобедренного треугольника, если его высота больше основания на 2 см и меньше боковой стороны на 1 см.
134. Дан прямоугольный треугольник, у которого один катет больше другого на 5 см. Если меньший катет этого треугольника уменьшить на 8 см, а больший увеличить на 4 см, то получится треугольник, гипотенуза которого равна гипотенузе первого треугольника. Определить периметры треугольников.
135. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AB=BC$ ) из вершины  $A$  как из центра проведена дуга окружности радиуса  $AC$ , которая пересекает сторону  $AB$  в точке  $D$ . Определить сторону  $BC$ , если  $AC=6$  дм и  $DC=8$  дм.
136. В прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 13 см, вписана окружность. Определить катеты треугольника, если радиус окружности равен 2 см.
137. Из середины катета прямоугольного треугольника проведен перпендикуляр к гипотенузе. Доказать, что разность квадратов отрезков гипотенузы равна квадрату второго катета.
138. Из вершины угла  $B$  треугольника  $ABC$  проведен перпендикуляр  $BD$  к стороне  $AC$ . а) Определить  $AB$  и  $BC$ , если  $AB:BC=3:7$ ,  $AD=1$  см и  $DC=19$  см. б) Определить  $AC$ , если  $AB=2,1$  дм,  $BC=2,4$  дм и  $DC-AD=0,5$  дм.
139. На основании  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  взята точка  $M$ . Доказать, что  $AM \cdot MC = BC^2 - BM^2$ .
140. На продолжении диагонали  $AC$  ромба  $ABCD$  взята произвольная точка  $M$ , которая соединена отрезком с вершиной  $B$ . Доказать, что  $AM \cdot MC = MB^2 - AB^2$ .
141. Большее основание равнобедренной трапеции равно 21 см, а боковая сторона ее 10 см, а диагональ 17 см. Определить площадь трапеции.
142. В параллелограмме  $ABCD$  диагональ  $BD$  больше боковой стороны на 8 см, а высота, опущенная из вершины  $B$  на сторону  $AD$ , делит ее на отрезки 8 см и 20 см. Определить большую диагональ параллелограмма.
143. Меньшая сторона и меньшая высота параллелограмма равны соответственно 17 см и 15 см, а разность большей диагонали и большей стороной 11 см. Определить меньшую диагональ параллелограмма.
144. Определить большую диагональ и высоту ромба, меньшая диагональ которого равна 30 см, а проекция одной стороны на другую равна 7 см.
145. Периметр параллелограмма равен 9 дм, меньшая диагональ его равна 2,5 дм, а проекция на большую сторону 2 дм. Определить вторую диагональ параллелограмма.
146. В трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ) стороны  $AD$  и  $BC$  равны соответственно 3 дм и 4 дм, диагональ  $BD$  равна 5,1 дм, а высота, проведенная из вершины  $B$ , делит основание трапеции в отношении 2:5. Определить меньшее основание трапеции.
147. В трапеции  $ABCD$  диагональ  $BD$  больше боковой стороны  $AB$  на 10 см. Боковая сторона  $CD$  равна 26 см, а высота, проведенная из вершины  $B$ , делит основание на отрезки 18 см и 32 см. Определить меньшее основание трапеции.



148. Периметр равнобедренного треугольника равен 24 см. Высота, опущенная на боковую сторону, отсекает от нее отрезок длиной в 2 см, считая от основания. Определить стороны треугольника.
149. Доказать, что если диагональ равнобедренной трапеции равна большему основанию, то боковая сторона есть средняя пропорциональная между диагональю и разностью оснований.
150. В треугольнике ABC проведена биссектриса угла B, пересекающая сторону AC в точке D. Из точки D опущены перпендикуляры DE на AB и DF на BC. Определить AB и BC, если AC=28 см, AE=5 см и FC=9 см.
151. Перпендикуляр, опущенный из вершины острого угла равнобедренной трапеции на противоположную боковую сторону, равен 16 см. Меньшее основание трапеции равно 2 см, а высота ее 12 см. Определить большее основание трапеции.
152. Высота равнобедренной трапеции меньше боковой стороны на 1 см и меньше диагонали на 3 см. Определить большее основание трапеции, если меньшее основание равно 4 см.
153. В параллелограмме ABCD из вершины тупого угла B опущена высота BE на сторону AD и BF на сторону CD. Определить стороны параллелограмма, если BE:BF= 3:4, DE=11 см и DF=3 см.
154. На основании AC равнобедренного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону AB в точке D, а BC в точке E. Определить сторону AB, если AD=30 см, а хорда, соединяющая точки D и E, равна 14 см.

#### Пропорциональные отрезки в круге

155. В окружность вписан равнобедренный треугольник, основание которого равно 10 см, а боковая сторона равна 12 см. Через середину высоты треугольника проведена хорда, параллельная его основанию. Найти длину хорды.
156. В окружность вписан треугольник, одна из сторон которого равна 21 см. Параллельно этой стороне, через точку пересечения медиан, проведена хорда. Отрезки хорды, расположенные вне треугольника, равны 8 см и 11 см. Определить неизвестные стороны треугольника.
157. В окружность вписан треугольник ABC, и в нем проведены медианы AF и BK; медиана AF продолжена до пересечения с окружностью в точке D. Определить стороны AC и BC, если BK=63 см, AF=45 см и FD=24,2 см.
158. Доказать, что если три окружности попарно пересекаются, то их общие хорды пересекаются в одной и той же точке, а произведения отрезков каждой хорды равны между собой.
159. Диаметр, перпендикулярный хорде MN, пересекает ее в точке A. Хорда BC пересекает MN в точке D. Доказать, что сумма  $AD^2 + BD \cdot CD$  не зависит от положения точки D.
160. Диаметр AB и хорда CD пересекаются в точке O. DF и CE перпендикулярны к AB. Определить длину хорды CD, если: а) AE=1 дм, BF=49 дм и OC:OD=2:7; б) AE=1 дм, EF=24 дм и BF=25 дм.
161. AC и BD-диагонали ромба ABCD. Окружность, описанная около треугольника ABD, пересекает большую диагональ в точке E. Определить диагонали ромба, если AB=20 см, а CE=7 см.
162. AB-общая хорда двух пересекающихся окружностей, радиусы которых равны. Из точки A в одной из окружностей проведена хорда AC, являющаяся касательной ко второй окружности. Определить AC, если AB=24 см, а радиусы окружностей равны 15 см.
163. В окружность вписан равнобедренный треугольник, боковая сторона которого разделена на три равные части, и через точки деления проведены хорды, параллельные основанию. а) Определить стороны треугольника, если хорды равны 11 см и 14 см. б) Найти хорды, если разность их равна 2 см, а основание треугольника 12 см.
164. Около треугольника ABC описана окружность, в которой через точку пересечения биссектрис треугольника проведена хорда, параллельная стороне AC.

Сторона АВ равна 30 см и делит хорду на отрезки, равные 8 см и 25 см. Определить неизвестные стороны треугольника.

165. Доказать, что секущие, проведенные к окружности из внешней точки, обратно пропорционально их внешним отрезкам.

166. Из внешней точки к окружности проведены секущая, проходящая через ее центр, и касательная, равная половине секущей. Доказать, что отрезок касательной относится к радиусу, как 4:3.

167. В треугольнике ABC угол B тупой. Построить на стороне AC точку D так, чтобы  $AB^2 = AD \cdot AC$ .

168. Равнобедренный треугольник ABC (AB=BC) вписан в окружность, и его медиана AD продолжена до пересечения с окружностью в точке E. AD=27 см,  $DE = 16\frac{1}{3}$  см.

Определить стороны треугольника.

169. В параллелограмме ABCD сторона АВ равна диагонали BD. Около треугольника ABD описана окружность, которая делит боковую диагональ параллелограмма на отрезки, равные 65 см и 16 см. Определить стороны параллелограмма.

170. Диаметром окружности является один из катетов прямоугольного треугольника. Определить отрезки, на которые делится этой же окружностью гипотенуза, если наименьшее расстояние от третьей вершины треугольника до окружности равно 6 см, а наибольшее 16 см.

171. Две окружности внутренне касаются в точке А. Секущая MABC проходит через центры окружностей (В - точка пересечения секущей с меньшей окружностью, а С - с большей); MD и ME - касательные соответственно к меньшей и большей окружностям, равные 1,2 дм и 1,8 дм. Определить радиусы окружностей, если разность их равна 1,5 дм.

173. Две окружности внутренне касаются в точке А, через которую проведена касательная к этим окружностям. Через точку В, взятую на касательной, проведена прямая, которая касается меньшей окружности в точке С и пересекает большую окружность в точках D и E, линию центров в точке F. Определить радиус меньшей окружности, если ED=30 см, DB=24 см и AF=27 см.

174. Доказать, что квадрат биссектрисы угла треугольника равен произведению сторон, заключающих этот угол, без произведения отрезков, на которые биссектриса делит третью сторону.

175. Даны три точки А, В и С, расположенные на одной прямой. Из точки А ко всем окружностям, проходящим через точки В и С, проведены касательные. Найти множество точек касания.

176. Из точки А, взятой вне круга, проведены две секущие ABC и ADE (AB и AD - внешние отрезки секущих) и хорды BD и EC. а) Доказать, что треугольник ABD подобен треугольнику ACE. б) Определить AC и AE, если BD=2 см, EC=12 см, AB=4 см и DE=21 см.

177. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла С опущен перпендикуляр CD на гипотенузу АВ, и на нем как на диаметре построена окружность. В окружности проведена хорда MN, соединяющая точки пересечения с катетами треугольника. а) Определить MN, если AC=15 см, а BC=20 см. б) Доказать, что  $\triangle ABC \sim \triangle MNC$ . в) Доказать, что MN=CD.

178. В треугольнике ABC на высоте BD как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону АВ в точке М, а сторону ВС - в точке N. Определить отрезки AM и BM, если AD=4 см, CD=12 см и BN-CN=2 см.

179. Боковая сторона равнобедренного треугольника является диаметром окружности, которая отсекает от второй боковой стороны отрезок, равный  $5\frac{1}{7}$  см, а

от основания отрезок 6 см (отрезки расположены вне окружности). Определить медиану боковой стороны треугольника.

180. На одной из сторон треугольника, равной 12 дм, как на диаметре построена окружность, которая отсекает от двух других сторон отрезки, равные 1 дм и 1,25 дм (расположенные вне окружности). Определить неизвестные стороны треугольника.

## Разные задачи

181. В треугольник ABC вписана полуокружность, центр которой находится на стороне AC, а радиус полуокружности равен 12 см. Сторона BC точкой касания делится на отрезки, равные 21 см и 9 см, считая от вершины B. Определить стороны AB и AC.
182. В прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 35 см, вписана окружность. Определить отрезки, на которые делится гипотенуза треугольника биссектрисой прямого угла, если радиус окружности равен 7 см.
183. В прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, биссектрисой большего острого угла делится на отрезки, равные 15 см и 9 см. Определить больший катет треугольника.
184. В плоскости прямоугольника ABCD взята произвольная точка M и соединена со всеми вершинами. Доказать, что  $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$ .
185. Точка O — середина отрезка AB. На отрезках AB, AO и OB как на диаметрах построены полуокружности, расположенные по одну сторону от AB. Найти радиус окружности, касающейся всех трех полуокружностей, если отрезок AB равен 4а.
186. В треугольник, стороны которого равны 26 см, 28 см и 30 см, вписана полуокружность, центр которой находится на средней по величине стороне. Определить радиус полуокружности.
187. Основание равнобедренного треугольника равно 36 см, а боковая сторона равна 30 см. Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.
188. В трапеции, основания которой равны 1 дм и 7 дм, проведена прямая, параллельная основаниям и делящая площадь трапеции пополам. Определить отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами трапеции.
189. В равнобедренный треугольник вписан ромб так, что одна из вершин совпадает с вершиной при основании треугольника, а остальные лежат на сторонах треугольника. Определить боковую сторону равнобедренного треугольника, если сторона и меньшая диагональ ромба равны соответственно 18 см и 24 см.
190. В прямоугольный треугольник вписан ромб так, что один из острых углов совпадает с углом треугольника. Высота ромба равна 12 см, а высота треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 19,2 см. Определить гипотенузу.
- 191.