Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրերի մասին

Գ.Վ.ԱՂԵԿՅԱՆ
Ռուս-Հայկական (Սլավոնական) համալսարան
gagik.aghekyan@gmail.com

Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրերը կամ մաթեմատիկայի վիրտուալ լաբորատորիաները համակարգչային ծրագրեր են, որոնք նախատեսված են մաթեմատիկա ուսումնասիրելու և դասավանդելու համար: Կան մի շարք այդպիսի ծրագրեր. դրանք բոլորն էլ սկզբում ստեղծվել են երկրաչափություն ուսումնասիրելու համար և համարյա բոլորն էլ ընդլայնվել են՝ ներառելով ֆունկցիայի գրաֆիկի, գրաֆիկի շոշափողի կառուցման, տարբեր հաշվարկներ անելու, ոչ երկրաչափական տարբեր մեծություններ որոշելու կամ ներկայացնելու հրամաններ:

Դրանք Եվրոպայում, ԱՄՆ-ում ու Ռուսաստանում վաղուց են կիրառվում:

Դրանց տեսակների ու առանձնահատկությունների, ինչպես նաև կիրառման որոշ հնարավորությունների մասին կարող եք կարդալ [1-2]-ում:

Այդ ծրագրերի ամենահիմնական առանձնահտկությունն այն է, որ դրանք ինտերակտիվ միջավայրեր են, այսինքն այդ ծրագրերը հիշում են ոչ միայն գծագիրը, նրա սկզբնական տվյալներն ու կառուցման ալգորիթմը, այլ նաև օբյեկտների միջև եղած կապը: Ընդ որում՝ բոլոր սկզբնական տվյալները հեշտ փոփոխելի են, և այդ փոփոխությունները անմիջապես արտացոլվում են համակարգչի էկրանին: Իսկ դա հնարավորություն են տալիս ստեղծելու ինտերակտիվ դինամիկ մաթեմատիկական մոդելներ:

Ինտերակտիվ դինամիկ ծրագրերը ամբողջ աշխարհում համարվում են ինֆորմացիոն-համակարգչային տեխնոլոգիաների կիրառմամբ մաթեմատիկայի ուսուցման ամենաէֆեկտիվ միջոցը:

Եզակիից ընդհանուրին անցումն այս միջավայրերում տեղի է ունենում բնական ձևով: Օրինակ, տարված են որևէ եռանկյան միջնագծերը, որոնք հատվել են մի կետում: Շարժելով եռանկյան գագաթները՝ տեսնում ենք, որ եռանկյան կողմերը, կողմերի միջնակետերը, միջնագծերը փոխվում են, բայց միջնագծերը միշտ հատվում են մի կետում, այսինքն փորձելով հազարավոր եռանկյուններ՝ չենք հանդիպում եռանկյան, որի միջնագծերը հատվեն երեք կետերում:

Այլ օրինակ. չափում ենք շրջանագծի տրամագծին հենված ինչ-որ ներգծյալ անկյուն և տեսնում ենք, որ այն 90^0 է: Անկյան գագաթը տեղաշարժում ենք շրջանագծով, փոխում շրջանագծի շառավիղը: Տեսնում ենք, որ անկյան մեծությունը դարձյալ 90^0 է:

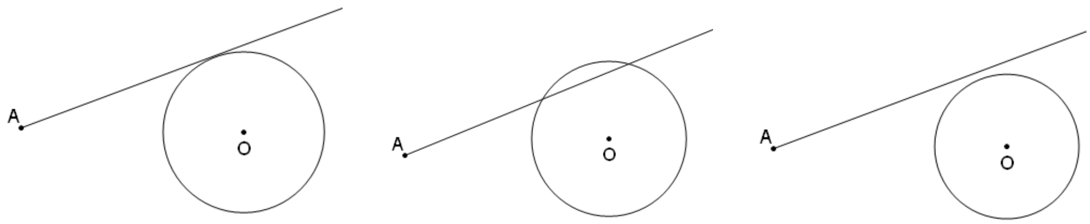
Բերված երկու օրինակում էլ ընդհանրացումը տեղի է ունենում բնական ձևով: Բացի այդ, ուզենք թե չուզենք, այդ ճանապարհը աշակերտների համար ավելի վստահելի է:

Այս հնարավորությունը կարելի է օգտագործել թեորեմների էքսպերիմենտալ հիմնավորումների համար:

Կարծում եմ, մաթեմատիկայի դասավանդման փորձ ունեցողները կհամաձայնեն, որ դասական ապացույցն աշակերտների ճնշող մեծամասնությունը համարում է տհաճ ու անհասկանալի մի գործողություն: Անհասկանալի են ոչ միայն ապացույցների քայլերը, այլ նաև դրանց իմաստն ու նշանակությունը:

Ինչ-որ քայլերի սխալ կամ թերի լինելը, ինչ-որ դեպքում կառուցման խնդրի լուծման բացակայությունը նույնպես ի հայտ են գալիս բնական ձևով:

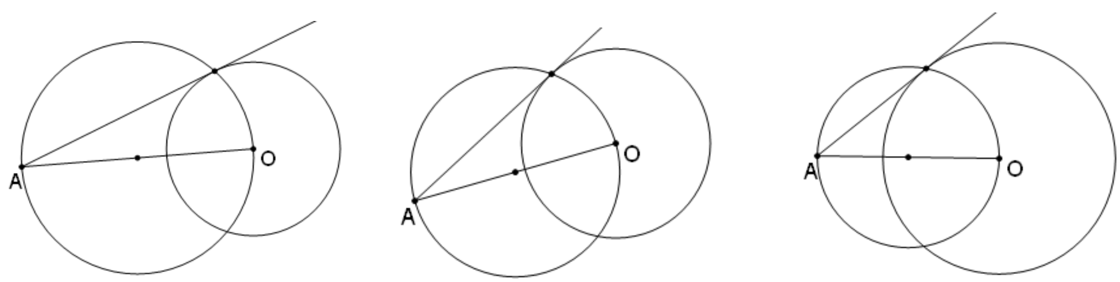
Օրինակ: Ենթադրենք տրված կետից տրված շրջանագծին պետք է տանել շոշափող: Սովորաբար աշակերտները քանոնը տեղադրում են այնպես, որ այն հպվի կետին և շրջանագծի «եզրին» և տանում են ուղիղ (նկ.1 ա): Երկար պետք է բացատրել, թե ինչու այդպիսի կառուցումը չի համապատասխանում երկրաչափական «խաղի» կանոններին: Այլ է վիճակը, եթե նույն խնդիրը լուծվում է դինամիկ երկրաչափության միջավայրում: Վերևում նկարագրած «կառուցումը» կարելի է կատարել և այստեղ: Բայց, երբ տեղաշարժում ենք A կամ O կետը, ուղիղն արդեն չի շոշափում շրջանագիծն ու այդպիսի «լուծման» թերությունը դառնում է ակնհայտ (նկ.1 բ, գ):



ա բ գ

Նկար 1

Այդպիսով՝ խնդիրը ձեռք է բերում խորություն, և հասկանալի է դառնում, որ փնտրվում է ունիվերսալ լուծում: Այդպիսի լուծում ունենալու համար պետք է կառուցման հիմքում դնել որոշակի օրինաչափություններ, այսինքն իսկապես կառուցել շոշափող: Կարևոր է նաև այն, որ երբ գտնվի ունիվերսալ լուծում, ապա A և O կետերի տեղաշարժը չի փոխի շրջանագծի և կառուցված ճառագայթի փոխդասավորությունը (նկ.2 ա, բ, գ): Ավելացնեմ, որ ծրագրերը հնարավորություն ունեն հիշելու կառուցման ալգորիթմը և այն պահելու որպես գործիք: Այդ գործիքը հնարավորություն կտա հետագայում նմանատիպ կառուցումը անել գրեթե ակնթարթորեն:



ա բ գ

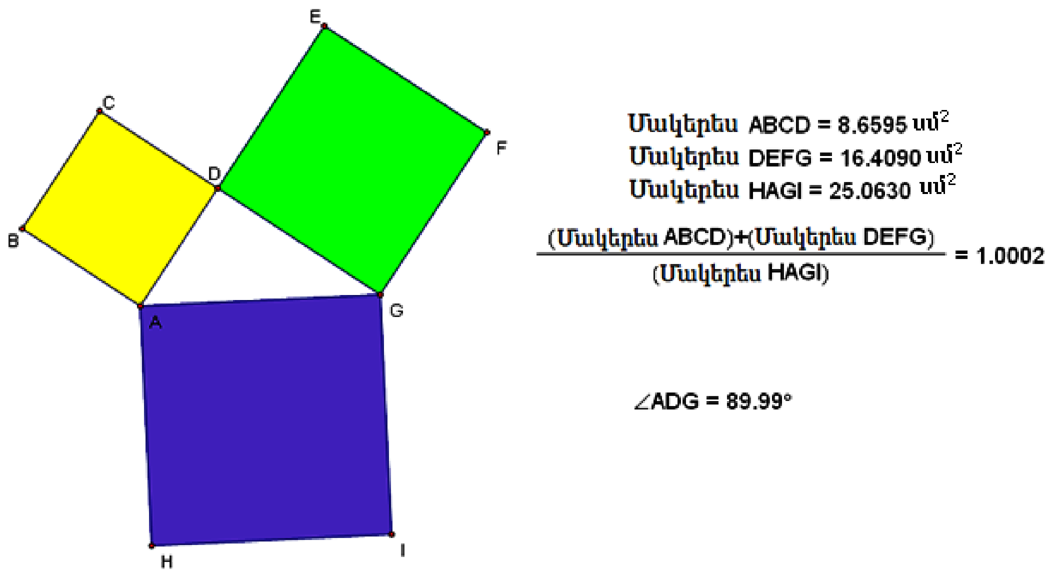
Նկար 2

Մյուս օրինակը կարող է լինել եռանկյան կառուցումը ըստ երեք կողմի: Տրված երեք հատվածների համար համապատասխան կառուցում անելուց հետո հեշտությամբ կարող եք փոխել դրանցից յուրաքանչյուրի երկարությունը: Դրա համար պետք է մկնիկով բռնել հատվածի ծայրակետից ու մեծացնել կամ փոքրացնել նրա երկարությունը: Քանի որ այդ փոփոխությունները անմիջապես փոխում են կառուցված եռանկյունը, ապա մեծացնելով դրանցից մեկի երկարությունը գալիս եք մի վիճակի, երբ կառուցված եռանկյունն անհետանում է, ինչն էլ նշանակում է, որ այդպիսի կողմերով եռանկյուն գոյություն չունի:

Սկզբնական տվյալների հեշտ ու սահուն փոփոխելիությունը, և այդ փոփոխությունների ընթացքում մյուս մեծությունների վարքին հետևելու հնարավորությունը, այսինքն միջավայրի ինտերակտիվությունը, հնարավոր է դարձնում այնպիսի երկրաչափական էքսպերիմենտներ, որոնք սովորական միջոցներով հնարավոր չեն:

Օրինակ, կամայական եռանկյանը ներգծված և արտագծված են շրջանագծեր: Երեխաներին առաջարկվում է եռանկյան գագաթները շարժելով՝ պարզել թե, որ եռանկյան համար են այդ շրջանագծերի կենտրոնները համընկնում: Մենք գիտենք այս հարցի պատասխանը, բայց երեխաների համար դա նորություն է, ու հաջողության դեպքում կլինի նաև նվաճում: Պարզ է, որ սովորական պայմաններում այդպիսի էքսպերիմենտ հնարավոր չէ իրականացնել:

Մեկ այլ էքսպերիմենտ: Կամայական եռանկյան կողմերի վրա, եռանկյունուց դուրս, կառուցել քառակուսիներ և փոփոխելով եռանկյունը հասնել նրան, որ երկու փոքր կողմերի վրա կառուցված քառակուսիների մակերեսների գումարը հավասարվի մեծ կողմի վրա կառուցված քառակուսու մակերեսին (նկ.3): Կատարել եզրահանգում:



Նկար 3

Այսպիսի էքսպերիմենտները կարևոր են նաև նրանով, որ իրենց հայտնաբերած օրինաչափությունները աշակերտներն ավելի լավ են յուրացնում, քան ուսուցչի կողմից նրանց պատրաստի մատուցված օրինաչափությունները: Հիշենք հանրահայտ Դ.Պոյայի խոսքերը. «Որևէ բան ուսումնասիրելու լավագույն ձևը դա ինքնուրույն հայտնաբերելն է»: Աշակերտի վերաբերմունքը իր ստեղծած երկրաչափական օբյեկտի նկատմամբ այլ է, քան նրան տրված օբյեկտի նկատմամբ: Չէ որ նա հասկանում է ստեղծման ամբողջ ընթացքը. ինչից է սկսել, ինչ դժվարություններ է հաղթահարել մինչև հասել է ցանկալի արդյունքին: Նա արժեքավորում է իր ստեղծագործությունը:

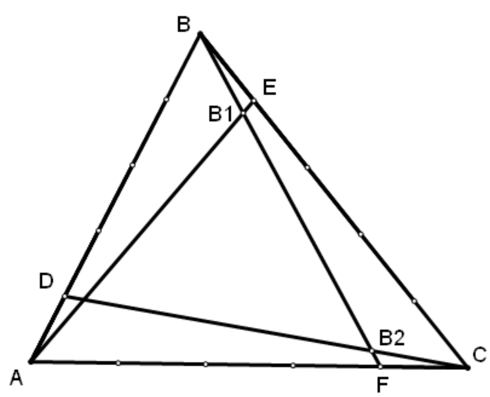
Կարևոր է նաև այն, որ աշակերտը երբեք չի աշխատում միայն եռանկյան կամ շրջանագծի հետ, այլ աշխատում է դրանց բազմության հետ: Մկնիկի մեկ շարժումով եռանկյունների մի ամբողջ դասի հետևելու հնարավորություն ունեցող աշակերտի երկրաչափական ինտուիցիան ավելի լավ է զարգանում, քան այդ հնարավորությունը չունեցող աշակերտինը:

Այս ծրագրերը հնարավորություն են տալիս պատասխանել այնպիսի հարցերի ինչպիսիք են՝ «իսկ ի՞նչ կլինի, եթե …» կամ «ո՞ր դեպքում է… » հարցերը:

Բերեմ երկու օրինակ:

Եռանկյան միջնագծերը հատվում են մի կետում, որը յուրաքանչյուր միջնագիծը բաժանում է 2:1 հարաբերությամբ, հաշված գագաթից:

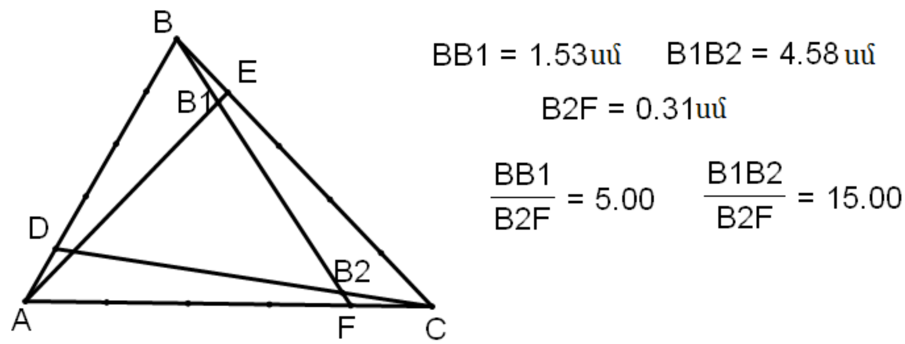
Իսկ ի՞նչ կլինի, եթե եռանկյան կողմերի միջնակետերի փոխարեն հանդիպակաց գագաթներին միացնենք այն կետերը, որոնք ոչ թե անջատում են կողմի $\frac{1}{2}$, այլ $\frac{1}{n}$ մասը (նկ.4):



Նկար 4

Այս հարցին կարելի է պատասխանել նաև առանց դինամիկ երկրաչափության ծրագրի օգտագործման: Բայց այդ դեպքում երկու հարց՝ «գոյություն ունի՞ ինչ-որ օրինաչափություն, որով AE, BF և CD հատվածները հատման կետերով բաժանվում են մասերի» և «ո՞րն է այդ օրինաչափությունը» կմիավորվեն, այսինքն հնարավոր չի լինի պատասխանել առաջին հարցին, առանց իմանալու երկրորդ հարցի պատասխանը:

Բանն այն է, որ եթե ունենանք որոշակի վստահություն ինչ-որ օրինաչափության գոյության մասին, ապա հոգեբանորեն ավելի հեշտ կլինի փնտրել ու գտնել նրա հիմնավորումը (ապացույցը), գումարած դրան, որ կունենանք որոշակի վարկած օրինաչափության ինչպիսին լինելու մասին: Նկար 5-ում տեսնում ենք, որ $n=5$-ի դեպքում առաջացած հատվածների հարաբերությունը հաստատուն է և $\frac{BB_1}{B_2F}=5$, իսկ $\frac{B_1B_2}{B_2F}=15$:

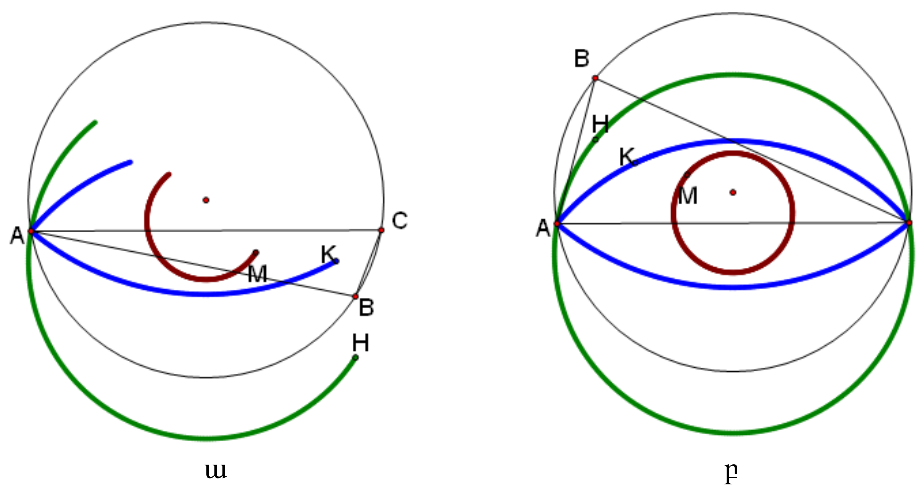


Նկար 5

Նշեմ նաև, որ դիտարկելով եռանկյան կողմերը n_1, n_2, n_3 մասերի բաժանող կետերի դեպքը կարելի է ստանալ օրինաչափություն, որի մասնավոր դեպքն է սա, այսինքն օրինակն ունի բնական զարգացում:

Մյուս օրինակը կապված է երկրաչափական դինամիկ օրինաչափությունների հայտնաբերման հետ: Ուսումնասիրում ենք եռանկյան կիսորդների, միջնագծերի, բարձրությունների կամ նրանց շարունակությունների հատման կետերի դինամիկ հատկությունները, երբ եռանկյան գագաթներից մեկը տեղաշարժվում է եռանկյանն արտագծած շրջանագծով [3]:

Պարզվում է, որ միջնագծերի հատման կետի հետագիծը շրջանագիծ է, շրջանագիծ է նաև բարձրությունների կամ նրանց շարունակությունների հատման կետի հետագիծը, իսկ կիսորդների հատման կետի հետագիծը երկու շրջանագծերի աղեղներ են (նկ.6 ա, բ):



Նկար 6

Այսպիսի հետազոտություններից յուրաքանչյուրի համար անհրաժեշտ է անցկացնել մի շարք համակարգչային էքսպերիմենտներ, որոնք կհաստատեն կամ կհերքեն որոշակի վարկածներ:

Նշեմ, որ կատարելով այդպիսի լաբորատոր աշխատանքներ՝ աշակերտները ձեռք կբերեն ինքնուրույն ստեղծագործական-հետազոտական աշխատանքի փորձ ու հմտություն: Ձեռք կբերեն նաև նոր գիտելիքներ ու նոր կարողություններ: Չի բացառվում նաև մինչ այդ անհայտ օրինաչափությունների հայտնաբերումը: Կփոխվի նաև ուսուցչի դերը: Այս դեպքում ուսուցիչը ոչ թե պատրաստի գիտելիք փոխանցող կլինի, այլ ակտիվ որոնողական և գործնական աշխատանքի կազմակերպիչ ու առաջնորդ:

Կճնավորի համակարգչային տեխնիկայով աշխատելու հմտություն, որին հասնել միայն ինֆորմատիկայի դասերի շնորհիվ դժվար է:

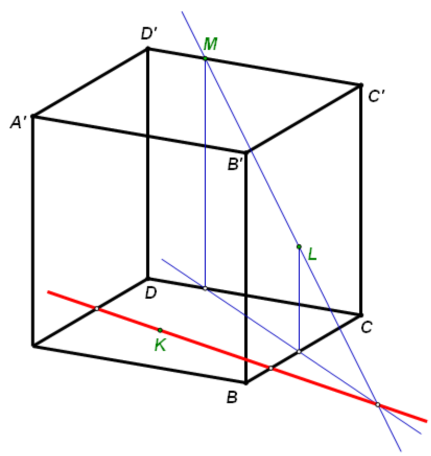
Դինամիկ երկրաչափության ծրագրերի կարևոր հնարավոր կիրառություններից մեկն էլ բազմանիստերի ինտերակտիվ հատույթների կառուցումն է:

Երկրաչափության դասընթացում բազմանիստի հատույթ կառուցելը կարևոր և դժվար յուրացվող թեմաներից մեկն է:

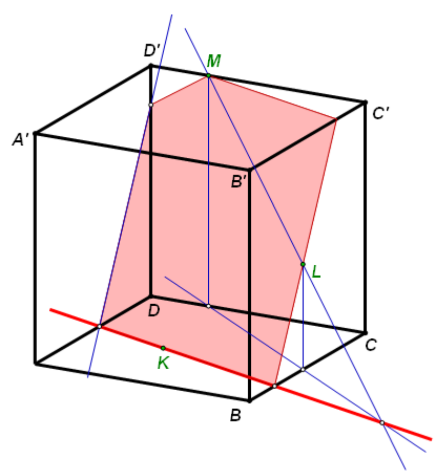
Իսկ ինչո՞վ կարող է օգնել հարթաչափական ծրագիրը հատույթների կառուցման խնդիրներում: Ճիշտ է կան նաև այսպես ասած 3D ծրագրեր, որոնց հիմնական օբյեկտները տարածական մարմիններն են, բայց այդ եռաչափ ծրագրերի օգնությամբ հատույթների կառուցումն այլ բնույթ ունի: Այդպիսի ծրագրով միայն մեկ հրամանով կարելի է կառուցել, օրինակ, տրված երեք կետերով անցնող հարթությունը: Պարզ է, որ այդպիսի ծրագրի օգտագործումը ուսումնական նպատակներով այնքան էլ հարմար չէ: Հարմար չէ, քանի որ այն ինչ կարելի է անել եռաչափ ծրագրով, հետագայում հնարավոր չի լինի անել թղթի վրա: Իսկ հարթաչափական ծրագրի օգնությամբ բազմանիստի հատույթի կառուցումը թղթի վրա այդ հատույթի կառուցման քայլերն են, բայց ավելի որակով, ավելի ճշգրիտ:

Բայց սա այդ ծրագրերի այս գործում ունեցած գլխավոր առավելությունը չէ:

Ավելի կարևոր է, որ հատույթները կառուցվում են քայլ առ քայլ, և յուրաքանչյուր քայլի համար էկրանին կարող է լինել բացատրություն կամ ուսուցիչը կարող է դրանք մեկնաբանել (նկ.7 ա, բ): Մեկ կոճակի սեղմումով կարելի է վերադառնալ սկզբնական վիճակին և նորից քայլ առ քայլ ներկայացնել հատույթի կառուցումը:



ա

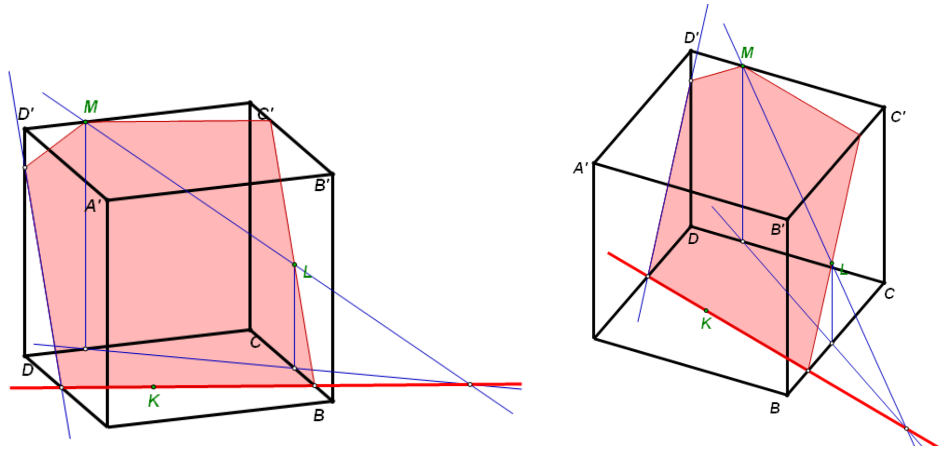


բ

Նկար 7

Վերջապես երկու ամենակարևոր առավելության մասին:

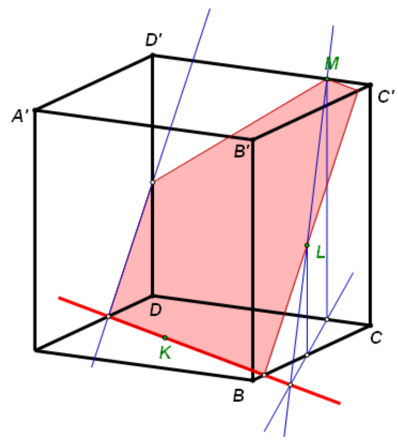
Առաջինն այն է, որ պատկերը կարելի է պտտել բազմանիստի հիմքին ուղղահայաց ուղղի շուրջը՝ քանի աստիճանով կամենանք (նկ.8 ա): Եվ դա ոչ թե ընդհատ-ընդհատ, այլ որպես անընդհատ պտույտ: Կարելի է նաև պատկերը թեքել (նկ.8 բ): Այդպիսով, պատկերը կարելի է դիտել բոլոր կողմերից, որն էլ հենց եռաչափ պատկերի կամ իրական մարմնի հետ աշխատելու տպավորություն է ստեղծում:



ա բ

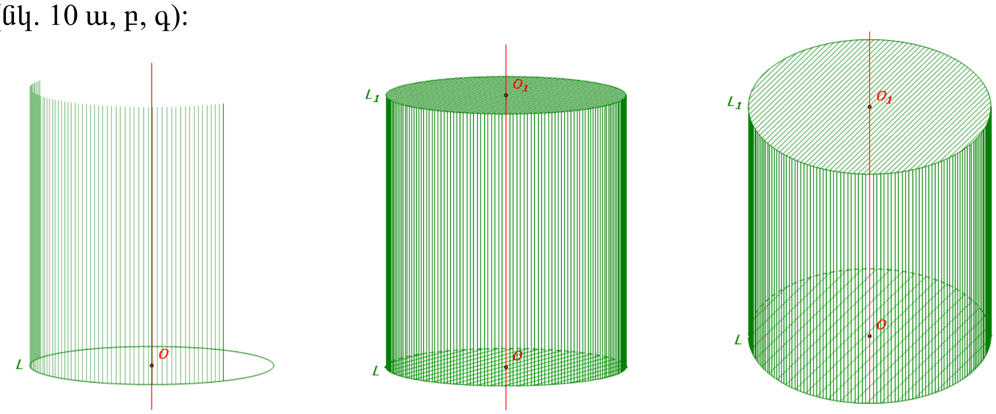
Նկար 8

Երկրորդ այն է, որ սկզբնական տվյալները կարելի է սահուն փոխել, և այդ փոփոխություններին համապատասխան կփոխվի կառուցված հատույթը, այսինքն միջավայրն ինտերակտիվ է՝ սկզբնական տվյալների փոփոխությունն անմիջապես փոխում է վերջնական արդյունքը (համեմատեք M կետի դիրքը նկ. 7 բ)-ում և նկ. 9-ում): Նշեմ, որ կարելի է նաև փոխել սկզբնական տվյալները հետո արդեն նոր տվյալների համար քայլ առ քայլ կառուցել հատույթը:



Նկար 9

Այս ծրագրերով պատրաստված պտտման մարմինների ինտերակտիվ մոդելները շատ ավելի դիտարժան ու գրավիչ են ու նրանց օգտագործումը կբարձրացնի դասի էֆեկտիվությունը (նկ. 10 ա, բ, գ):



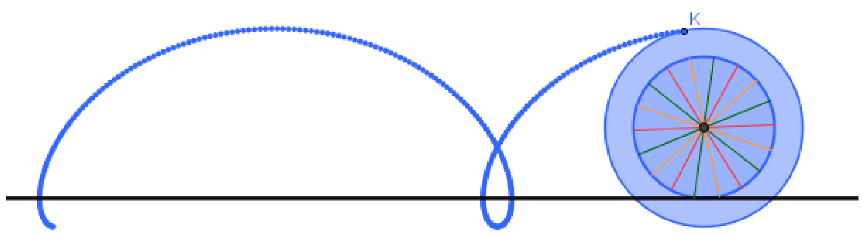
ա բ գ

Նկար 10

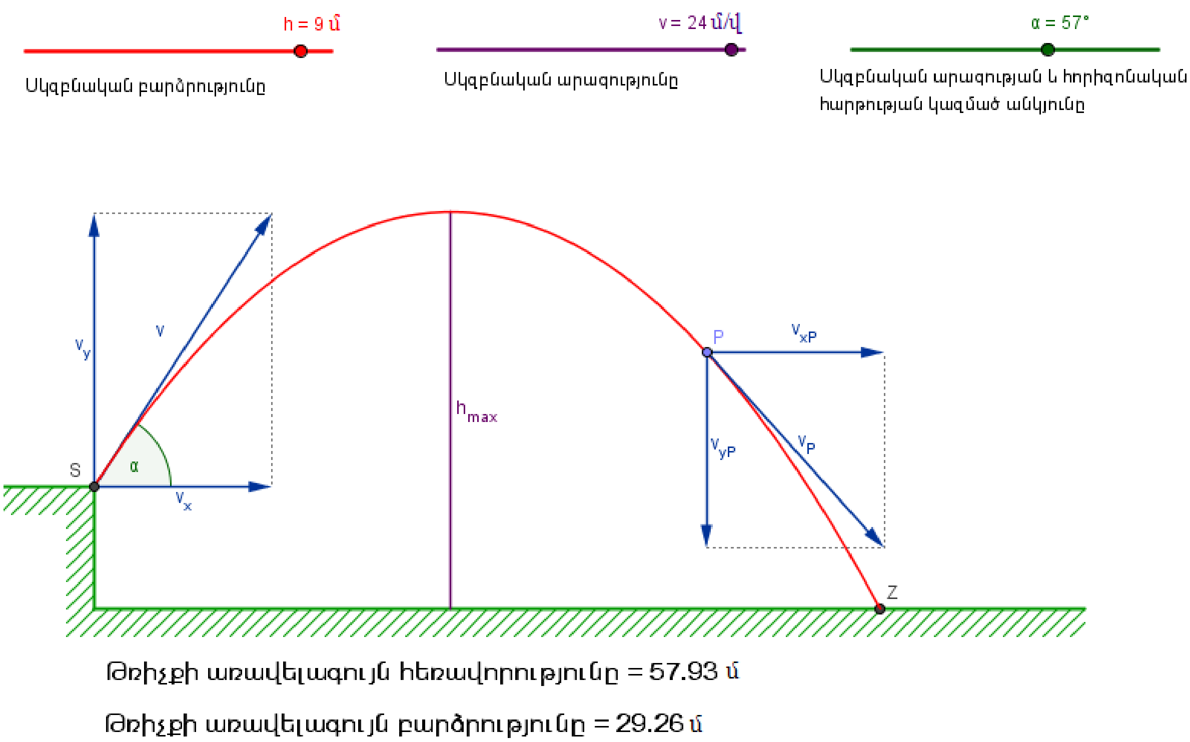
Վերջերս շատ է խոսվում երկրաչափությունից գործնական առաջադրանքների կազմման ու անցկացման անհրաժեշտության մասին: Բայց նման առաջադրանքների կազմման ու անցկացման լավագույն միջավայրը հենց դինամիկ երկրաչափության ծրագրերի տրամադրած միջավայրն է: Վերևում բերված օրինակներն էլ, կարծում եմ, հաստատում են դա:

Հաճախ է խոսվում միջառարկայական կապերի կարևորության մասին:

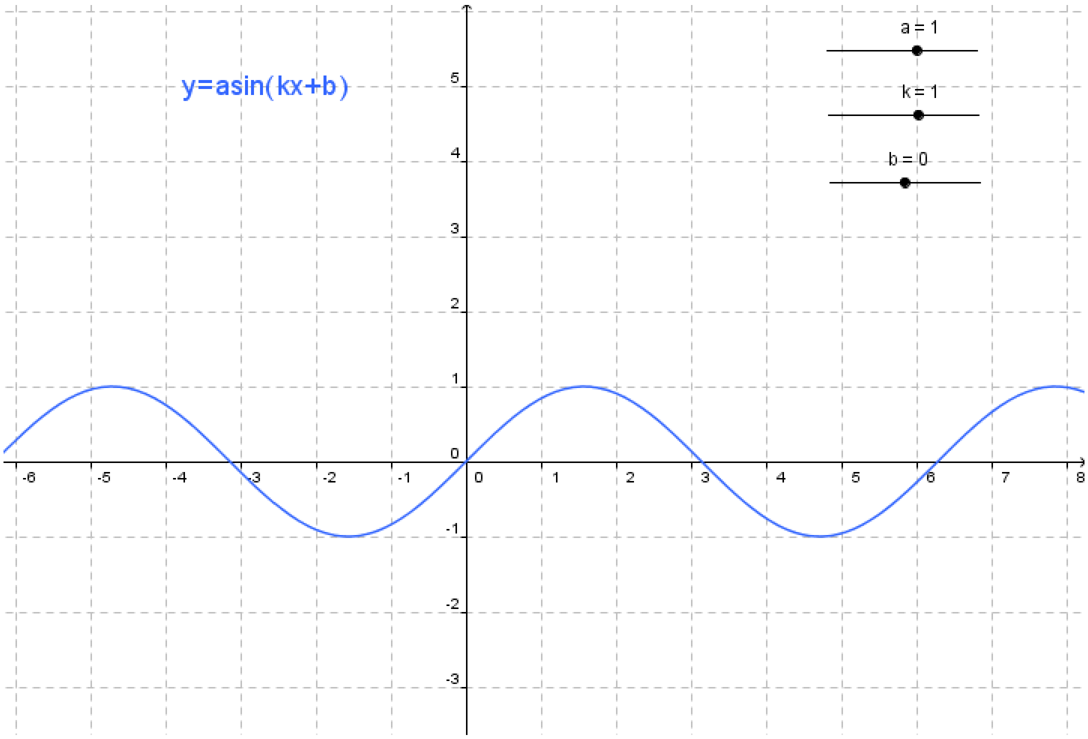
Այս ծրագրերը, ինչպես արդեն նշեցի, ստեղծվել են երկրաչափություն ուսումնասիրելու համար, բայց հետո ընդլայնվել են՝ ներառելով նոր հնարավորություններ: Ու դրանք կարող են օգտագործվել հանրահաշվի, ֆիզիկայի, մաթեմատիկական անալիզի տարբեր բաժինների համար ցուցադրական ինտերակտիվ մոդելներ ստեղծելու համար: Օրինակ, գլորվող անիվի ինչ-որ կետի հետագծի (նկ.11), անկյան տակ նետված մարմնի շարժման (նկ.12), պարամետրից կախված ֆունկցիայի գրաֆիկի ձևափոխության (նկ.13, 14), վերին ու ստորին ինտեգրալային գումարների մոդելները (նկ.15, 16) և այլն:



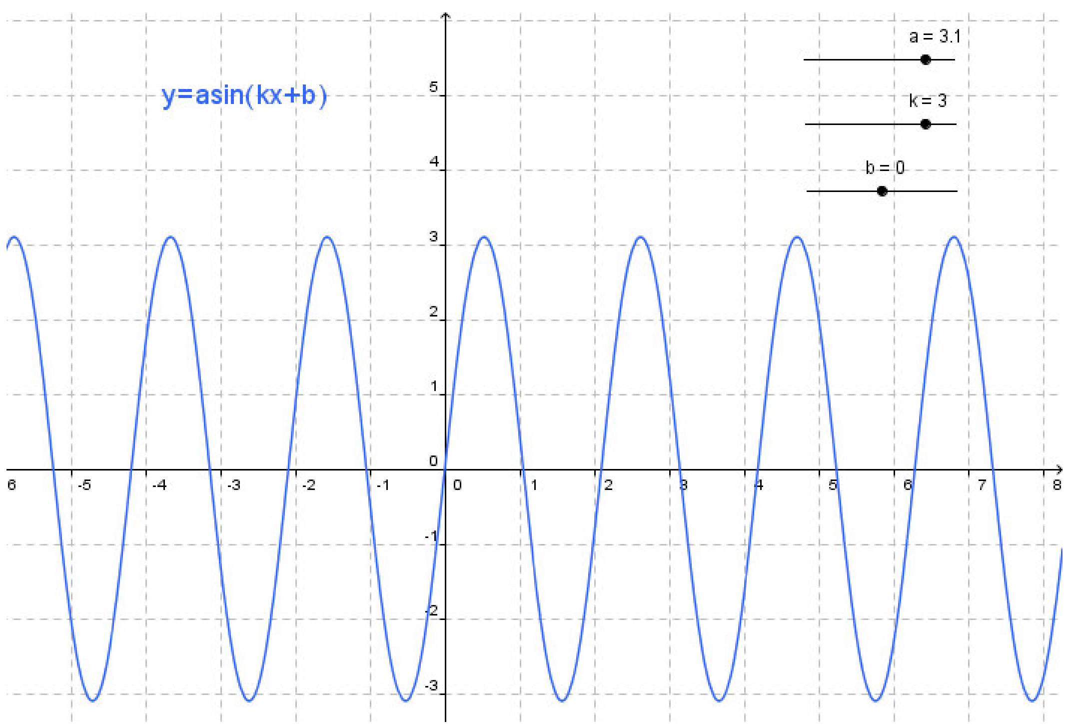
Նկար 11



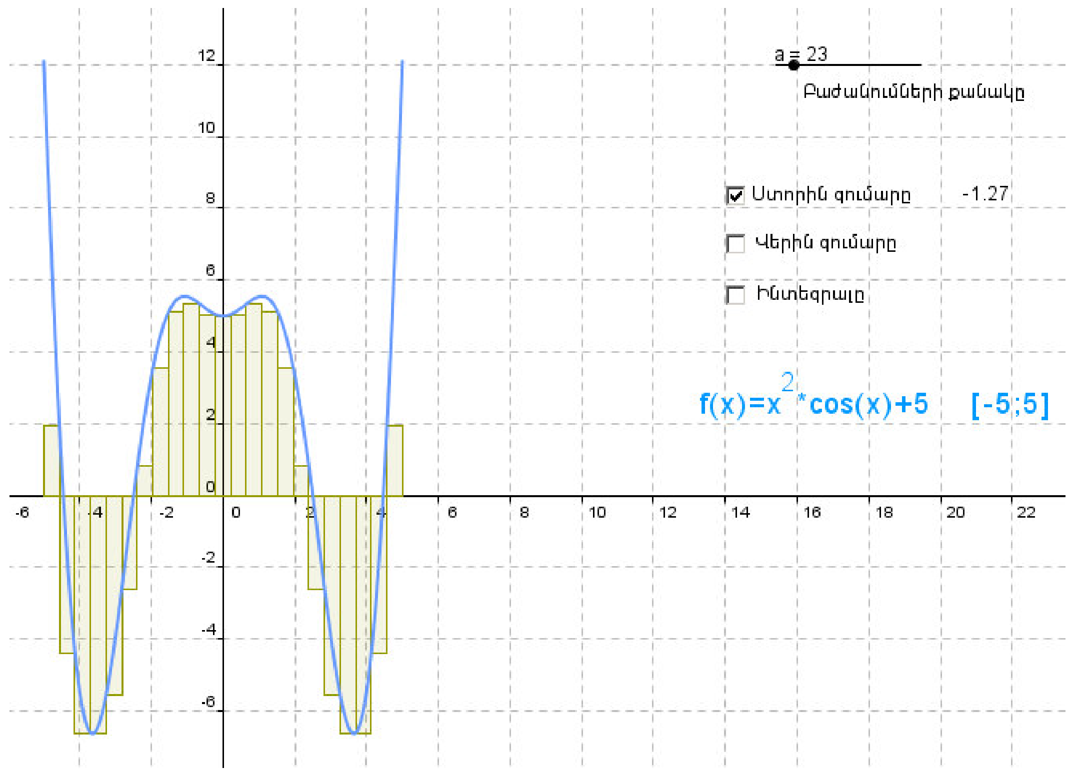
Նկար 12



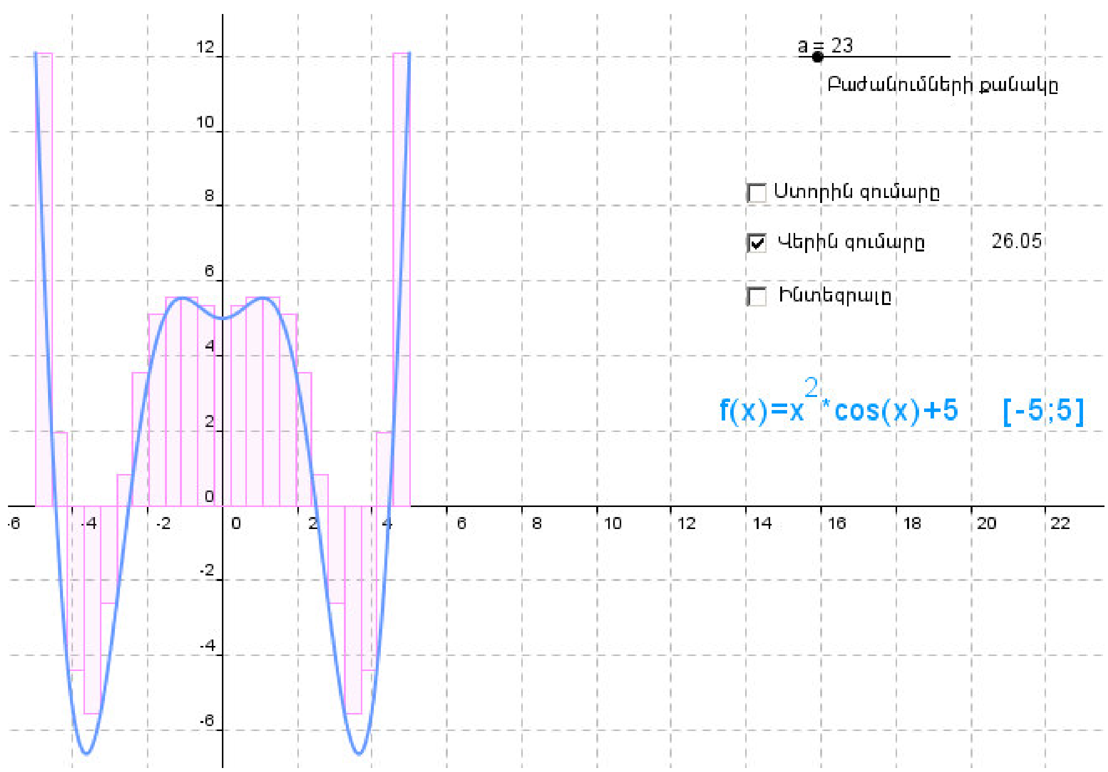
Նկար 13



Նկար 14



Նկար 15



Նկար 16

Արդեն ներկայացրեցի այսպիսի ծրագրերի օգտագործման ու օգտակարության բազմաթիվ ու տարբեր օրինակներ, բայց շատ ափսոս է, որ այս ծրագրերը Հայաստանում չեն օգտագործվում: Տարբեր ձևերով փորձել եմ դրանք ներկայացնել հանրությանը՝ հոդվածներ տպագրելով, տարբեր կոնֆերանսների ժամանակ դրանք ներկայացնելով, դրանցով պատըաստված տարբեր թեմաներով մոտ 40 ինտերակտիվ մոդել իմ անձնական կայքում` www.mathnet.am-ում տեղադրելով: Չկա որևէ սահմանափակում, բոլորը կարող են դրանցից օգտվել (www.mathnet.am–>տեսանյութեր–>ինտերակտիվ մոդելներ): Իհարկե, դրանք կօգնեն թե ուսուցիչներին և թե աշակերտներին, բայց լավագույն տարբերակը դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրերի մշտական կիրառումն է, աշակերտների մշտական աշխատանքը դրանց տրամադրած միջավայրում:

Հույս ունեմ, որ այդ օրն էլ կգա:

Գրականություն

1. Գ.Վ.Աղեկյան: Բազմանիստերի ինտերակտիվ հատույթների կառուցումը համակարգչով: Մաթեմատիկան դպրոցում, թիվ 1, 2010թ.
2. Գ.Վ.Աղեկյան: Երկրաչափական նոր կապերի հայտնաբերումը դինամիկ երկրաչափության ծրագրերով: Բնագետ 1-2, 2010թ.
3. Г.В.Агекян. Динамические свойства замечательных точек треугольника. Компьютерные инструменты в образовании, 2010г., N3.