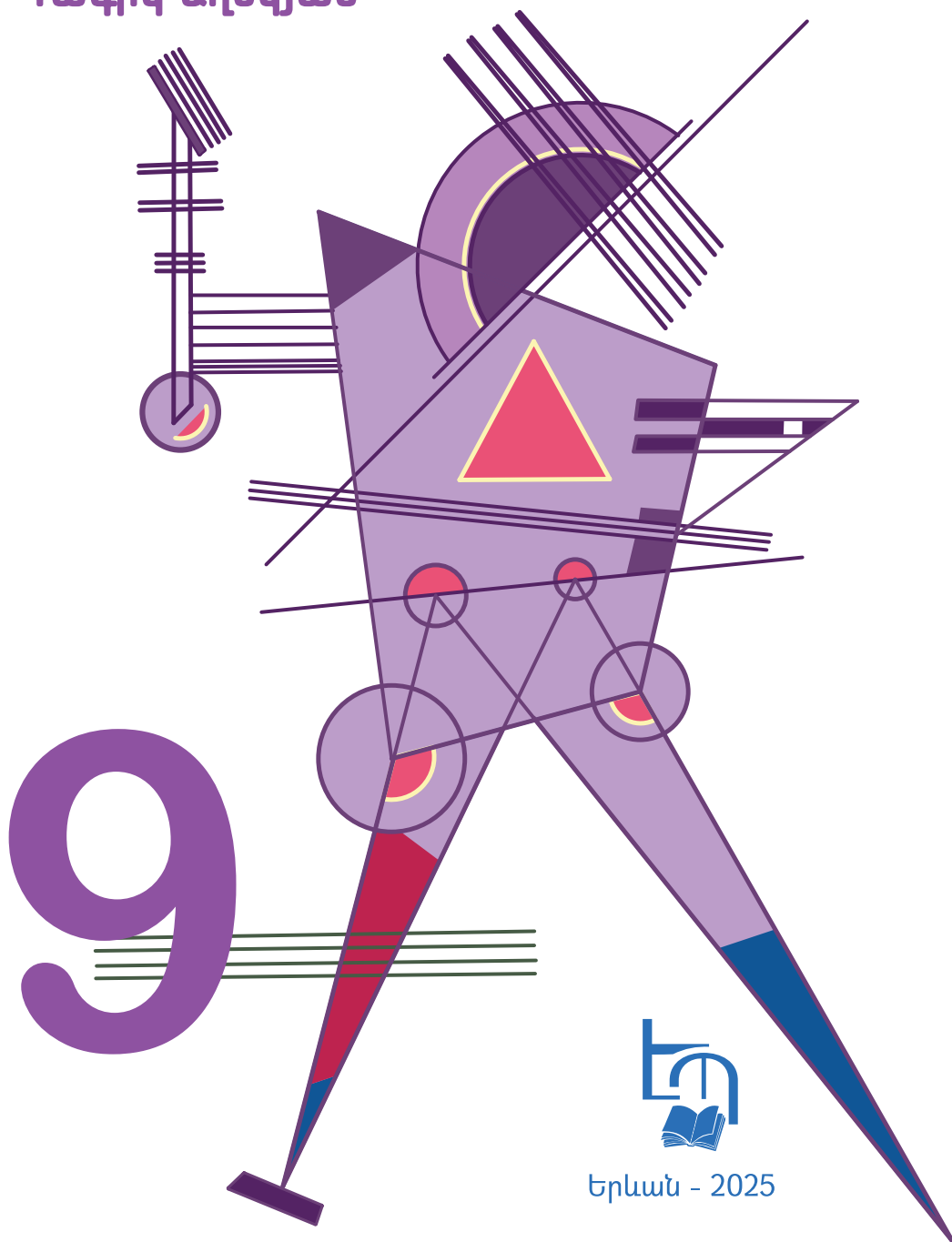


ԵՐԿՐԱԶԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

Գազիկ Աղեկյան



Երևան - 2025

ՀՏԴ 373:514(075.3)

ԳՄԴ 22.151g72

Ա 481

*Երաշխավորված է ՀՀ կրթության, գիտության,
մշակույթի և սպորտի նախարարության կողմից*

Աղեկյան Գագիկ

Ա 481 Երկրաչափություն 9 (9-րդ դասարանի դասագիրք) / Գ. Աղեկյան.- Եր.: Էդիթ
Պրինտ, 2025.- 172 էջ:

Պայմանական նշաններ՝

Կանաչ գույնով համարակալված են առավել պարզ առաջադրանքները:

ՀՏԴ 373:514(075.3)

ԳՄԴ 22.151g72

ISBN 978-9939-40-054-9

© Էդիթ Պրինտ, 2025

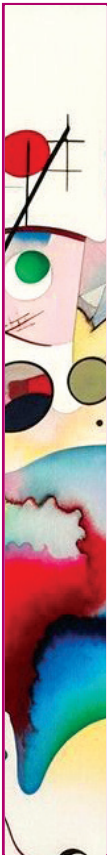
© Գ. Աղեկյան, 2025



ՇՐՋԱՆԱԳԻԾ

Ուսումնասիրելով այս գլուխը՝

- Կսովորեք շրջանագծի շոշափող, հատող, աղեղի աստիճանային չափ, կենտրոնային և ներգծյալ անկյուններ հասկացությունների սահմանումները:
- Կիմանաք շրջանագծի շոշափողի հատկությունները, ներգծյալ անկյան մասին թեորեմը և դրա հետևանքները, կկիրառեք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Կիմանաք շրջանագծի հատվող լարերի, շոշափողի ու հատողի հատվածների հատկությունները, կկիրառեք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Կսովորեք եռանկյան կիսորդների, կողմերի միջնուղղահայացների, բարձրությունների կամ նրանց շարունակությունների մասին թեորեմները և կկիրառեք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Կսովորեք բազմանկյանը ներգծյալ և արտագծյալ շրջանագծեր հասկացությունները:
- Կիմանաք, որ ցանկացած եռանկյան կարելի է և՛ ներգծել, և՛ արտագծել շրջանագիծ, նաև թե ինչպես կառուցել այդ շրջանագծերի կենտրոններն ու շրջանագծերը:
- Կիմանաք ներգծյալ և արտագծյալ քառանկյունների հատկությունները, քառանկյանը շրջանագիծ ներգծելու և արտագծելու պայմանները, կկիրառեք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Կսովորեք դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրերով կառուցել շրջանագծի շոշափող, եռանկյանն արտագծած և ներգծած շրջանագծեր:



§1. Շրջանագծի շոշափող

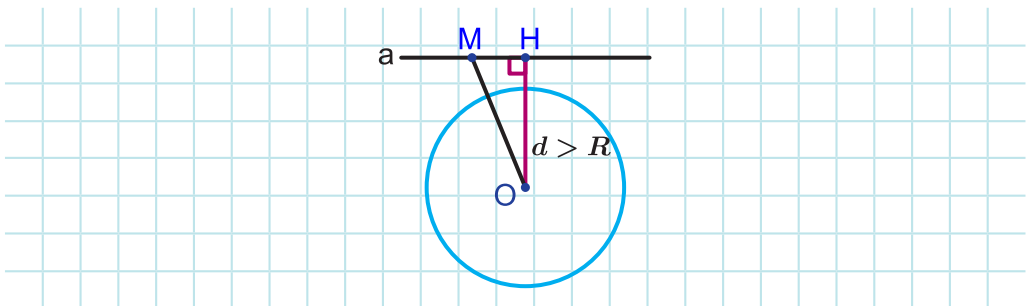
□ 1. Ուղղի և շրջանագծի փոխդասավորությունը

Շրջանագիծ, շրջանագծի շառավիղ, կենտրոն, լար և աղեղ հասկացությունները ներմուծվել են դեռ 7-րդ դասարանում: Շրջանագծի հետ կապված բազմաթիվ հասկացությունների և հարցերի ուսումնասիրումն անխատեսված է այս ուսումնական տարում: Այդ շարքը սկսում ենք ուղղի և շրջանագծի փոխդասավորության հնարավոր դեպքերի քննարկումով:

Ենթադրենք՝ R շառավիղով շրջանագծի O կենտրոնի հեռավորությունը a ուղղից d է, և դիտարկենք երեք դեպք՝ 1) $d > R$, 2) $d = R$, 3) $d < R$:

Թեորեմ: Եթե շրջանագծի կենտրոնի և ուղղի հեռավորությունը մեծ է այդ շրջանագծի շառավիղից, ապա ուղիղն ու շրջանագիծը չունեն ընդհանուր կետ (նկ. 1):

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ R շառավիղով շրջանագծի O կենտրոնի հեռավորությունը a ուղղից d է, ընդ որում՝ $d > R$ (նկ. 1): Ապացուցենք, որ a ուղիղն ու շրջանագիծը ընդհանուր կետ չունեն:



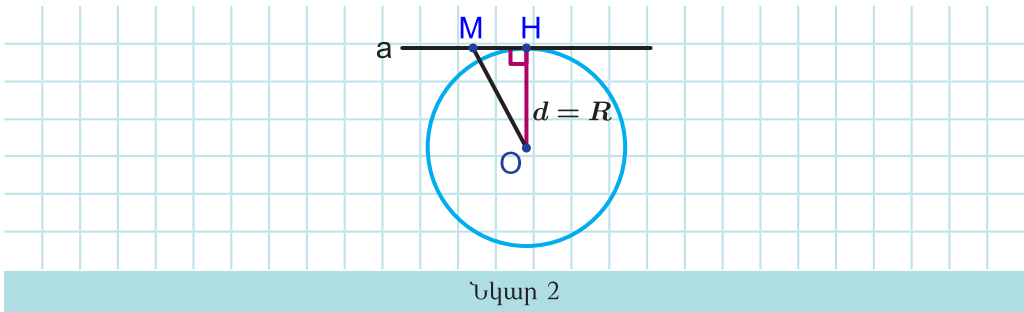
Նկար 1

O կետից a ուղղին տանենք OH ուղղահայացը: Ըստ թեորեմի պայմանի՝ $OH = d > R$: Հետևաբար H կետը չի պատկանում O կենտրոնով և R շառավիղով շրջանագծին:

Դիտարկենք a ուղղի H -ից տարբեր ցանկացած M կետ: Այդ կետի հեռավորությունը շրջանագծի կենտրոնից OM -ն է: Բայց, որպես OHM ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգ՝ այն մեծ է OH էջից, հետևաբար նաև R -ից: Ուրեմն M կետը չի պատկանում O կենտրոնով և R շառավիղով շրջանագծին: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ: Եթե շրջանագծի կենտրոնի և ուղղի հեռավորությունը հավասար է այդ շրջանագծի շառավղին, ապա ուղիղն ու շրջանագիծն ունեն մեկ ընդհանուր կետ (նկ. 2):

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ R շառավղով շրջանագծի O կենտրոնի հեռավորությունը a ուղղից d է, ընդ որում՝ $d = R$ (նկ. 2): Ապացուցենք, որ a ուղիղն ու շրջանագիծն ունեն մեկ ընդհանուր կետ:



O կետից a ուղղին տանենք OH ուղղահայացը: Ըստ թեորեմի պայմանի՝ $OH = d = R$: Հետևաբար H կետը պատկանում O կենտրոնով և R շառավղով շրջանագծին:

Դիտարկենք a ուղղի H -ից տարբեր ցանկացած M կետ: Այդ կետի հեռավորությունը շրջանագծի կենտրոնից OM -ն է: Բայց, որպես OHM ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգ՝ այն մեծ է OH էջից, հետևաբար նաև R -ից: Ուրեմն M կետը չի պատկանում O կենտրոնով և R շառավղով շրջանագծին: Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում: Ուղիղը, որը շրջանագծի հետ ունի մեկ ընդհանուր կետ, կոչվում է շրջանագծի շոշափող:

Հաջորդ դեպքին անցնելուց առաջ պարզենք, թե ուղիղն ու շրջանագիծը ամենաշատը քանի ընդհանուր կետ կարող են ունենալ:

Պարզ է, շրջանագծի կենտրոնով անցնող ուղիղն ու շրջանագիծը ունեն երկու ընդհանուր կետ: Դրանք այդ ուղղի վրա ընկած տրամագծի ծայրակետերն են:

Ցույց տանք, որ **ուղիղը և շրջանագիծը չեն կարող ունենալ երկուսից ավելի ընդհանուր կետ:**

Ենթադրենք հակառակը. O կենտրոնով շրջանագիծն ու a ուղիղը ունեն երեք ընդհանուր կետ՝ A , B և C կետերը: Այդ դեպքում պարզ է, որ a ուղիղը չի անցնում շրջանագծի կենտրոնով: Հետևաբար, եթե O կետը միացնենք A , B , C կետերին, ապա առաջացած AOB , BOC եռանկ-

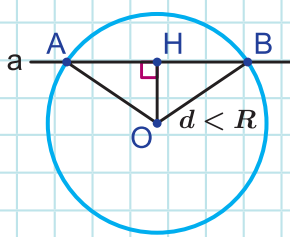
յունները կլինեն հավասարասրուն եռանկյուններ:

AB -ի միջնակետը նշանակենք M -ով, իսկ BC -ինը՝ N -ով: OM և ON ուղիղներն ուղղահայաց կլինեն a ուղղին, ինչը կնշանակի, որ O կետից a ուղղին հնարավոր է տանել երկու տարբեր ուղղահայացներ: Ստացված հակասությունն էլ նշանակում է, որ մեր ենթադրությունը սխալ է:

Ուրեմն ուղիղն ու շրջանագիծը չեն կարող ունենալ երկուսից ավելի ընդհանուր կետ:

Վերջապես դիտարկենք այն դեպքը, երբ ուղիղը չի անցնում շրջանագծի կենտրոնով, և շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունն այդ ուղից փոքր է շրջանագծի շառավղից:

Թեորեմ: Եթե շրջանագծի կենտրոնի և ուղղի հեռավորությունը փոքր է այդ շրջանագծի շառավղից, ապա ուղիղն ու շրջանագիծը ունեն երկու ընդհանուր կետ (նկ. 3):



Նկար 3

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ R շառավղով շրջանագծի O կենտրոնի հեռավորությունը a ուղղից d է, ընդ որում՝ $d < R$ (նկ. 3): Ապացուցենք, որ a ուղիղն ու շրջանագիծը ունեն երկու ընդհանուր կետ:

O կետից a ուղղին տանենք OH ուղղահայացը և H կետից a ուղղի վրա տեղադրենք $\sqrt{R^2 - d^2}$ երկարությամբ HA և HB հատվածները: Օգտվելով Պյութագորասի թեորեմից՝ կարող եք համոզվել, որ A և B կետերի հեռավորությունները O կետից հավասար են R -ի: Դա էլ նշանակում է, որ a ուղղի A և B կետերը O կենտրոնով և R շառավղով շրջանագծի վրա են:

Քանի որ ուղիղը և շրջանագիծը չեն կարող ունենալ երկուսից ավելի ընդհանուր կետ, ապա ընդհանուր կետերի քանակը երկուսն է: Թեորեմն ապացուցված է:

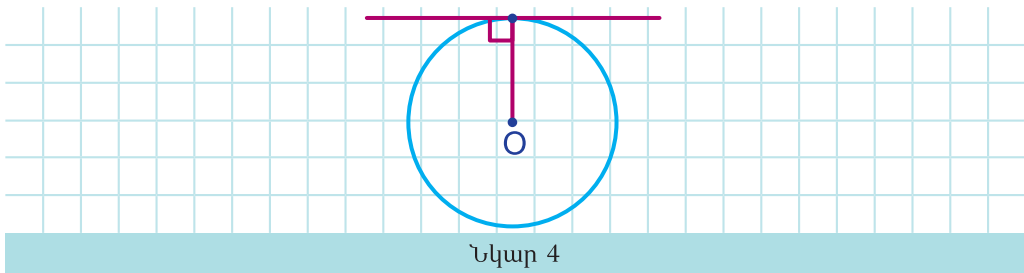
Սահմանում: Ուղիղը, որը շրջանագծի հետ ունի երկու ընդհանուր կետ, կոչվում է շրջանագծի հատող:

Հետագա շարադրանքի հարմարության համար կպայմանավորվենք ասել, որ **կետը շրջանագծի ներսում է**, եթե դրա հեռավորությունը շրջանագծի կենտրոնից փոքր է շրջանագծի շառավղից և **շրջանագծից դուրս է**, եթե դրա հեռավորությունը շրջանագծի կենտրոնից մեծ է շրջանագծի շառավղից:

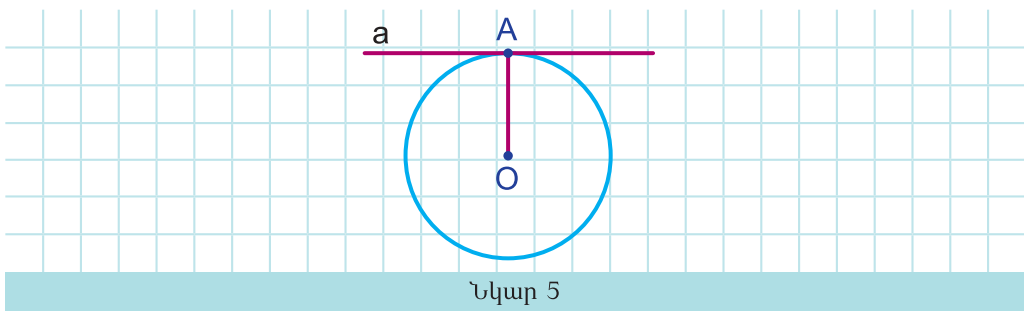
□ 2. Շրջանագծի շոշափող

Ձևակերպենք և ապացուցենք շոշափողի հատկության մասին մի թեորեմ:

Թեորեմ: Շրջանագծի շոշափողն ուղղահայաց է շոշափման կետից տարված շառավղին (նկ. 4):



Ապացուցում: Ենթադրենք՝ a ուղիղը A կետում շոշափում է O կենտրոնով շրջանագիծը (նկ. 5): Ապացուցենք, որ $OA \perp a$:

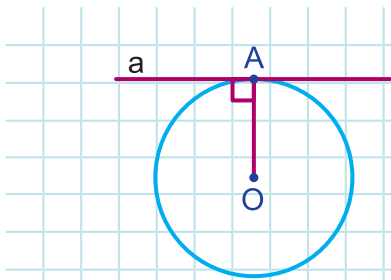


Ենթադրենք հակառակը. OA -ն ուղղահայաց չէ a ուղղին: Այդ դեպքում O կետից a ուղղին տարված ուղղահայացի երկարությունը, որը շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունն է a ուղղից, փոքր կլինի OA -ից՝ շրջանագծի շառավղից: Ուրեմն, ըստ նախորդ թեորեմի, a ուղիղը հատում է շրջանագիծը: Բայց դա հակասում է թեորեմի պայմանին: Ստացված հակասությունից էլ հետևում է, որ $OA \perp a$: Թեորեմն ապացուցված է:

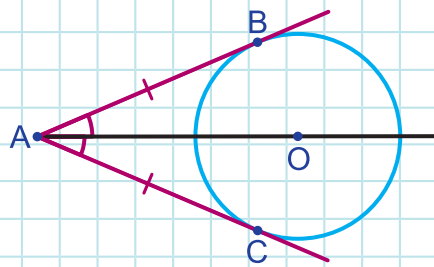
Պարզվում է, որ ձիշտ է նաև այս թեորեմի հակադարձ պնդումը.

Թեորեմ: (Շոշափողի հայտանիշ) Եթե ուղիղն անցնում է շառավղի՝ շրջանագծին պատկանող ծայրակետով և ուղղահայաց է այդ շառավղին, ապա այն շրջանագծի շոշափող է:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ a ուղիղն անցնում է O կենտրոնով շրջանագծի OA շառավղի A ծայրակետով և ուղղահայաց է այդ շառավղին (նկ. 6): Ապացուցենք, որ a ուղիղը շոշափում է շրջանագիծը:



Նկար 6



Նկար 7

Քանի որ $OA \perp a$, ապա a ուղղի հեռավորությունը շրջանագծի կենտրոնից հավասար է շրջանագծի շառավղին: Հետևաբար շրջանագիծն ու a ուղիղն ունեն մեկ ընդհանուր կետ: Ուրեմն, ըստ շոշափողի սահմանման, այն շոշափում է շրջանագիծը: Թեորեմն ապացուցված է:

Նշենք, որ այս թեորեմի վրա են հենվում շրջանագծի շոշափող կառուցելու խնդիրների լուծումները:

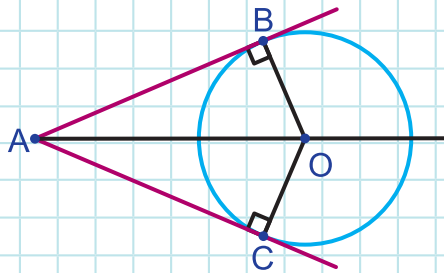
Ենթադրենք՝ A կետով տարված երկու շոշափողներից մեկը շրջանագիծը շոշափում է B կետում, մյուսը՝ C կետում (նկ. 7): AB և AC հատվածները կանվանենք A կետից տարված **շոշափողի հատվածներ**:

Հաջորդ թեորեմը ներկայացնում է այդպիսի հատվածների հատկությունը:

Թեորեմ: Նույն կետից շրջանագծին տարված շոշափողների հատվածները հավասար են և կազմում են հավասար անկյուններ այդ կետով և շրջանագծի կենտրոնով անցնող ուղղի հետ (նկ. 7):

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ O կենտրոնով շրջանագծին A կետից տարված են AB և AC շոշափողները (նկ. 8): Նախ ապացուցենք, որ $AB = AC$:

B և C շոշափման կետերից տանենք շառավիղներ և դիտարկենք ABO և ACO եռանկյունները: Ըստ նախորդ թեորեմի՝ այդ եռանկյունները ուղղանկյուն եռանկյուններ են: Բացի դրանից, AO-ն այդ եռանկյունների ընդհանուր ներքնաձիգն է, իսկ BO և CO էջերը հավասար են: Հետևաբար այդ եռանկյունները հավասար են՝ ըստ էջի ու ներքնաձիգի: Ուրեմն $AB = AC$:



Նկար 8

ABO և ACO ուղղանկյուն եռանկյունների հավասարությունից հետևում է նաև, որ $\angle BAO = \angle CAO$: Թեորեմն ապացուցված է:

Ասում են, որ շրջանագիծը **շոշափում է ճառագայթը (հատվածը)**, եթե այն շոշափում է ճառագայթը (հատվածը) պարունակող ուղիղը, և շոշափման կետը պատկանում է ճառագայթին (հատվածին):

Սահմանում: Անկյան կողմերը շոշափող շրջանագիծը կոչվում է **անկյանը ներգծված շրջանագիծ**:

Նախորդ թեորեմից հետևում է, որ անկյանը ներգծված շրջանագծի կենտրոնը անկյան կիսորդի վրա է:



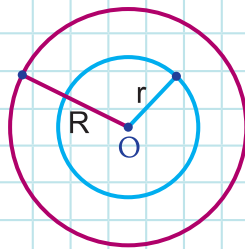
Ինտերակտիվ մոդել

Ուղղի և շրջանագծի փոխդասավորությունը

□ 3. Երկու շրջանագծերի փոխդասավորությունը

Դիտարկենք O կենտրոնով ու R շառավղով և O_1 կենտրոնով ու r շառավղով երկու շրջանագիծ: Նշենք, որ երկու շրջանագիծ ասելով՝ կհասկանանք չհամընկնող շրջանագծեր: Որոշակիության համար կենթադրենք նաև, որ $r \leq R$, իսկ շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը կնշանակենք d -ով՝ $OO_1 \equiv d$:

Սահմանում: Նույն կենտրոնով և տարբեր շառավիղներով երկու շրջանագծեր կոչվում են համակենտրոն շրջանագծեր (նկ. 9):



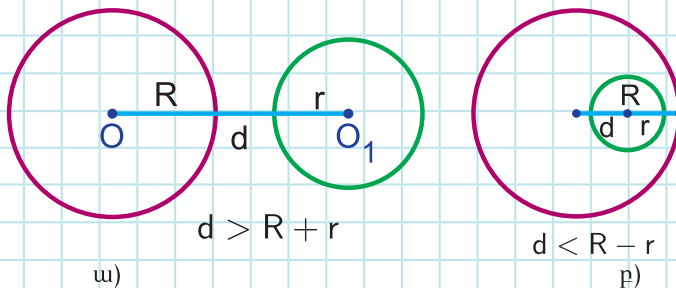
Նկար 9

Պարզ է, որ այդպիսի շրջանագծերը ընդհանուր կետ չունեն:

Ձևակերպենք շրջանագծերի փոխդասավորությունը ներկայացնող երեք թեորեմ, որոնք կընդունենք առանց ապացուցման:

Երկու շրջանագծեր ընդհանուր կետ չունեն նաև հետևյալ փոխդասավորությունների դեպքում.

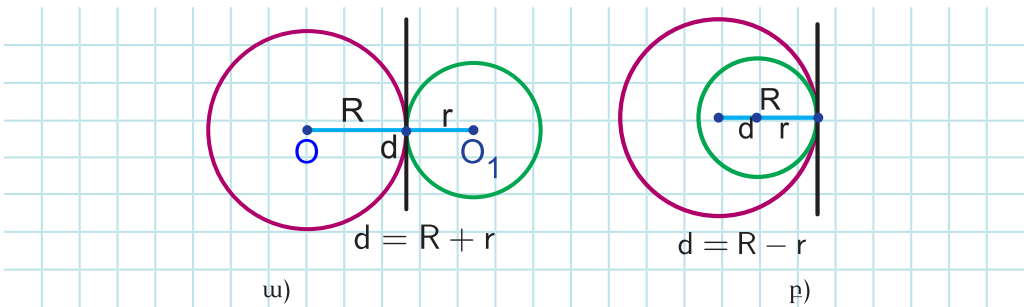
Թեորեմ: Եթե երկու շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը մեծ է դրանց շառավիղների գումարից կամ փոքր է դրանց շառավիղների տարբերությունից, ապա շրջանագծերն ընդհանուր կետ չունեն (նկ. 10):



Նկար 10

Երկու շրջանագծեր ունեն միայն մեկ ընդհանուր կետ հետևյալ փոխադասավորությունների դեպքում.

Թեորեմ: Եթե երկու շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը հավասար է դրանց շառավիղների գումարին կամ դրանց շառավիղների տարբերությանը, ապա շրջանագծերն ունեն միայն մեկ ընդհանուր կետ (նկ. 11):



Նկար 11

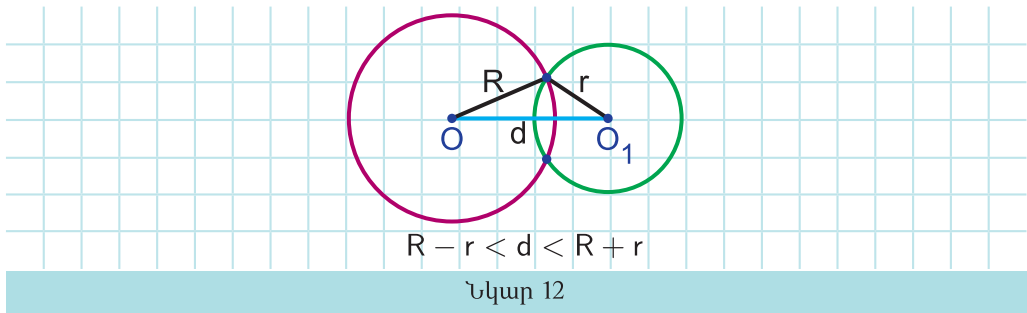
Նկատենք, որ եթե երկու շրջանագծեր ունեն միայն մեկ ընդհանուր կետ, ապա այդ կետով շրջանագծերից մեկին տարված շոշափողը շոշափում է նաև մյուս շրջանագիծը, այսինքն՝ շրջանագծերն ունեն այդ կետով անցնող ընդհանուր շոշափող: Նման դեպքում ասում են, որ **շրջանագծերն իրար շոշափում են:**

Երբ շրջանագծերի կենտրոններն իրենց ընդհանուր շոշափողի տարբեր կողմերում են, ասում են, որ շրջանագծերն ունեն **արտաքին շոշափում** (նկ. 11 ա), իսկ երբ ընդհանուր շոշափողի նույն կողմում են, ասում են, որ շրջանագծերն ունեն **ներքին շոշափում** (նկ. 11 բ):

Նշենք, որ երկու շրջանագծերի ներքին կամ արտաքին շոշափման դեպքում շոշափման կետը դրանց կենտրոններով անցնող ուղղի վրա է:

Ներկայացնենք երկու շրջանագծերի փոխադասավորության ևս մեկ դեպք.

Թեորեմ: Եթե երկու շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը փոքր է դրանց շառավիղների գումարից և մեծ է դրանց շառավիղների տարբերությունից, ապա շրջանագծերն ունեն երկու ընդհանուր կետ (նկ. 12):



Ինտերակտիվ մոդել

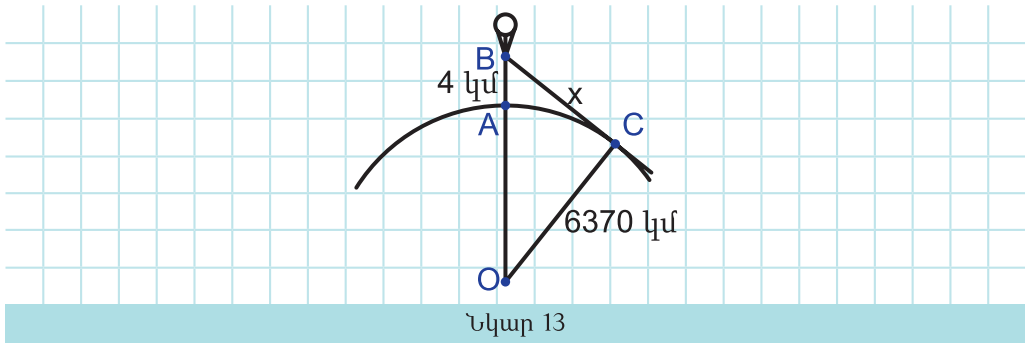
Շրջանագծերի փոխդասավորությունը



Հարցեր և խնդիրներ

1. Կարո՞ղ է շրջանագծի հետ երկու ընդհանուր կետ ունեցող ուղիղը շոշափել այդ շրջանագիծը: Պատասխանը հիմնավորե՛ք:
2. Շրջանագծի կենտրոնով անցնող ուղիղը կարո՞ղ է լինել այդ շրջանագծի շոշափող: Պատասխանը հիմնավորե՛ք:
3. Քանի՞ ընդհանուր կետ ունեն O կենտրոնով ու R շառավղով շրջանագիծը և a ուղիղը, եթե O կետի հեռավորությունը a ուղղից ա) մեծ է շրջանագծի շառավղից, բ) փոքր է շրջանագծի շառավղից, գ) հավասար է շրջանագծի շառավղին:
4. A կետով տարված ուղիղը շոշափում է O կենտրոնով շրջանագիծը B կետում: AOB անկյունը 70° է: Գտե՛ք BAO անկյունը:
5. A կետով տարված ուղիղը շոշափում է O կենտրոնով և 6 սմ շառավղով շրջանագիծը B կետում: Գտե՛ք A կետի հեռավորությունը շրջանագծի կենտրոնից, եթե $AB = 8$ սմ:
6. Շրջանագծի AB տրամագծի B ծայրակետով տարված շոշափողի վրա C կետն ընտրված է այնպես, որ $BC = AB$: Գտե՛ք շրջանագծի շառավիղը, եթե $AC = 12$ դմ:
7. Ինչպե՞ս է ուղղված շրջանագծային հավասարաչափ շարժման արագության վեկտորը: Շրջանագծի վրա ցոյց տվե՛ք երկու կետ, որոնցում այդպիսի շարժման արագությունների վեկտորները ա) փոխուղղահայաց են, բ) հակուղղված են:

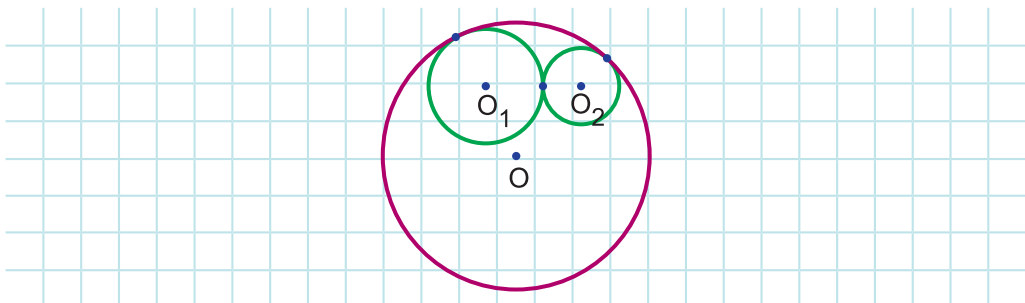
8. Ինչքան հեռու կարելի է տեսնել երկրի մակերևույթից 4 կմ բարձրություն ունեցող օդապարիկից (նկ. 13), եթե երկրագնդի շառավիղը 6370 կմ է:



Նկար 13

9. A կետով տարված ուղիղները շոշափում են շրջանագիծը B և C կետերում: Գտնք $\angle ABC$ -ն, եթե $\angle BAC = 46^\circ$:
10. P կետով տարված ուղիղները շոշափում են O կենտրոնով և 3 սմ շառավղով շրջանագիծը A և B կետերում: Գտնք PAOB քառանկյան պարագիծը, եթե $PA = 11$ սմ:
11. A կետով տարված ուղիղները շոշափում են O կենտրոնով շրջանագիծը B և C կետերում: Գտնք $\angle ABC$ -ն, եթե $\angle BAO = 37^\circ$:
12. Գտնք այն շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է 120° -ի անկյան կողմերը և դրա կենտրոնի հեռավորությունը անկյան գագաթից 12 դմ է:
13. Շրջանագծի տրամագծի ծայրակետերի հեռավորությունները այդ շրջանագծի մի շոշափողից 0,6 սմ և 1,6 սմ են: Գտնք շրջանագծի տրամագծի երկարությունը:
14. Ապացուցեք, որ լարին ուղղահայաց տրամագիծը (շառավիղը) կիսում է այդ լարը:
15. Շրջանագծի տրամագծին ուղղահայաց լարը այն բաժանում է 3 սմ և 27 սմ երկարությամբ հատվածների: Գտնք այդ լարի երկարությունը:
16. Ապացուցեք, որ եթե շրջանագծի լարը տրամագիծ չէ, ապա դրա միջնակետով անցնող շառավիղը ուղղահայաց է այդ լարին:
17. Ապացուցեք, որ շրջանագծի ներսի կետով անցնող ցանկացած ուղիղ հատում է շրջանագիծը:
18. M կետի հեռավորությունը շրջանագծի O կենտրոնից հավասար է շրջանագծի տրամագծին: M կետով տարված ուղիղները շրջանագիծը շոշափում են A և B կետերում: Գտնք AOB եռանկյան անկյունները:

19. O կենտրոնով շրջանագիծը A և B կետերում շոշափող ուղիղները հատվում են C կետում: Գտնք այդ ուղիղների կազմած անկյունը, եթե $\angle ABO = 40^\circ$:
20. O գագաթով ուղիղ անկյան կողմերից մեկի վրա A և B կետերը վերցված են այնպես, որ $AO = 7$ դմ, $OB = 11$ դմ: Գտնք այն շրջանագծի շառավիղը, որն անցնում է A և B կետերով և շոշափում անկյան մյուս կողմը:
21. Ինչպիսի՞ն է 12 սմ և 7 սմ շառավիղներով երկու շրջանագծերի փոխդասավորությունը, եթե դրանց կենտրոնների հեռավորությունը ա) 20 սմ է, բ) 16 սմ է, գ) 19 սմ է:
22. Ինչպիսի՞ն է 10 դմ և 15 դմ շառավիղներով երկու շրջանագծերի փոխդասավորությունը, եթե դրանց կենտրոնների հեռավորությունը ա) 4 դմ է, բ) 5 դմ է, գ) 21 դմ է:
23. Տրված է 9 սմ և 11 սմ շառավիղներով երկու շրջանագիծ: Դրանց կենտրոնների հեռավորության ինչպիսի՞ արժեքի դեպքում ա) շրջանագծերը չեն հատվի, բ) կհատվեն, գ) կշոշափեն միմյանց:
24. O և O_1 կենտրոններով շրջանագծերը հատվում են A և B կետերում: Ապացուցնք, որ OO_1 ուղիղը AB հատվածի միջուղահայացն է:
25. 13 սմ և 15 սմ շառավիղներով շրջանագծերը հատվում են, ընդ որում՝ դրանց ընդհանուր լարը 24 սմ է: Գտնք այդ շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը:
26. 2 դմ և 8 դմ շառավիղներով երկու շրջանագծեր շոշափում են միմյանց, իսկ a ուղիղը A և B կետերում: Գտնք AB հատվածի երկարությունը:
27. O_1 և O_2 կենտրոններով շրջանագծերը շոշափում են միմյանց և O կենտրոնով շրջանագիծը (նկ. 14): Գտնք O կենտրոնով շրջանագծի շառավիղը, եթե $P_{O_1O_2O} = 20$ սմ:



Նկար 14

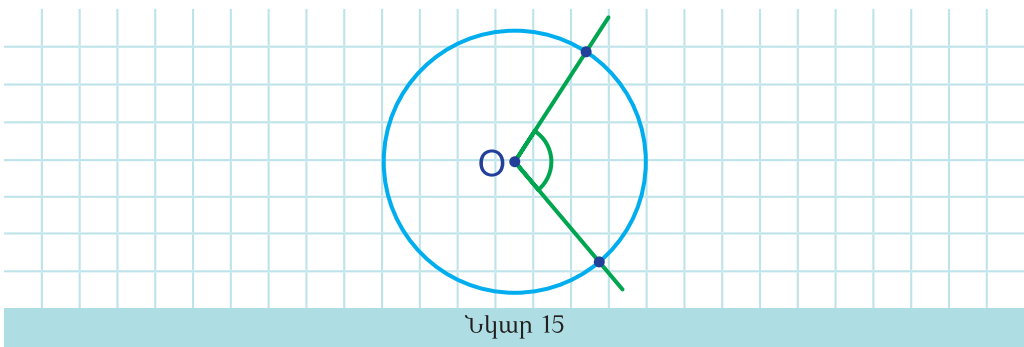
§2. Կենտրոնային և ներգծյալ անկյուններ

□ 4. Շրջանագծի աղեղի աստիճանային չափը

Շրջանագծի աղեղ հասկացությունը սահմանվել է 7-րդ դասարանում: Հիմա ուզում ենք աղեղին վերագրել աստիճանային չափ: Այն ավելի ակնառու է դարձնում շատ կապեր և առնչություններ, կրճատում է շատ խնդիրների լուծման քայլերի քանակը, պարզեցնում, ավելի հակիրճ է դարձնում հետազայում ներկայացվող շատ թեորեմների և ձևակերպումները, և՛ ապացույցները:

Հասկանալի է, որ դա անելու համար պետք է ընտրել անկյուն, որի աստիճանային չափը կվերագրենք շրջանագծի աղեղին: Որպես այդպիսի անկյուն ընտրվում է կենտրոնային անկյունը:

Սահմանում: Այն անկյունը, որի գագաթը շրջանագծի կենտրոնն է, կոչվում է կենտրոնային անկյուն (նկ. 15):

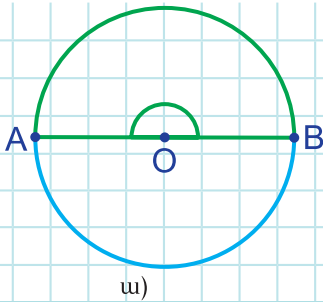


Բայց ամեն մի կենտրոնային անկյուն շրջանագիծը տրոհում է երկու աղեղի:

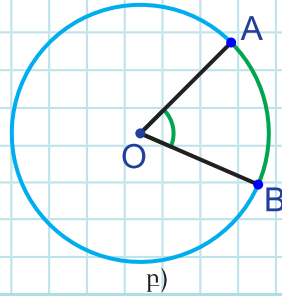
Երբ կենտրոնային անկյունը փռված անկյուն է (նկ. 16 ա), շրջանագիծը տրոհվում է հավասար աղեղների՝ կիսաշրջանագծերի: Այդ դեպքում փռված անկյան աստիճանային չափը վերագրվում է կիսաշրջանագծերից ամեն մեկին: Հետևաբար ամբողջ շրջանագծին վերագրվում է 360° :

Այսպիսով՝ կիսաշրջանագծի աստիճանային չափը 180° է:

2փռված անկյան դեպքում այդ աղեղները տարբեր են կիսաշրջանագծից (նկ. 16 բ): Այդ դեպքում ասում են, որ անկյան ներսում ընկած աղեղը փոքր է մյուս աղեղից:



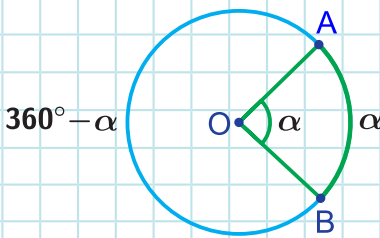
ա)



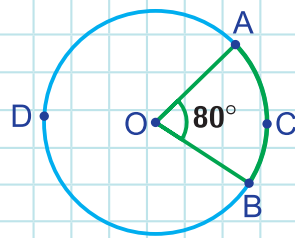
բ)

Նկար 16

Մահմանում: AOB չփռված կենտրոնային անկյան ներսում ընկած աղեղի աստիճանային չափը հավասար է AOB անկյանը, դրսում մնացած աղեղի աստիճանային չափը $360^\circ - \angle AOB$ է (նկ. 17):



Նկար 17



Նկար 18

AB աղեղի աստիճանային չափը, ինչպես և աղեղը, կնշանակենք $\cup AB$ -ով: Ինչպես գիտեք, եթե անհրաժեշտություն կա հստակեցնելու, թե A և B ծայրակետերով որ աղեղը նկատի ունեն, ապա աղեղի վրա նշում են ևս մեկ կետ ու աղեղը նշանակում երեք տառով: Նկար 18-ում $\cup ACB = 80^\circ$, $\cup ADB = 360^\circ - 80^\circ = 280^\circ$:

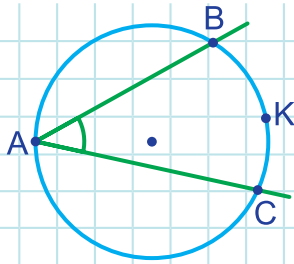


Դինամիկ մաթեմատիկա

Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրերով կառուցե՛ք A կենտրոնով ու AB շառավղով շրջանագիծ: Թաքցրե՛ք B կետը: Շրջանագծի վրա նշե՛ք C և D կետեր: Կառուցե՛ք այդ շրջանագծի C և D ծայրակետերով աղեղներից մեկը: Այդ աղեղի վրա նշե՛ք E կետ: Չափե՛ք CED անկյունը: Շարժե՛ք E կետը և հետևե՛ք անկյան մեծությանը: Արե՛ք եզրակացություն:

□ 5. Թեորեմ ներգծյալ անկյան մասին

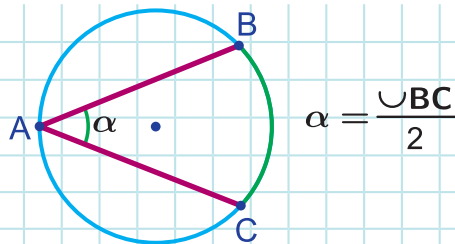
Սահմանում: Այն անկյունը, որի գագաթը շրջանագծի վրա է, իսկ կողմերը հատում են շրջանագիծը, կոչվում է ներգծյալ անկյուն (նկ. 19):



Նկար 19

Ասում են, որ ներգծյալ անկյունը **հենվում է** իր ներսում ընկած աղեղի վրա: Նկար 18-ում A ներգծյալ անկյունը հենված է BKC աղեղի վրա: Հետևյալ թեորեմը կապ է հաստատում ներգծյալ անկյան և դրա հենման աղեղի աստիճանային չափի միջև:

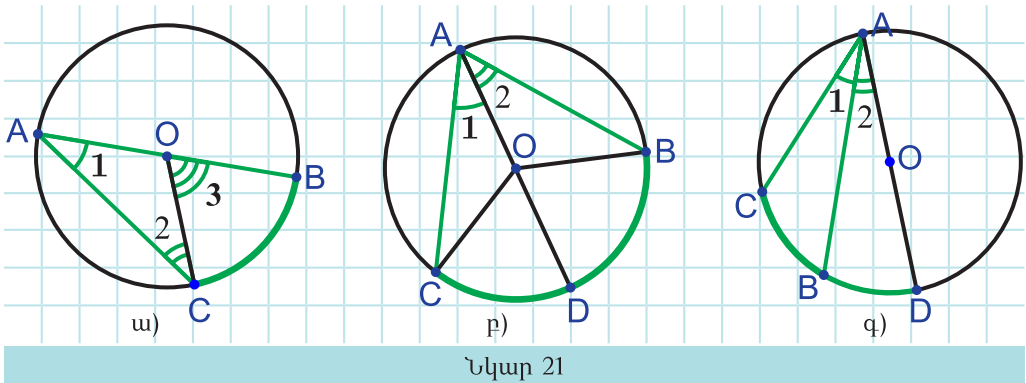
Թեորեմ: Ներգծյալ անկյունը չափվում է այն աղեղի կեսով, որի վրա հենված է (նկ. 20):



Նկար 20

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ BAC անկյունը O կենտրոնով շրջանագծի ներգծյալ անկյուն է: Ապացուցենք, որ $\angle BAC = \frac{\cup BC}{2}$:

Հնարավոր է երեք դեպք՝ 1) շրջանագծի կենտրոնը ներգծյալ անկյան կողմի վրա է (նկ. 21 ա), 2) շրջանագծի կենտրոնը ներգծյալ անկյան ներսում է (նկ. 21 բ), 3) շրջանագծի կենտրոնը ներգծյալ անկյունից դուրս է (նկ. 21 գ):



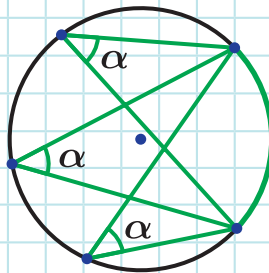
Առաջին դեպքում (նկ. 21 ա) $\angle AOC$ եռանկյունը հավասարաբան է՝ $AO = OC = R$: Հետևաբար $\angle 1 = \angle 2$: Բացի դրանից, որպես $\angle AOC$ եռանկյան արտաքին անկյուն, $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$: Ուրեմն $\angle 1 = \frac{\angle 3}{2}$: Մնում է նկատել, որ $\angle BOC$ աղեղի աստիճանային չափը հավասար է $\angle BOC$ կենտրոնային անկյանը, այսինքն՝ $\angle 3 = \angle BOC$: Հետևաբար $\angle BAC = \angle 1 = \frac{\angle BOC}{2}$:

Երկրորդ դեպքում (նկ. 21 բ), ըստ առաջին դեպքում ապացուցվածի, $\angle 1 = \frac{\angle COD}{2}$, $\angle 2 = \frac{\angle BOD}{2}$: Մյուս կողմից՝ $\angle BAC = \angle 1 + \angle 2$: Ուրեմն $\angle BAC = \frac{\angle COD}{2} + \frac{\angle BOD}{2} = \frac{\angle BOC}{2}$: Առաջին և երկրորդ դեպքերի համար թեորեմն ապացուցված է:

Երրորդ դեպքը (նկ. 21 գ), երկրորդին համանման ձևով, ապացուցե՛ք ինքնուրույն:

Քանի որ նույն աղեղի վրա հենված ներգծյալ անկյունները չափվում են այդ աղեղի կեսով, ապա ներգծյալ անկյան մասին թեորեմից հետևում է.

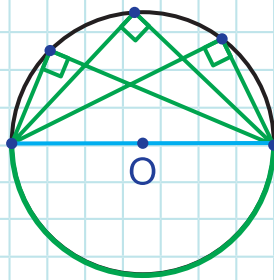
Հետևանք 1: Միևնույն աղեղի վրա հենված ներգծյալ անկյունները հավասար են (նկ. 22):



Նկար 22

Ներգծյալ անկյան մասին թեորեմից հետևում է նաև, որ.

Հետևանք 2: Տրամագծի վրա հենված ներգծյալ անկյունը ուղիղ է (նկ. 23):



Նկար 23

Իրոք, տրամագծի վրա հենված անկյունը հենված է մի աղեղի վրա, որը հավասար է կիսաշրջանագծին, իսկ այդպիսի աղեղի աստիճանային չափը 180° է:

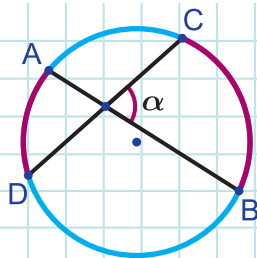


Ինտերակտիվ մոդել

Կենտրոնային և ներգծյալ անկյուններ

❑ 6. Ներգծյալ անկյան մասին թեորեմի այլ հետևանքներ

Թեորեմ: Հատվող լարերով կազմված անկյունը չափվում է այդ անկյան և դրան հակադիր անկյան ներսում ընկած աղեղների կիսագումարով (նկ. 24):

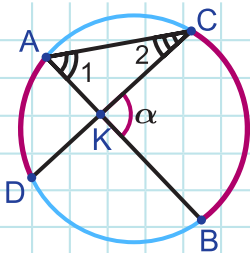


$$\alpha = \frac{\cup CB + \cup AD}{2}$$

Նկար 24

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ շրջանագծի AB և CD լարերը հատվում են K կետում (նկ. 25): CKB անկյունը նշանակենք α -ով և ցույց տանք,

$$\text{որ } \alpha = \frac{\cup CB + \cup AD}{2} :$$



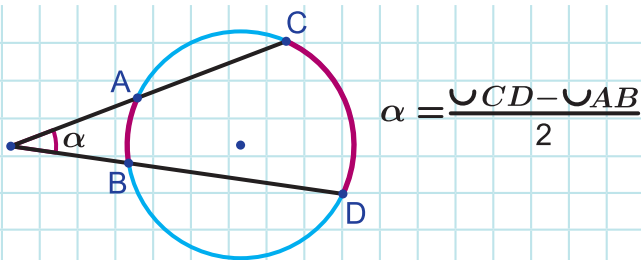
Նկար 25

Տանենք AC լարը: Որպես ներգծյալ անկյուններ՝ $\angle 1 = \frac{\cup CB}{2}$, $\angle 2 = \frac{\cup AD}{2}$:

Մյուս կողմից՝ որպես AKC եռանկյան արտաքին անկյուն, $\alpha = \angle 1 + \angle 2$:

Հետևաբար $\alpha = \angle 1 + \angle 2 = \frac{\cup CB + \cup AD}{2}$: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ: Շրջանագծի դրսի նույն կետից տարված հատողների կազմած անկյունը չափվում է այդ անկյան ներսում ընկած աղեղների կիսատարբերությամբ (նկ. 26):

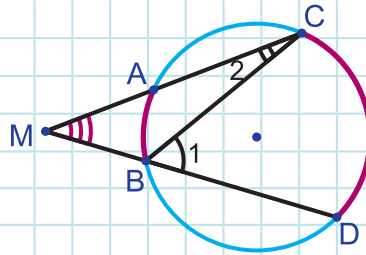


Նկար 26

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ M կետից տարված հատողներից մեկը շրջանագիծը հատում է A և C կետերում, իսկ մյուսը՝ B և D կետերում (նկ. 27): Ապացուցենք, որ $\angle M = \frac{\cup CD - \cup AB}{2}$:

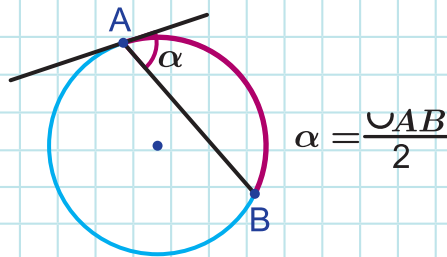
$\angle 1$ -ը և $\angle 2$ -ը, որպես ներգծյալ անկյուններ, համապատասխանաբար չափվում են CD և AB աղեղների կետով. $\angle 1 = \frac{\cup CD}{2}$, $\angle 2 = \frac{\cup AB}{2}$: Մյուս կողմից, որպես MBC եռանկյան արտաքին անկյուն, $\angle 1 = \angle 2 + \angle M$:

Հետևաբար $\angle M = \angle 1 - \angle 2 = \frac{\cup CD - \cup AB}{2}$: Թեորեմն ապացուցված է:



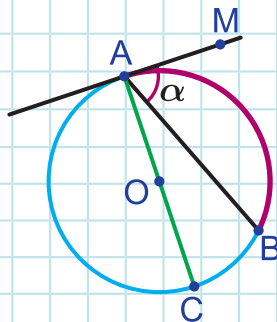
Նկար 27

Թեորեմ: Շոշափողով և շոշափման կետով անցնող լարով կազմված անկյունը չափվում է այդ անկյան ներսում ընկած աղեղի կեսով (նկ. 28):



Նկար 28

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ AM-ը O կենտրոնով շրջանագծի շոշափող է, իսկ AB-ն՝ լար (նկ.29): MAB անկյունը նշանակենք α -ով և ցույց տանք, որ $\alpha = \frac{\cup AB}{2}$:



Նկար 29

Ենթադրենք՝ AB լարը տրամագիծ չէ: Տանենք AC տրամագիծը: Քանի որ շոշափման կետով տարված տրամագիծն ուղղահայաց է շոշափողին, ապա $\angle MAC = 90^\circ$: Քանի որ $\cup ABC = 180^\circ$, ապա կունենանք, որ $\angle MAC = \frac{\cup ABC}{2}$: Մյուս կողմից, որպես ներգծյալ անկյուն, $\angle BAC = \frac{\cup BC}{2}$: Հաշվի առնելով, որ $\alpha = \angle MAC - \angle BAC$, կունենանք.

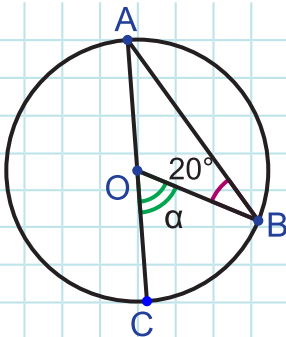
$$\alpha = \frac{\cup ABC - \cup BC}{2} = \frac{\cup AB}{2}$$
: Այս դեպքում թեորեմն ապացուցված է:
 AB լարի տրամագիծ լինելու դեպքը ապացուցե՛ք ինքնուրույն:



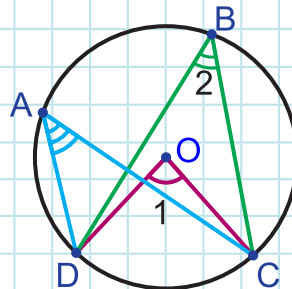
Հարցեր և խնդիրներ

28. AB աղեղի վրա հենված կենտրոնային անկյունը 55° է: Ինչքան է AB աղեղի աստիճանային չափը: Պատասխանը հիմնավորե՛ք:
29. Ինչի է հավասար 67° -ի աղեղի վրա հենված կենտրոնային անկյունը: Պատասխանը հիմնավորե՛ք:
30. Օ կենտրոնով շրջանագծի AB և BC աղեղները համապատասխանաբար 82° և 26° են: Գտե՛ք $\angle AOC$ անկյունը: Քննարկե՛ք բոլոր հնարավոր դեպքերը:
31. AB -ն և BC -ն Օ կենտրոնով շրջանագծի լարերն են: $\angle ABC$ և $\angle AOC$ անկյուններից ո՞րն է կենտրոնային, ո՞րը՝ ներգծյալ:
32. Գտե՛ք 96° -ի աղեղի վրա հենված ներգծյալ անկյունը:
33. A , B և C կետերը կիսաշրջանագծի վրա են, ընդ որում՝ AC -ն տրամագիծ է: AB և BC աղեղների աստիճանային չափերը հարաբերում են, ինչպես 2:3: Գտե՛ք $\angle ABC$, $\angle ACB$ և $\angle BAC$ անկյունները:
34. Երկիրը և Արևը համարելով նյութական կետեր, իսկ Երկրի հետագիծը՝ շրջանագիծ՝ գտե՛ք, թե մոտավորապես ինչքան է այն աղեղի աստիճանային չափը, որով անցնում է Երկիրը՝ պտտվելով Արևի շուրջը ա) մեկ շաբաթում, բ) մեկ ամսում, գ) երկու հարյուր օրում:
35. A , B , C , D կետերը շրջանագծի վրա են (նշված հերթականությամբ): Ապացուցե՛ք, որ $\angle ADB$ անկյունը հավասար է $\angle ACB$ անկյանը:
36. Շրջանագծի A կետը միացված է A կետով չանցնող տրամագծի ծայրակետերին: Ինչպիսի՞ն է առաջացած եռանկյունը: Պատասխանը հիմնավորե՛ք:

37. Շրջանագծի A կետի հեռավորությունները տրամագծի ծայրակետերից 40 սմ և 9 սմ են: Գտե՛ք շրջանագծի շառավիղը:
38. Շրջանագծի վրա՝ դրա AB լարի տարբեր կողմերում վերցված են C և D կետերը: Գտե՛ք CAD և CBD անկյունների գումարը:
39. ABC եռանկյան գագաթները R շառավղով շրջանագծի վրա են, ընդ որում՝ $BC = R$: Գտե՛ք BAC անկյունը:
40. Շրջանագծի AC և BD լարերը հատվում են M կետում: Ապացուցե՛ք, որ AMB եռանկյունը նման է CMD եռանկյանը:
41. A , B և C կետերը շրջանագիծը բաժանում են ընդհանուր մաս չունեցող երեք աղեղների, որոնց աստիճանային չափերը հարաբերում են, ինչպես 1:2:3: Գտե՛ք ABC եռանկյան անկյունները:
42. Ըստ նկար 30-ի տվյալների, որտեղ O -ն շրջանագծի կենտրոնն է, գտե՛ք α -ն:

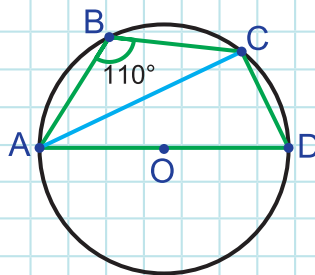


Նկար 30



Նկար 31

43. Նկար 31-ում O -ն շրջանագծի կենտրոնն է: Գտե՛ք A անկյունը, եթե $\angle 1 + \angle 2 = 108^\circ$:
44. Ըստ նկար 32-ի տվյալների, որտեղ O -ն շրջանագծի կենտրոնն է, գտե՛ք անկյուն CAD -ն:



Նկար 32

45. Ապացուցե՛ք, որ եթե շրջանագծի AB և CD աղեղների աստիճանային չափերը հավասար են, ապա $AB = CD$:
46. Հավասարասրուն եռանկյան սրունքն ընդունելով որպես տրամագիծ՝ կառուցել են շրջանագիծ: Ապացուցե՛ք, որ այդ շրջանագիծը անցնում է եռանկյան հիմքի միջնակետով:
47. Երկու շրջանագծեր հատվում են A և B կետերում: AM -ը և AN -ը այդ շրջանագծերի տրամագծերն են: Ապացուցե՛ք, որ M , B , N կետերը նույն ուղղի վրա են:
48. Շրջանագծի AB և CD լարերը հատվում են K կետում: Գտե՛ք $\angle DKB$ -ն, եթե այդ անկյան և դրան հակադիր անկյան ներսում ընկած աղեղների աստիճանային չափերը 67° և 45° են:
49. Շրջանագծի AC և BD լարերը հատվում են M կետում: Չօգտվելով եռանկյան արտաքին անկյան մասին թեորեմից՝ գտե՛ք $\angle AMD$ անկյունը, եթե $\angle ABD = 70^\circ$, $\angle CAB = 38^\circ$:
50. Շրջանագիծը անցնում է $ABCD$ քառանկյան գագաթներով: AC անկյունագիծը BC և AD կողմերի հետ կազմում է 40° և 24° անկյուններ: Գտե՛ք անկյունագծերի կազմած անկյունը:
51. Գտե՛ք շրջանագծի դրսի կետից տարված երկու հատողներով կազմված անկյունը, եթե այդ անկյան ներսում ընկած աղեղները 130° և 50° են:
52. Շրջանագծի դրսի կետից տարված երկու հատողներով կազմված անկյունը 26° է: Շրջանագծի՝ այդ անկյան ներսում ընկած աղեղները հարաբերում են, ինչպես $5:3$: Գտե՛ք այդ աղեղների աստիճանային չափերը:
53. Շրջանագծի AB լարի A ծայրակետով տարված է շոշափող: Գտե՛ք շոշափողով և լարով կազմված անկյունը, եթե AB աղեղը 98° է:
54. Օգտվելով շոշափողով և շոշափման կետով անցնող լարով կազմված անկյան մասին թեորեմից՝ ապացուցե՛ք, որ նույն կետից տարված շրջանագծի շոշափողների հատվածները հավասար են:
55. Ապացուցե՛ք, որ շրջանագծի գուգահեռ լարերի միջև ընկած աղեղների աստիճանային չափերը հավասար են:
56. Շրջանագծի AB և CD լարերը գուգահեռ են: Շրջանագծի P կետը հավասարահեռ է A և B , C և D լարերի ծայրակետերից: Ապացուցե՛ք, որ $\triangle APC = \triangle BPD$:
57. Սեղանի գագաթները շրջանագծի վրա են: Ապացուցե՛ք, որ սեղանը հավասարասրուն է:

58. Շրջանագիծն անցնում է ABC եռանկյան A և C գագաթներով և հատում է AB և BC կողմերը համապատասխանաբար M և K կետերում: Գտնք $\angle B$ -ն, եթե $\angle BAK = 35^\circ$, $\angle AKC = 55^\circ$:
59. Շրջանագիծն անցնում է ABC եռանկյան A և C գագաթներով և հատում AB կողմը E , իսկ BC կողմը՝ F կետում: Գտնք AFC անկյունը, եթե $\angle ABC = 72^\circ$, իսկ $\angle AEC = 5 \cdot \angle BAF$:



Խմբային աշխատանք

Դասարանի աշակերտներին բաժանեք մի քանի խմբի: Խմբերին հանձնարարեք քննարկել և կառուցման հետևյալ խնդրի լուծման քայլաշար առաջարկել.

Տրված է O կենտրոնով շրջանագիծ և շրջանագծից դուրս A կետը: Կառուցեք շրջանագծի՝ A կետով անցնող շոշափող:

Քննարկումներից հետո թող ամեն խմբից մեկը ներկայացնի իրենց քայլաշարն ու հիմնավորի, որ քայլաշարի կիրառման շնորհիվ խնդիրը լուծված կլինի:

Վերջում միասին դիտեք «Շրջանագծի շոշափողի կառուցումը» ինտերակտիվ մոդելը:



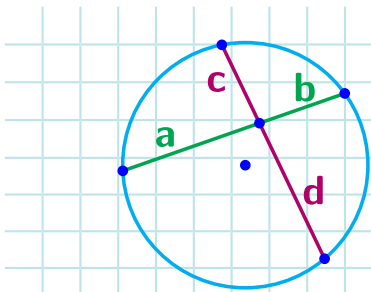
Ինտերակտիվ մոդել

Շրջանագծի շոշափողի կառուցումը

§ 3. Առնչություններ հատվող լարերի, հատողի և շոշափողի միջև

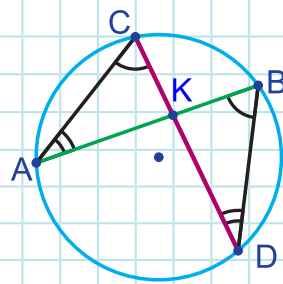
□ 7. Հատվող լարերի հատկությունը:

Թեորեմ: Շրջանագծի երկու հատվող լարերից մեկի հատվածների արտադրյալը հավասար է մյուս լարի հատվածների արտադրյալին (նկ. 33):



$$ab = cd$$

Նկար 33



Նկար 34

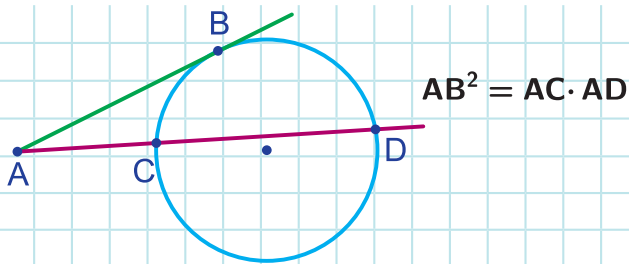
Ապացուցում: Ենթադրենք՝ շրջանագծի AB և CD լարերը հատվում են K կետում (նկ. 34): Ապացուցենք, որ $AK \cdot KB = CK \cdot KD$:

Որպես AD աղեղի վրա հենված անկյուններ՝ $\angle C = \angle B$: A և D անկյուններն էլ հենված են CB աղեղի վրա, հետևաբար $\angle A = \angle D$:

Քանի որ ACK և DBK եռանկյունների երկու անկյունները համապատասխանաբար հավասար են, ապա, ըստ եռանկյունների նմանության I հայտանիշի, $\triangle ACK \sim \triangle BDK$: Ուրեմն այդ եռանկյունների նմանակ կողմերը համեմատական են՝ $\frac{AK}{KD} = \frac{CK}{KB}$: Վերջինից էլ հետևում է, որ $AK \cdot KB = CK \cdot KD$: Թեորեմն ապացուցված է:

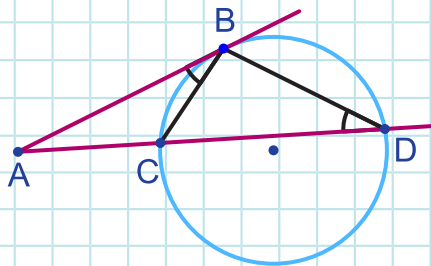
□ 8. Շրջանագծի հատողի և շոշափողի հատկությունը

Թեորեմ: Եթե A կետով տարված են AB շոշափողը (B-ն շոշափման կետն է) և հատող, որը շրջանագիծը հատում է C և D կետերում, ապա $AB^2 = AC \cdot AD$ (նկ. 35):



Նկար 35

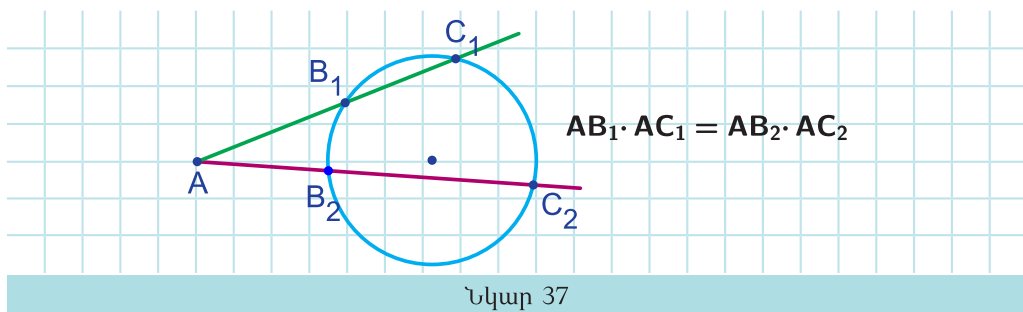
Ապացուցում: Ենթադրենք՝ A կետով տարված են AB շոշափողը (B-ն շոշափման կետն է) և հատող, որը շրջանագիծը հատում է C և D կետերում (նկ. 36): Ապացուցենք, որ $AB^2 = AC \cdot AD$:



Նկար 36

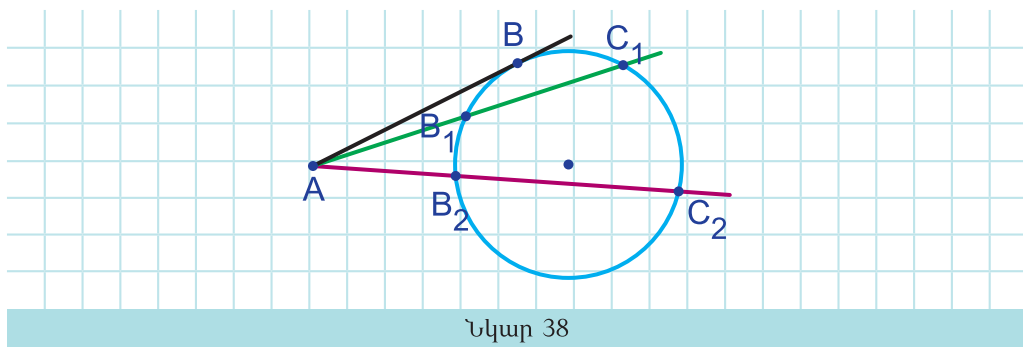
Դիտարկենք $\triangle ABC$ և $\triangle ABD$ եռանկյունները: Այդ եռանկյունների A անկյունը ընդհանուր է: Բացի դրանից, որպես ներգծյալ անկյուն, $\angle D = \frac{\angle BOC}{2}$: BC աղեղի կետով է չափվում նաև $\angle ABC$ անկյունը (որպես շոշափողով և հատողով կազմված անկյուն): Ուրեմն այդ եռանկյունների երկու անկյունները համապատասխանաբար հավասար են: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների նմանության I հայտանիշի, $\triangle ABC \sim \triangle ABD$: Ուրեմն այդ եռանկյունների նմանակ կողմերը համեմատական են՝ $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$: Վերջինից էլ հետևում է, որ $AB^2 = AC \cdot AD$: Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք: Եթե շրջանագծի դրսի A կետով տարված է երկու հատող, որոնցից մեկը շրջանագիծը հատում է B_1 և C_1 , իսկ մյուսը՝ B_2 և C_2 կետերում, ապա $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$ (նկ. 37):



Նկար 37

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ շրջանագծի դրսի A կետով տարված է երկու հատող, որոնցից մեկը շրջանագիծը հատում է B_1, C_1 , իսկ մյուսը՝ B_2 և C_2 կետերում (նկ. 38): Ապացուցենք, որ $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$:



Նկար 38

A կետից տանենք նաև AB շոշափողը: Երկու անգամ կիրառելով նախորդ թեորեմը՝ կունենանք՝ $AB^2 = AB_1 \cdot AC_1$, $AB^2 = AB_2 \cdot AC_2$: Ստացված հավասարություններից էլ հետևում է, որ $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$: Հետևանքն ապացուցված է:



Հարցեր և խնդիրներ

60. Շրջանագծի AB և CD լարերը հատվում են K կետում, ընդ որում՝ $AK = 9$ սմ, $KB = 6$ սմ, $CK = 3$ սմ: Գտնեք KD-ն:
61. Շրջանագծի AB և CD լարերը հատվում են K կետում, որը AB լարը բաժանում է 3:1 հարաբերությամբ, իսկ CD լարը՝ 6 դմ և 8 դմ երկարությամբ հատվածների: Գտնեք AB-ն:
62. A կետով տարված են AB շոշափողը (B-ն շոշափման կետն է) և հատող, որը շրջանագիծը հատում է C և D կետերում: Գտնեք AB-ն, եթե $AC = 4$ սմ, $CD = 12$ սմ:

63. A կետով տարված են AB շոշափողը (B-ն շոշափման կետն է) և հատող, որը շրջանագիծը հատում է C և D կետերում: Գտնք CD-ն, եթե $AB = 9$ սմ, $AC = 3$ սմ:
64. Շրջանագծի դրսի A կետով տարված է երկու հատող, որոնցից մեկը այն հատում է B_1 և C_1 , իսկ մյուսը՝ B_2 և C_2 կետերում: Գտնք AB_1 -ը, եթե $AC_1 = 12$ սմ, $AB_2 = 6$ սմ, $AC_2 = 16$ սմ:
65. Շրջանագծի դրսի A կետով տարված է երկու հատող, որոնցից մեկը այն հատում է B_1 և C_1 , իսկ մյուսը՝ B_2 և C_2 կետերում: Գտնք AC_1 -ը, եթե $AB_1 = 15$ սմ, $AB_2 = 20$ սմ, $B_2C_2 = 7$ սմ ($B_1 \in AC_1$, $B_2 \in AC_2$):
66. Շրջանագծի տրամագծին ուղղահայաց լարը այն բաժանում է 4 սմ և 16 սմ երկարությամբ հատվածների: Գտնք այդ լարի երկարությունը:
67. Շրջանագծի ներսի կետը դրա կենտրոնից 15 սմ հեռավորության վրա է: Այդ կետով տարված լարը այդ կետով բաժանվում է 7 սմ և 25 սմ երկարությամբ մասերի: Գտնք շրջանագծի շառավիղը:
68. Շրջանագծի AB և CD լարերը հատվում են P կետում: Գտնք $\angle APC$ եռանկյան կողմերը, եթե $AB = CD = 12$ սմ, $\angle APC = 60^\circ$, $AC = 2 \cdot BD$:
69. P կետի հեռավորությունը 11 սմ շառավղով շրջանագծի կենտրոնից 7 սմ է: P կետով տարված լարի երկարությունը 18 սմ է: Գտնք այն հատվածների երկարությունները, որոնց բաժանվում է լարը P կետով:
70. M կետը R շառավղով շրջանագծի ներսում է և կենտրոնից d հեռավորության վրա է: Ապացուցեք, որ այդ շրջանագծի ցանկացած AB լարի համար, որն անցնում է M կետով, $AM \cdot BM$ -ը հաստատուն է: Գտնք այդ արտադրյալը:
71. A կետով տարված են AB շոշափողը (B-ն շոշափման կետն է) և հատող, որը շրջանագիծը հատում է C և D կետերում ($C \in AD$): Գտնք AD-ն, եթե $AC : CD = 2 : 6$, $AB = 9$ դմ:
72. Շրջանագծի շառավիղը 7 սմ է: Կետից, որի հեռավորությունը շրջանագծի կենտրոնից 9 սմ է, տարված հատողը շրջանագծով բաժանվում է երկու հավասար մասերի: Գտնք հատողի երկարությունը:
73. Շրջանագծի P կետից տարված են PA տրամագիծը և PM շոշափողը: B-ն MA ուղղի և շրջանագծի հատման կետն է: Գտնք BM-ը, եթե շրջանագծի շառավիղը 15 սմ է, իսկ $PM = 15\sqrt{5}$ սմ:
74. Ապացուցեք, որ երկու շրջանագծերի հատման կետերով անցնող ուղիղն անցնում է դրանց ընդհանուր շոշափողի միջնակետով:

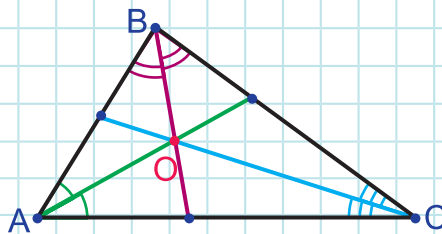
§4. Եռանկյան չորս նշանավոր կետերը

□ 9. Եռանկյան կիսորդների և կողմերի միջուղահալացների հատկությունները

Վերհիշենք 7-րդ դասարանից հայտնի մի թեորեմ, որը մեզ կօգնի ապացուցել, որ եռանկյան կիսորդները հատվում են մի կետում:

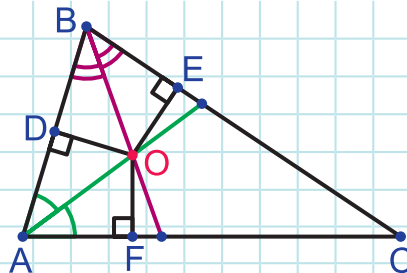
Չփոփած անկյան կիսորդի ցանկացած կետ հավասարահեռ է այդ անկյան կողմերից և հակառակը՝ եթե անկյան ներսի կետը հավասարահեռ է անկյան կողմերից, ապա այն անկյան կիսորդի կետ է:

Թեորեմ: Եռանկյան կիսորդները հատվում են մի կետում (նկ. 39):



Նկար 39

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ ABC եռանկյան A և B անկյունների կիսորդները հատվում են O կետում (նկ. 40): Ապացուցենք, որ O կետը պատկանում է նաև C անկյան կիսորդին:



Նկար 40

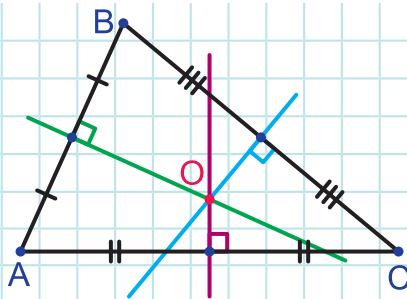
Քանի որ O -ն A անկյան կիսորդի կետ է, ապա այն հավասարահեռ է այդ անկյան կողմերից՝ $OD = OF$: Բայց O -ն նաև B անկյան կիսորդի կետ

է, ուրեմն $OD = OE$: Հետևաբար $OE = OF$, այսինքն՝ O -ն հավասարահեռ է C անկյան կողմերից: Ուրեմն O -ն պատկանում է C անկյան կիսորդին: Թերթեմն ապացուցված է:

Վերհիշենք ևս մեկ թերթեմ 7-րդ դասարանի դասընթացից, որի օգնությամբ կապացուցենք, որ եռանկյան կողմերի միջնուղղահայացները հատվում են մի կետում:

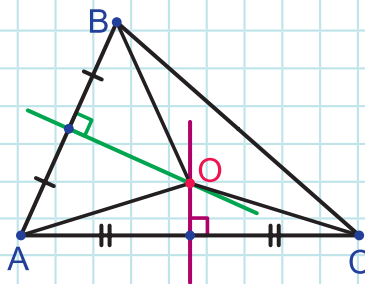
Հատվածի միջնուղղահայացի ամեն մի կետ հավասարահեռ է հատվածի ծայրակետերից և հակառակը՝ հատվածի ծայրակետերից հավասարահեռ ամեն մի կետ պատկանում է այդ հատվածի միջնուղղահայացին:

Թերթեմ: Եռանկյան կողմերի միջնուղղահայացները հատվում են մի կետում (նկ. 41):



Նկար 41

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ ABC եռանկյան AB և AC կողմերի միջնուղղահայացները հատվում են O կետում (նկ. 42): Ապացուցենք, որ O կետը պատկանում է նաև BC կողմի միջնուղղահայացին:



Նկար 42

Քանի որ O -ն AB հատվածի միջնուղղահայացի կետ է, ապա $AO = OB$: Բայց O -ն նաև AC հատվածի միջնուղղահայացի կետ է,

ուրեմն $AO = OC$: Հետևաբար $BO = OC$, այսինքն՝ O -ն հավասարահեռ է BC հատվածի ծայրակետերից: Ուրեմն O -ն պատկանում է BC կողմի միջնուղղահայացին: Թեորեմն ապացուցված է:

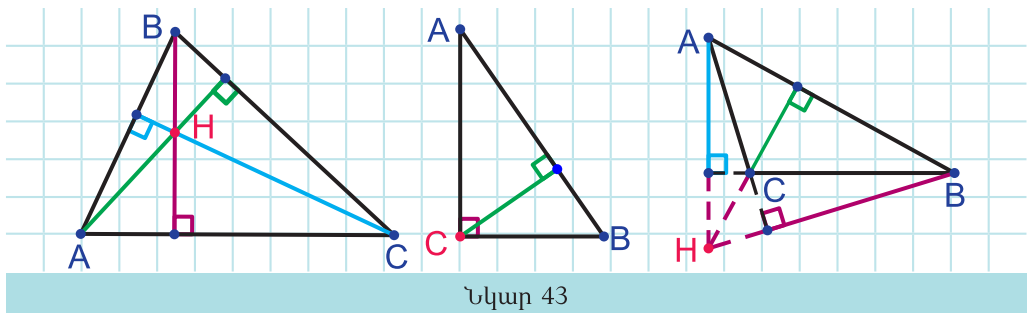


Ինտերակտիվ մոդել

Եռանկյան կիսորդների հատման կետը

□ 10. Թեորեմ եռանկյան բարձրությունների հատման մասին

Թեորեմ: Եռանկյան բարձրությունները կամ դրանց շարունակությունները հատվում են մի կետում (նկ. 43):

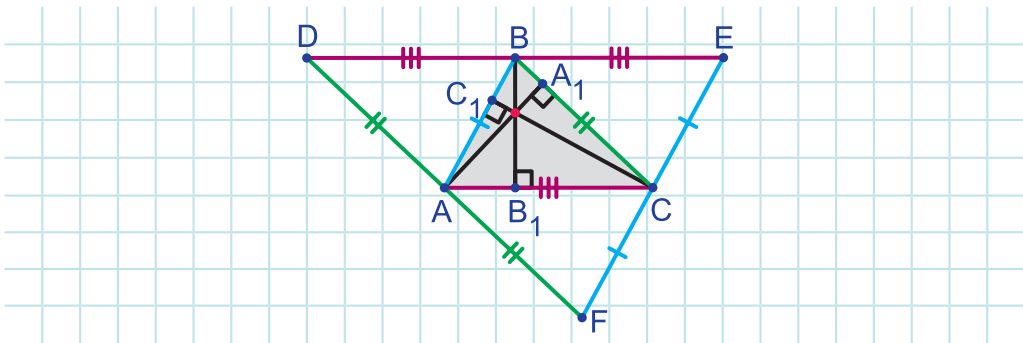


Նկար 43

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ AA_1 -ը, BB_1 -ը, CC_1 -ը ABC եռանկյան բարձրություններն են: Ապացուցենք, որ այդ բարձրությունները կամ դրանց շարունակությունները հատվում են մի կետում:

Եռանկյան գագաթներով տանենք դրանց դիմացի կողմերին զուգահեռ ուղիղներ և դրանց հատման կետերը նշանակենք D -ով, E -ով և F -ով (նկ. 44):

$ADBC$ քառանկյան հանդիպակաց կողմերը զույգ առ զույգ զուգահեռ են: Հետևաբար այն զուգահեռագիծ է: Ուրեմն $DB = AC$: $ABEC$ քառանկյան հանդիպակաց կողմերը նույնպես զույգ առ զույգ զուգահեռ են: Հետևաբար այն նույնպես զուգահեռագիծ է: Ուրեմն $BE = AC$: Այսպիսով՝ $DB = BE$, այսինքն՝ B -ն DE -ի միջնակետն է: Քանի որ BB_1 -ն ուղղահայաց է AC -ին, ապա ուղղահայաց է դրան զուգահեռ DE -ին: Ուրեմն BB_1 ուղիղը DE հատվածի միջնուղղահայացն է:



Նկար 44

Համանման ձևով կարելի է ցույց տալ, որ CC_1 ուղիղը EF հատվածի, իսկ AA_1 ուղիղը՝ DF հատվածի միջուղղահայացներն են:

Ուրեմն կստացվի, որ այդ ուղիղները DEF եռանկյան կողմերի միջնուղղահայացներն են, հետևաբար հատվում են մի կետում: Թեորեմն ապացուցված է:

Այս պարագրաֆում ապացուցեցինք, որ եռանկյան կիսորդները հատվում են մի կետում, մի կետում են հատվում եռանկյան կողմերի միջուղղահայացները: Նաև ապացուցվեց, որ եռանկյան բարձրությունները կամ դրանց շարունակությունները հատվում են մի կետում: Իսկ 8-րդ դասարանում ապացուցվել էր, որ եռանկյան միջնագծերը հատվում են մի կետում:

Այդ չորս կետերը՝ եռանկյան կիսորդների հատման կետը, կողմերի միջուղղահայացների հատման կետը, բարձրությունների կամ դրանց շարունակությունների հատման կետը և միջնագծերի հատման կետը կոչվում են **եռանկյան նշանավոր կետեր**:



Ինտերակտիվ մոդել

Եռանկյան բարձրությունների հատման կետը



Հարցեր և խնդիրներ

75. Կարո՞ղ է ABC եռանկյան A և B անկյունների կիսորդների հատման կետը տարբեր լինել B և C անկյունների կիսորդների հատման կետից: Պատասխանը հիմնավորե՛ք:

76. ABC եռանկյան A և B անկյունների կիսորդները հատվում են M կետում: Գտնք $\angle BCM$ -ը, եթե $\angle C = 28^\circ$:
77. ABC եռանկյան A անկյան կիսորդին պատկանող K կետը հավասարահեռ է եռանկյան BC և AB կողմերից: Գտնք $\angle ABK$ -ն, եթե $\angle B = 134^\circ$:
78. Կարո՞ղ է ABC եռանկյան AB և BC կողմերի միջնուղղահայացների հատման կետը տարբեր լինել BC և AC կողմերի միջնուղղահայացների հատման կետից: Պատասխանը հիմնավորե՛ք:
79. M -ը ABC եռանկյան AB և BC կողմերի միջնուղղահայացների հատման կետն է: AC կողմի K միջնակետը միացված է M -ին: Ինչպիսի՞ն է AKM եռանկյունը: Պատասխանը հիմնավորե՛ք:
80. P կետից ABC եռանկյան AB և BC կողմերին տարած ուղղահայացները կիսում են այդ կողմերը: Ի՞նչ հարաբերությամբ կբաժանի P կետից տարած ուղղահայացը AC կողմը:
81. ABC եռանկյան AB և BC կողմերին տարած բարձրությունները հատվում են M կետում: Ուղղահայաց է BM ուղիղը AC -ին: Պատասխանը հիմնավորե՛ք:
82. ABC եռանկյան AB և BC կողմերին տարած բարձրությունների շարունակությունները հատվում են M կետում: Ուղղահայաց է BM ուղիղը AC -ին: Պատասխանը հիմնավորե՛ք:
83. ABC եռանկյան BB_1 և CC_1 կիսորդները հատվում են M կետում, իսկ AB_1C_1 եռանկյան B_1B_2 և C_1C_2 կիսորդները հատվում են N կետում: Ապացուցե՛ք, որ A, M, N կետերը մի ուղղի վրա են:
84. ABC եռանկյան կիսորդների հատման O կետով AB կողմին զուգահեռ տարված ուղիղը AC և BC կողմերը հատում է M և N կետերում: Ապացուցե՛ք, որ $AM + BN = MN$:
85. ABC եռանկյան կիսորդների հատման O կետով տարված են եռանկյան AC և BC կողմերին զուգահեռ ուղիղներ: Այդ ուղիղները AB կողմը հատում են P և Q կետերում: Ապացուցե՛ք, որ OPQ եռանկյան պարագիծը հավասար է AB կողմի երկարությանը:
86. ABC եռանկյան AB և BC կողմերի միջնուղղահայացները հատվում են AC կողմի D կետում: Գտնք անկյուն B -ն:
87. Ապացուցե՛ք, որ եռանկյան անկյան և դրան ոչ կից երկու արտաքին անկյունների կիսորդները պարունակող ուղիղները հատվում են մի կետում:

88. ABC եռանկյան AB կողմի, որպես տրամագծի վրա կառուցված շրջանագիծը AC և BC կողմերը հատում է M և N կետերում: MB և NA ուղիղները հատվում են K կետում: Գտեք CK և AB ուղիղների կազմած անկյունը:
89. ABC եռանկյան AA_1 և CC_1 բարձրությունները հատվում են K կետում: BK ուղիղը AC -ն հատում է B_1 կետում: Ապացուցեք, որ KC_1B եռանկյունը նման է KB_1C եռանկյանը:
90. ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունները հատվում են H կետում: Ապացուցեք, որ $\angle AHC = 180^\circ - \angle B$:
91. ABC եռանկյան AH բարձրությունն անցնում է BM միջնագծի միջնակետով: Ապացուցեք, որ BMC եռանկյունում նույնպես բարձրություններից մեկն անցնում է միջնագծերից մեկի միջնակետով:



Խմբային աշխատանք

Դասարանի աշակերտներին բաժանեք մի քանի խմբի և հանձնարարեք, օգտվելով GeoGebra ծրագրից և կիրառելով «Շրջանագիծ ըստ կենտրոնի ու շառավղի» գործիքը, պարզել հետևյալ հարցերի պատասխանները.

1) Քանի՞ շրջանագիծ կարելի է տանել տրված A կետով: Ամեն մի կետ կարո՞ղ է ծառայել որպես այդպիսի շրջանագծի կենտրոն:

2) Քանի՞ շրջանագիծ կարելի է տանել տրված A և B կետերով: Ամեն մի կետ կարո՞ղ է ծառայել որպես այդպիսի շրջանագծի կենտրոն: Ո՞ր ուղղի վրա են ընկած այդպիսի կետերը:

Երկրորդ հարցը հետազոտելիս նախ պետք է տանել A կետով անցնող շրջանագիծ, ապա արդեն կառուցված շրջանագծի կենտրոնը շարժելով հասնել նրան, որ շրջանագիծն անցնի նաև B կետով: Պետք է կառուցել A և B կետերով անցնող գոնե 3–4 շրջանագիծ:

3) Քանի՞ շրջանագիծ կարելի է տանել մի ուղղի չպատկանող երեք կետով:

Երրորդ հարցը պարզելու համար հարմար է օգտվել «Շրջանագիծ երեք կետով» գործիքից: Գործիքը, որևէ հերթականությամբ կիրառելուց հետո, հաջորդ անգամ պետք է կիրառել այլ հերթականությամբ:

Քննարկումներից հետո խմբերը թող ներկայացնեն պատասխանների իրենց տարբերակները:

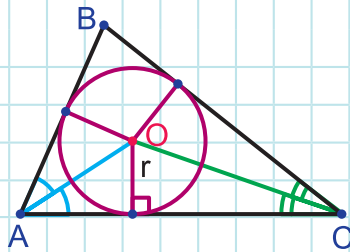
§ 5. Ներգծյալ և արտագծյալ շրջանագծեր

□ 11. Եռանկյանը ներգծած շրջանագիծը

Սահմանում: Շրջանագիծը, որը շոշափում է բազմանկյան բոլոր կողմերը, կոչվում է բազմանկյանը ներգծած շրջանագիծ, իսկ բազմանկյունը՝ այդ շրջանագծին արտագծած բազմանկյուն:

Շրջանը, որին եզերող շրջանագիծը ներգծած է բազմանկյանը, կանվանենք **բազմանկյանը ներգծած շրջան**:

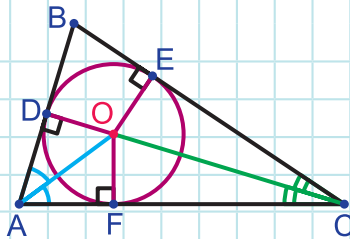
Թեորեմ: Ցանկացած եռանկյան կարելի է ներգծել շրջանագիծ, այն էլ միայն մեկը (նկ. 45):



Նկար 45

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ ABC եռանկյան կիսորդները հատվում են O կետում: O կետից եռանկյան կողմերին տանենք OD , OE և OF ուղղահայացները (նկ. 46):

Քանի որ կիսորդների հատման կետը հավասարախեռ է ABC եռանկյան կողմերից, ապա O կենտրոնով և OD շառավղով շրջանագիծը կանցնի նաև E և F կետերով:



Նկար 46

Բացի դրանից՝ այդ շրջանագիծը կշոշափի եռանկյան կողմերը, քանի որ դրանք համապատասխանաբար անցնում են OD, OE, OF շառավիղների ծայրակետերով և ուղղահայաց են այդ շառավիղներին: Հետևաբար O կենտրոնով և OD շառավիղով շրջանագիծը կլինի ներգծված ABC եռանկյանը: Թեորեմի առաջին մասն ապացուցված է:

Հիմա ապացուցենք, որ եռանկյանը ներգծած շրջանագիծը միակն է:

Ենթադրենք հակառակը՝ եռանկյանը կարելի է ներգծել երկու շրջանագիծ: Այդ շրջանագծերի կենտրոնները կլինեն հավասարահեռ եռանկյան կողմերից: Բայց եռանկյան կողմերից հավասարահեռ կետը միակն է: Դա եռանկյան կիսորդների հատման O կետն է: Հետևաբար այդ շրջանագծերի կենտրոնները համընկնում են: Դրանց շառավիղները հավասար են O կետի հեռավորությանը եռանկյան որևէ կողմից:

Ուրեմն այդ շրջանագծերը համընկնում են: Թեորեմն ապացուցված է:

Հիշեք, որ **եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնը եռանկյան կիսորդների հատման կետն է**, և այդ կետը կառուցելու համար բավական է տանել կիսորդներից երկուսը:



Ինտերակտիվ մոդել

Եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կառուցումը

□ 12. Եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը

Մահմանում: Շրջանագիծը, որն անցնում է բազմանկյան բոլոր գագաթներով, կոչվում է բազմանկյանն արտագծած շրջանագիծ, իսկ բազմանկյունը՝ այդ շրջանագծին ներգծված բազմանկյուն:

Շրջանը, որին եզերող շրջանագիծը արտագծած է բազմանկյանը, կանվանենք **բազմանկյանն արտագծած շրջան**:

Թեորեմ: Ցանկացած եռանկյան կարելի է արտագծել շրջանագիծ, այն էլ միայն մեկը (նկ. 47):



Նկար 48

Քանի որ մի ուղղի պատկանող երեք կետով շրջանագիծ չի անցնում (ապացուցվել է կետ 1-ում), իսկ մի ուղղի չպատկանող երեք կետով անցնում է միայն մեկ շրջանագիծ, ապա երկու շրջանագծեր չեն կարող ունենալ երկուսից ավելի ընդհանուր կետ:



Ինտերակտիվ մոդել

Եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կառուցումը



Դինամիկ մաթեմատիկա

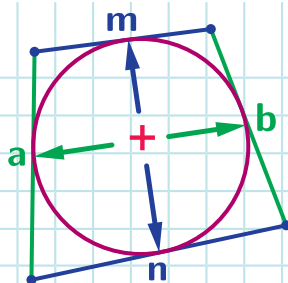
Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրերով կառուցեք A կենտրոնով ու AB շառավիղով շրջանագիծ: Թաքցրեք B կետը: Կառուցեք շրջանագծին ներգծված քառանկյուն: Չափեք այդ քառանկյան հանդիպակաց անկյունների մի զույգի մեծությունները: Ստեղծեք գրություն, որը ցույց է տալիս չափված անկյունների գումարը: Շարժեք ներգծված քառանկյան գագաթները և հետևեք չափված անկյունների գումարին: Արեք եզրակացություն:

□ 13. Ներգծյալ և արտագծյալ քառանկյունների հատկությունները

Ի տարբերություն եռանկյան, ամեն քառանկյան չէ, որ կարելի է ներգծել կամ արտագծել շրջանագիծ:

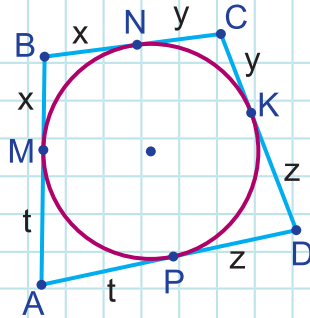
Այս կետում կդիտարկենք այն քառանկյունների հատկությունները, որոնց հնարավոր է ներգծել կամ արտագծել շրջանագիծ:

Թեորեմ: Արտագծյալ քառանկյան հանդիպակաց կողմերի գումարները հավասար են (նկ. 49):



Նկար 49

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ $ABCD$ քառանկյանը ներգծված է շրջանագիծ (նկ. 50): Ապացուցենք, որ $AB + CD = BC + AD$:



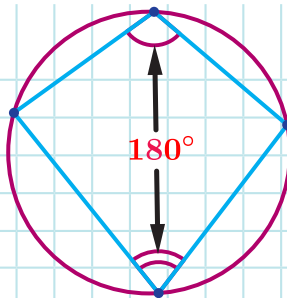
Նկար 50

Օգտվելով նույն կետից տարված շոշափողների հատվածների հավասարությունից՝ կունենանք՝ $BM = BN \equiv x$, $CN = CK \equiv y$, $DK = DP \equiv z$, $AM = AP \equiv t$: Հետևաբար $AB + CD = t + x + y + z$, $BC + AD = x + y + z + t$: Ստացված հավասարություններից էլ հետևում է, որ $AB + CD = BC + AD$: Թեորեմն ապացուցված է:

Ապացուցված թեորեմից հետևում է, որ a և b ($a \neq b$) կից կողմերով ուղղանկյանը հնարավոր չէ ներգծել շրջանագիծ:

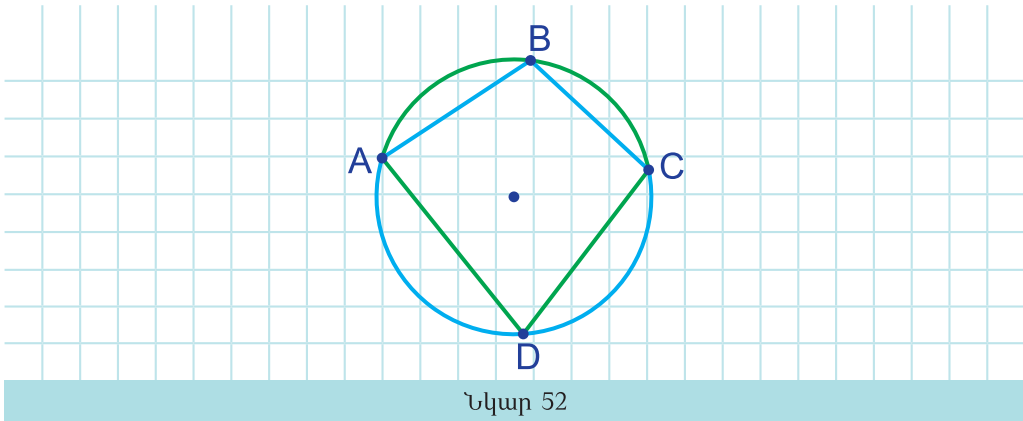
Իրոք, եթե ենթադրենք, որ այդպիսի ուղղանկյանը հնարավոր է ներգծել շրջանագիծ, ապա թեորեմից կհետևի, որ $2a = 2b$, ինչը հակասում է $a \neq b$ պայմանին:

Թեորեմ: Ներգծյալ քառանկյան հանդիպակաց անկյունների գումարը 180° է (նկ. 51):



Նկար 51

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ $ABCD$ քառանկյանն արտագծված է շրջանագիծ (նկ. 52):



Նկար 52

Ապացուցենք, որ $\angle B + \angle D = 180^\circ$: Որպես ներգծյալ անկյուններ՝
 $\angle B = \frac{\cup ADC}{2}$, $\angle D = \frac{\cup ABC}{2}$: Հետևաբար $\angle B + \angle D = \frac{\cup ADC + \cup ABC}{2}$:

Բայց $\angle ADC$ և $\angle ABC$ աղեղները փոխլրացնող աղեղներ են: Ուրեմն
 $\angle B + \angle D = \frac{\cup ADC + \cup ABC}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$: Նույն ձևով կարելի է ապա-
 ցուցել, որ $\angle A + \angle C = 180^\circ$: Թեորեմն ապացուցված է:

Ապացուցված թեորեմից հետևում է, որ շեղանկյանը, որը քառակուսի
 չէ, հնարավոր չէ արտագծել շրջանագիծ:

Իրոք, եթե ենթադրենք, որ շեղանկյանը հնարավոր է արտագծել
 շրջանագիծ, ապա թեորեմից կհետևի, որ շեղանկյան հանդիպակաց
 անկյունների գումարը 180° է: Բայց քանի որ շեղանկյան հանդիպակաց
 անկյունները հավասար են, ապա կստացվի, որ այն քառակուսի է:

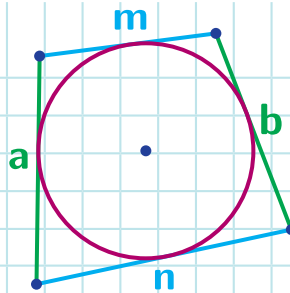
Փաստորեն, մենք տեսանք, որ կա քառանկյուն, որին հնարավոր չէ
 ներգծել շրջանագիծ, և կա քառանկյուն, որին հնարավոր չէ արտագծել
 շրջանագիծ:

Հաջորդ կետում կպարզենք, թե որ դեպքում է հնարավոր քառանկ-
 յանը ներգծել և որ դեպքում՝ արտագծել շրջանագիծ:

□ 14. Քառանկյանը շրջանագիծ ներգծելու և արտագծելու պայմանները

Թեորեմ: Եթե ուռուցիկ քառանկյան հանդիպակաց կողմերի գումարները հավասար են, ապա դրան կարելի է ներգծել շրջանագիծ (նկ. 53):

$$a + b = m + n \Rightarrow$$

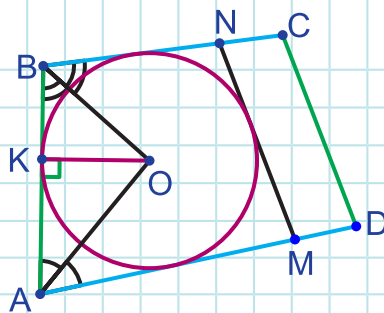


Նկար 53

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ ABCD ուռուցիկ հանդիպակաց կողմերի գումարները հավասար են՝ $AB + CD = BC + AD$:

Ապացուցենք, որ այդ քառանկյանը կարելի է ներգծել քառանկյուն:

Քառանկյան A և B անկյունների կիսորդների հատման կետը նշանակենք O-ով: O կետից AB կողմին տանենք OK ուղղահայացը: Դիտարկենք O կենտրոնով և OK շառավղով շրջանագիծը (նկ. 54):



Նկար 54

Քանի որ O-ն հավասարահեռ է քառանկյան AB, BC, AD կողմերից, ապա այդ շրջանագիծը կշոշափի քառանկյան նշված կողմերը:

Ենթադրենք՝ շրջանագիծը չի շոշափում քառանկյան CD կողմը: Այդ դեպքում կան CD կողմը շրջանագծի հետ ընդհանուր կետ չունի, կամ հատում է շրջանագիծը:

Դիտարկենք առաջին դեպքը: Տանենք CD -ին զուգահեռ շոշափող և դրա հատման կետերը քառանկյան AD և BC կողմերի հետ նշանակենք M -ով և N -ով:

Օգտվելով արտագծյալ քառանկյան հատկությունից՝ կունենանք.
 $AB + NM = BN + AM$:

Այսպիսով՝ ունենք.

$$\begin{aligned} AB + CD &= BC + AD, \\ AB + NM &= BN + AM: \end{aligned}$$

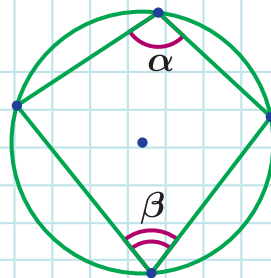
Հետևաբար $AB + CD - AB - NM = BC + AD - BN - AM$: Ձևափոխելով վերջինը՝ կստանանք $CD - NM = (BC - BN) + (AD - AM)$: Քանի որ $BC - BN = NC$, $AD - AM = MD$, ապա $CD = NM + NC + MD$: Ստացվածը նշանակում է, որ $DMNC$ բեկյալի երկարությունը հավասար է դրա ծայրակետերի հեռավորությանը, ինչը հնարավոր է: Ուրեմն ենթադրությունը, որ CD կողմը շրջանագծի հետ ընդհանուր կետ չունի, սխալ է:

Համանման ձևով կարելի է ապացուցել, որ CD կողմը չի կարող հատել շրջանագիծը: Ուրեմն շրջանագիծը շոշափում է քառանկյան բոլոր կողմերը: Թեորեմն ապացուցված է:

Նկատենք, որ ապացուցված թեորեմից հետևում է, որ ցանկացած շեղանկյան կարելի է ներգծել շրջանագիծ:

Թեորեմ: Եթե քառանկյան հանդիպակաց անկյունների գումարը 180° է, ապա դրան կարելի է արտագծել շրջանագիծ (նկ. 55):

$$\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow$$

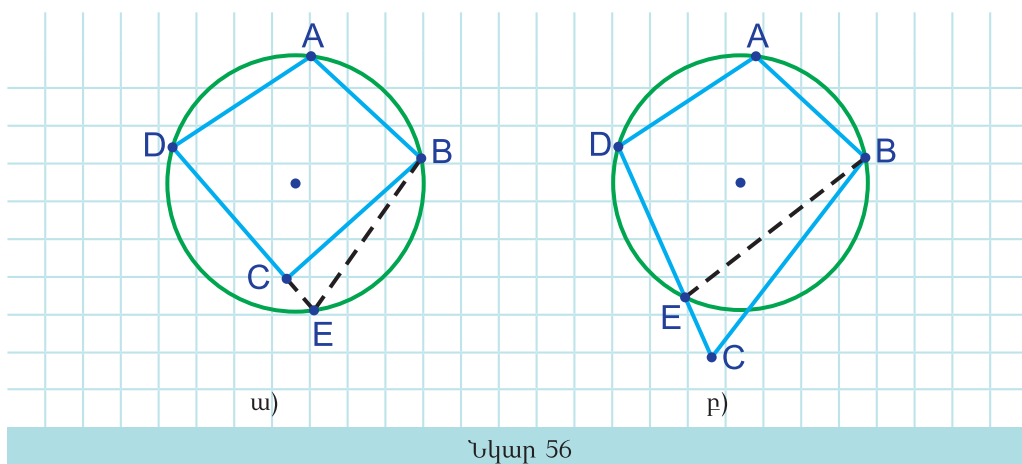


Նկար 55

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ $ABCD$ քառանկյունն այնպիսին է, որ $\angle A + \angle C = 180^\circ$: Ապացուցենք, որ այդ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ:

Դիտարկենք ABD եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը և ապացուցենք, որ այն անցնում է նաև C կետով: Ենթադրենք հակառակը՝ այդ շրջանագիծը չի անցնում C կետով: Այդ դեպքում կամ C կետը շրջանագծի ներսում է, կամ շրջանագծից դուրս է (սկ. 56 ա և բ):

DC ճառագայթի և շրջանագծի հատման կետը նշանակենք E -ով: Երկու դեպքում էլ շրջանագիծը արտագծված կլինի $DABE$ քառանկյանը: Հետևաբար երկու դեպքում էլ $\angle A + \angle E = 180^\circ$:



Նկար 56

Դիտարկելով BEC եռանկյունը և օգտվելով եռանկյան արտաքին անկյան մասին թեորեմից՝ թե՛ առաջին դեպքում, թե՛ երկրորդ դեպքում կունենանք՝ $\angle DCB \neq \angle E$: Ուրեմն թե՛ առաջին և թե՛ երկրորդ դեպքը հակասում է թեորեմի պայմանին՝ $\angle A + \angle C = 180^\circ$: Հետևաբար C կետը չի կարող ընկած լինել ո՛չ շրջանագծի ներսում, ո՛չ էլ շրջանագծից դուրս: Թեորեմն ապացուցված է:

Նկատենք, որ ապացուցված թեորեմից հետևում է, որ ցանկացած ուղղանկյան կարելի է արտագծել շրջանագիծ:



Հարցեր և խնդիրներ

92. O -ն ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է: Գտե՛ք OBC անկյունը, եթե B անկյունը 70° է:
93. O -ն ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է: Գտե՛ք AOB անկյունը, եթե $\angle B = 56^\circ$, $\angle A = 84^\circ$:

94. O -ն ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է: Ինչ հարաբերությամբ մասերի է բաժանում AO ուղիղը BC կողմը, եթե $AB = 5$ սմ, $AC = 15$ սմ:
95. ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի O կենտրոնից AC կողմին տարած է OK ուղղահայացը: Գտնեք AC -ն, եթե $KC = 7$ սմ:
96. ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի O կենտրոնից AC կողմին տարած ուղղահայաց ուղիղը BC կողմը հատում է F կետում: Գտնեք BC -ն, եթե $AF = 9$ դմ, $BF = 4$ դմ:
97. ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի O կենտրոնը միացված է BC կողմի L միջնակետին և AB կողմի M միջնակետին: Գտնեք ABC և MOL անկյունների գումարը:
98. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյունը 60° է, սրունքին տարված բարձրությունը՝ 12 սմ: Գտնեք այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:
99. Ապացուցեք, որ սուրանկյուն եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնը եռանկյան ներսում է:
100. Ապացուցեք, որ բութանկյուն եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնը եռանկյունից դուրս է:
101. Հավասարասրուն սուրանկյուն եռանկյան հիմքին տարած բարձրությունը 17 դմ է, արտագծած շրջանագծի շառավիղը՝ 13 դմ: Գտնեք արտագծած շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունը եռանկյան հիմքից:
102. Հավասարասրուն բութանկյուն եռանկյան հիմքին տարած բարձրությունը 7 սմ է, արտագծած շրջանագծի շառավիղը՝ 16 սմ: Գտնեք արտագծած շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունը եռանկյան հիմքից:
103. ABC եռանկյունում $\angle B = 60^\circ$, $AB + BC = 13$ սմ: Գտնեք AC -ն, եթե այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը $\sqrt{3}$ սմ է:
104. Գտնեք շրջանագծին արտագծած $ABCD$ քառանկյան BC և AD կողմերի գումարը, եթե $AB = 13$ սմ, $CD = 19$ սմ:
105. Գտնեք շրջանագծին արտագծած $ABCD$ քառանկյան պարագիծը, եթե $BC = 11$ դմ, $AD = 15$ դմ:
106. Գտնեք շրջանագծին արտագծած հավասարասրուն սեղանի սրունքը, եթե սեղանի պարագիծը 28 դմ է:
107. Շրջանագծին արտագծած քառանկյան երեք հաջորդական կողմերի երկարությունները համապատասխանաբար համեմատական են 7, 1 և 3 թվերին: Գտնեք այդ քառանկյան մեծ և փոքր կողմերի հարաբերությունը:

- 108.** ABCD քառանկյանը արտագծված է շրջանագիծ: Գտնք A անկյունը, եթե C անկյունը 117° է:
- 109.** Գտնք շրջանագծին ներգծած ABCD քառանկյան B և D անկյունները, եթե դրանք հարաբերում են ինչպես 1:2:
- 110.** Ապացուցեք, որ եթե զուգահեռագծին կարելի է ներգծել շրջանագիծ, ապա այն շեղանկյուն է:
- 111.** Ապացուցեք, որ եթե զուգահեռագծին արտագծված է շրջանագիծ, ապա այն ուղղանկյուն է:
- 112.** Ապացուցեք, որ եթե սեղանին արտագծված է շրջանագիծ, ապա սեղանը հավասարասրուն է:
- 113.** Ապացուցեք, որ արտագծյալ սեղանի բարձրությունը հավասար է դրան ներգծած շրջանագծի տրամագծին:
- 114.** Ապացուցեք, որ շեղանկյան բարձրությունը հավասար է դրան ներգծած շրջանագծի տրամագծին:
- 115.** Հավասարասրուն սեղանին ներգծած շրջանագծի շառավիղը 4 դմ է, սրունքը՝ 16 դմ: Գտնք մեծ հիմքին առնթեր անկյունը:
- 116.** Շրջանագծին արտագծած հավասարասրուն սեղանի մակերեսը 32 դմ^2 է, իսկ բարձրությունը երկու անգամ փոքր է սրունքից: Գտնք շրջանագծի շառավիղը:
- 117.** Գտնք շրջանագծին ներգծված սեղանի մակերեսը, եթե դրա բարձրությունը 9 սմ է, իսկ անկյունագիծը՝ 15 սմ:
- 118.** Շրջանագծին ներգծված $BC = 3$ սմ հիմքով ABCD սեղանի BD անկյունագիծը կիսում է B անկյունը: Գտնք սեղանի մակերեսը, եթե սեղանի պարագիծը 42 սմ է:
- 119.** Շրջանագծին ներգծված սեղանի սրունքը 15 սմ է, միջին գիծը՝ 16 սմ: Գտնք սեղանի մակերեսը, եթե շրջանագծի կենտրոնը դրա մեծ հիմքի վրա է:
- 120.** Կարելի է $AB = 8$ սմ, $BC = 14$ սմ, $CD = 18$ սմ, $AD = 12$ սմ կողմերով ABCD ուռուցիկ քառանկյանը ներգծել շրջանագիծ: Պատասխանը հիմնավորեք:
- 121.** Ուռուցիկ քառանկյան հաջորդական կողմերը հարաբերում են, ինչպես 2:3:4:5: Կարելի է այդ քառանկյանը ներգծել շրջանագիծ: Պատասխանը հիմնավորեք:
- 122.** Ցանկացած ուղղանկյան կարելի է արտագծել շրջանագիծ: Պատասխանը հիմնավորեք:

- 123.** Ապացուցե՛ք, որ ցանկացած հավասարասրուն սեղանի կարելի է արտագծել շրջանագիծ:
- 124.** 12 սմ շառավղով շրջանագծին արտագծած հավասարասրուն սեղանի հիմքերը հարաբերում են, ինչպես 1:9: Գտե՛ք սրունքի երկարությունը:
- 125.** 8 դմ տրամագծով շրջանագծին արտագծած է 17 դմ սրունքով հավասարասրուն սեղան: Գտե՛ք սեղանի հիմքերը:
- 126.** Ապացուցե՛ք, որ ոչ հավասար կից կողմերով զուգահեռագծի անկյունների կիսորդների հատումից առաջացած քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ:
- 127.** Սեղանի անկյունների կիսորդների հատումից առաջացել է ուռուցիկ քառանկյուն: Ապացուցե՛ք, որ այդ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ:
- 128.** a և b հիմքերով սեղանին կարելի է և՛ ներգծել, և՛ արտագծել շրջանագիծ: Գտե՛ք ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը:
- 129.** Շրջանագիծը քառանկյան կողմերից կտրում է հավասար լարեր: Ապացուցե՛ք, որ այդ քառանկյանը կարելի է ներգծել շրջանագիծ:
- 130.** Ապացուցե՛ք, որ եթե $ABCD$ քառանկյունն այնպիսին է, որ $\angle BCA = \angle BDA$, ապա այդ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ:
- 131.** $ABCD$ քառանկյան անկյունագծերը հատվում են K կետում, և $AK \cdot KC = BK \cdot KD$: Ապացուցե՛ք, որ այդ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ:



Խմբային աշխատանք

Դասարանի աշակերտներին բաժանեք մի քանի խմբի և հանձնարարեք քննարկել հետևյալ հարցերը և ներկայացնել այդ հարցերի պատասխանները.

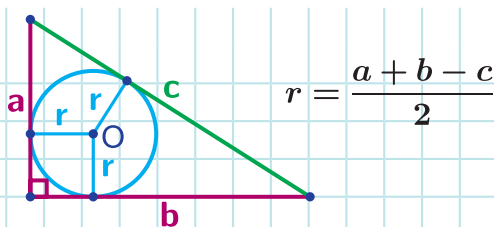
Ձեզ հայտնի քառանկյուններից (բացի քառակուսուց) կա՞ քառանկյուն, որին և՛ կարելի է արտագծել, և՛ ներգծել շրջանագիծ:

Ի՞նչ լրացուցիչ պայմանի դեպքում այդ քառանկյունը կլինի և՛ արտագծելի, և՛ ներգծելի:

§ 6. Ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած և արտագծած շրջանագծերը

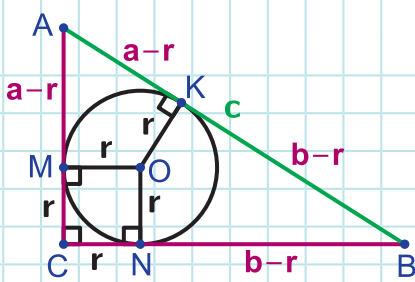
□ 15. Ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած շրջանագիծը

Թեորեմ: a , b էջերով և c ներքնաձիգով ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը՝ $r = \frac{a+b-c}{2}$ (նկ. 57):



Նկար 57

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ a , b էջերով և c ներքնաձիգով ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը r է (նկ. 58): Ապացուցենք, որ $r = \frac{a+b-c}{2}$:



Նկար 58

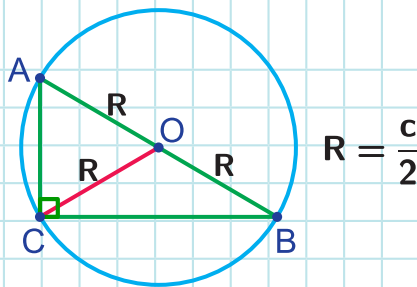
Շրջանագծի O կենտրոնը միացնենք M , N , K շոշափման կետերին: OM , ON , OK շառավիղները համապատասխանաբար ուղղահայաց կլինեն եռանկյան կողմերին: Որպես նույն ուղղի ուղղահայացներ՝ $MC \parallel ON$: Նույն ձևով կունենանք՝ $OM \parallel CN$: Ուրեմն $CMON$ քառանկյունը զուգահեռագիծ է: Բայց դրա բոլոր անկյուններն ուղիղ են, իսկ OM և ON կից կողմերը հավասար են: Հետևաբար $CMON$ քառանկյունը քառակուսի է:

Ուրեմն $MC = CN = r$: Վերջինից հետևում է, որ $AM = a - r$, $BN = b - r$:

Որպես նույն կետից տարված շոշափողի հատվածներ՝ $AK = AM = a - r$, $BK = BN = b - r$: Հաշվի առնելով, որ $AK + KB = c$, կունենանք՝ $a - r + b - r = c$: Վերջինից էլ հետևում է, որ $r = \frac{a + b - c}{2}$: Թեորեմն ապացուցված է:

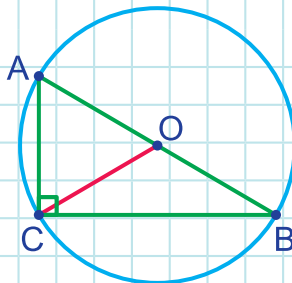
□ 16. Ուղղանկյուն եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը

Թեորեմ: c ներքնաձիգով ուղղանկյուն եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնը ներքնաձիգի միջնակետն է, իսկ շառավիղը՝ $R = \frac{c}{2}$ (նկ. 59):



Նկար 59

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ ACB -ն C ուղիղ անկյունով և $AB = c$ ներքնաձիգով ուղղանկյուն եռանկյուն է (նկ. 60): Տանենք այդ եռանկյան CO միջնագիծը: Ինչպես գիտեք, ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգին տարված միջնագիծը հավասար է ներքնաձիգի կեսին՝ $CO = OA = OB$:



Նկար 60

Հետևաբար O -ն հավասարահեռ է ABC եռանկյան գագաթներից, այսինքն՝ այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Ուրեմն AB -ն այդ շրջանագծի տրամագիծն է, իսկ այդ շրջանագծի շառավիղը՝

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2} : \text{Թեորեմն ապացուցված է:}$$



Հարցեր և խնդիրներ

132. Գտնք 6 սմ և 8 սմ էջերով ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը:
133. Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը 10 դմ է, իսկ ներգծած շրջանագծի շառավիղը՝ 2 դմ: Գտնք եռանկյան էջերի երկարությունների գումարը:
134. Գտնք ուղղանկյուն եռանկյան կողմերը, եթե դրա էջերը հարաբերում են, ինչպես 5:12, իսկ ներգծած շրջանագծի շառավիղը 4 սմ է:
135. Գտնք ուղղանկյուն եռանկյան էջերի գումարը, եթե դրա պարագիծը 12 սմ է, իսկ ներգծած շրջանագծի շառավիղը՝ 1 սմ:
136. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը հարաբերում են, ինչպես 3:4, իսկ ներքնաձիգը 25 սմ է: Գտնք ներգծած շրջանագծի շառավիղը:
137. Ուղղանկյուն եռանկյան պարագիծը 15 սմ է, իսկ ներգծած շրջանագծի շառավիղը՝ 1 սմ: Գտնք եռանկյան ներքնաձիգը:
138. Ուղղանկյուն եռանկյան ներգծած շրջանագծի շառավիղը 4 դմ է, իսկ ներքնաձիգը՝ 26 դմ: Գտնք եռանկյան պարագիծը:
139. Գտնք ուղղանկյուն եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը, եթե ներքնաձիգը 22 սմ է:
140. Գտնք ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը, եթե դրան արտագծած շրջանագծի շառավիղը 13 դմ է:
141. Ուղղանկյուն եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը 5 սմ է, իսկ էջերը հարաբերում են, ինչպես 3:4: Գտնք եռանկյան մակերեսը:
142. Ուղղանկյուն եռանկյանն արտագծած և ներգծած շրջանագծերի շառավիղները 5 սմ և 2 սմ են: Գտնք եռանկյան պարագիծը:
143. Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը ներգծած շրջանագծի շոշափման կետով տրոհվում է 5 սմ և 12 սմ երկարությամբ հատվածների: Գտնք եռանկյան պարագիծը:

- 144.** Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը ներգծած շրջանագծի շոշափման կետով տրոհում է 3 դմ և 5 դմ երկարությամբ հատվածների: Գտեք եռանկյան մակերեսը:
- 145.** Ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած շրջանագիծը շոշափման կետով էջերից մեկը տրոհում է 2 սմ և 4 սմ երկարությամբ հատվածների: Գտեք եռանկյան մակերեսը:
- 146.** ABC ուղղանկյուն եռանկյան C ուղիղ անկյան գագաթից տարված CD բարձրության շարունակությունն այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի AB աղեղը բաժանում է երկու մասի, որոնց աստիճանային չափերի տարբերությունը 40° է: Գտեք եռանկյան սուր անկյունները:
- 147.** Գտեք ուղղանկյուն եռանկյան արտագծած շրջանագծի շառավիղը, եթե դրա էջերից մեկը 6 դմ է, իսկ ներգծած շրջանագծի շառավիղը՝ 2 դմ:
- 148.** Ապացուցեք, որ c ներքնաձիգով և ներգծած շրջանագծի r շառավիղով ուղղանկյուն եռանկյան մակերեսը՝ $S = r^2 + c \cdot r$:
- 149.** Գտեք 12 սմ և 16 սմ էջերով ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած և արտագծած շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը:
- 150.** ABC ուղղանկյուն եռանկյան C ուղիղ անկյան գագաթով տարված է այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծին շոշափող: A և B գագաթների՝ մինչև շոշափող հեռավորությունները m և n են: Գտեք ABC եռանկյան էջերը:



Էլեկտրոնային թեմատիկ թեստ



Դինամիկ մաթեմատիկա

Տրված է անկյուն և դրան ներգծված շրջանագիծ: Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրերով կառուցեք անկյանը ներգծված շրջանագիծ, որը տրված շրջանագծի հետ ունի արտաքին շոշափում:



Լրացուցիչ խնդիրներ

151. Շրջանագծի միևնույն կետից տարված են երկու փոխուղղահայաց լարեր, որոնց հեռավորությունները կենտրոնից 6 սմ և 8 սմ են: Գտե՛ք այդ լարերի երկարությունները և շրջանագծի շառավիղը:
152. R շառավղով շրջանագծի B կետից տարված են BA տրամագիծը և BM շոշափողը: Գտե՛ք շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունը AM ուղղից, եթե $BM = R$:
153. O կենտրոնով շրջանագիծը A և B կետերում շոշափող ուղիղները հատվում են C կետում: Հայտնի է, որ $\angle ACB = 120^\circ$: Ապացուցե՛ք, որ $AC + BC = OC$:
154. R շառավղով շրջանագիծը շոշափում է ուղիղ անկյան կողմերը A և B կետերում: Գտե՛ք շրջանագծի AB փոքր աղեղի ինչ-որ կետով տարված շոշափողով ուղիղ անկյունից անջատված եռանկյան պարագիծը:
155. R շառավղով շրջանագծի AOB կենտրոնային անկյունը 60° է: Այդ անկյանը ներգծած է շրջանագիծ, որը շոշափում է OA, OB հատվածները և AB աղեղը: Գտե՛ք այդ շրջանագծի շառավիղը:
156. 60° անկյանը ներգծված են իրար շոշափող երկու շրջանագծեր: Գտե՛ք դրանց շառավիղների հարաբերությունը:
157. 3 սմ և 4 սմ շառավիղներով շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը 8 սմ է: Փոքր շրջանագծի կենտրոնից մեծին տարած շոշափողները հատում են փոքր շրջանագիծը A և B կետերում: Գտե՛ք AB-ն:
158. a կողմով հավասարակողմ եռանկյանը ներգծած շրջանագծին տարված շոշափողը հատում է եռանկյան երկու կողմերը: Գտե՛ք առաջացած եռանկյան պարագիծը:
159. A կետով և ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագծի O կենտրոնով անցնող ուղիղը եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը հատում է M կետում: Ապացուցե՛ք, որ BOM և COM եռանկյունները հավասարասրուն են:
160. 6 սմ, 10 սմ և 12 սմ կողմերով եռանկյանը ներգծած շրջանագծին տարված շոշափողը հատում է եռանկյան երկու մեծ կողմերը: Գտե՛ք անջատված եռանկյան պարագիծը:

- 161.** Երկու շրջանագծեր հատվում են A և B կետերում: B կետով տարված և շրջանագծերը M և N կետերում հատող ուղիղն այնպիսին է, որ AB -ն MAN եռանկյան կիսորդն է: Ապացուցե՛ք, որ BM և BN հատվածների հարաբերությունը հավասար է շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությանը:
- 162.** Ապացուցե՛ք, որ նման եռանկյուններին ներգծած շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությունը հավասար է նմանության գործակցին:
- 163.** Ապացուցե՛ք, որ a, b, c կողմերով և c կողմին տարված h_c բարձրությամբ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը՝ $R = \frac{ab}{2h_c}$:
- 164.** Գտե՛ք $AC = 10$ սմ հիմքով և $BC = 13$ սմ սրունքով ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:
- 165.** A կետով տարված ուղիղները B և C կետերում շոշափում են O կենտրոնով շրջանագիծը: BC աղեղի ինչ-որ K կետով տարված շոշափողը AB և AC հատվածները հատում է M և N կետերում: Ապացուցե՛ք, որ AMN եռանկյան պարագիծը և MON անկյան մեծությունը կախված չեն BC աղեղի վրա K կետի դիրքից:
- 166.** $ABCD$ սեղանին ներգծված O կենտրոնով շրջանագիծը CD կողմնային կողմը շոշափում է K կետում: Ապացուցե՛ք, որ $r = \sqrt{CK \cdot KD}$, որտեղ r -ը ներգծած շրջանագծի շառավիղն է:
- 167.** Հավասարասրուն սեղանին ներգծված է 4 սմ շառավիղով շրջանագիծ: Սեղանի բարձրությունը երկու անգամ մեծ է սեղանի փոքր հիմքից: Գտե՛ք սեղանի մակերեսը:
- 168.** h բարձրությամբ սեղանը ներգծված է շրջանագծին: Գտե՛ք սեղանի միջին գիծը, եթե շրջանագծի կենտրոնը սեղանի կողմնային կողմի ծայրակետերին միացնելուց առաջացած կենտրոնային անկյունը 120° է:
- 169.** Երկու շրջանագծեր հատվում են A և B կետերում: Առաջին շրջանագծի AC և BD լարերի շարունակությունները հատում են երկրորդ շրջանագիծը E և F կետերում: Ապացուցե՛ք, որ CD և EF ուղիղները զուգահեռ են:
- 170.** CH -ը ABC ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունն է: Ապացուցե՛ք, որ ACH , BCH և ABC եռանկյուններին ներգծած շրջանագծերի շառավիղների գումարը հավասար է CH -ի:

171. CH-ը ABC ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունն է: Ապացուցեք, որ $r_1^2 + r_2^2 = r^2$, որտեղ r_1 -ը, r_2 -ը և r -ը համապատասխանաբար ACH, BCH և ABC եռանկյունների ներգծած շրջանագծերի շառավիղներն են:
172. Ապացուցեք, որ $\angle BAH = \angle OAC$, որտեղ O-ն ABC սուրանկյուն եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է, իսկ AH-ը՝ եռանկյան բարձրությունը:
173. AA₁-ը և BB₁-ը ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրություններն են: Ապացուցեք, որ $\Delta A_1CB_1 \sim \Delta ABC$:
174. Ապացուցեք, որ սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունների հատման կետի՝ եռանկյան կողմի նկատմամբ համաչափ կետը եռանկյանն արտագծած շրջանագծի վրա է:
175. Ապացուցեք, որ սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունների հատման կետի՝ եռանկյան կողմի միջնակետի նկատմամբ համաչափ կետը եռանկյանն արտագծած շրջանագծի վրա է:
176. Կառուցեք տրված շրջանագծի շոշափող, որը զուգահեռ է տրված ուղղին:
177. Կառուցեք եռանկյուն, եթե տրված է այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը և այն հատվածները, որոնց բաժանվում է եռանկյան կողմերից մեկը այդ կողմի շոշափման կետով:
178. Տրված է շրջանագիծ, դրա տրամագիծը պարունակող ուղիղ և դրանց չպատկանող M կետ: Միայն քանոնով կառուցեք M կետով անցնող և տրված ուղղին ուղղահայաց ուղիղ:

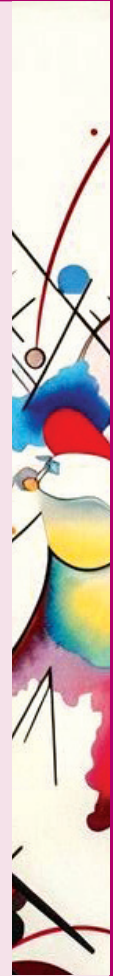


Ինտերակտիվ մոդել

Անկյանը ներգծված և իրար շոշափող շրջանագծեր

Ուսումնասիրելով այս գլուխը՝

- Սովորեցիք շրջանագծի շոշափող, հատող, աղեղի աստիճանային չափ, կենտրոնային և ներգծյալ անկյուններ հասկացությունների սահմանումները:
- Իմացաք շրջանագծի շոշափողի հատկությունները, ներգծյալ անկյան մասին թեորեմը և դրա հետևանքները, կիրառեցիք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Իմացաք շրջանագծի հատվող լարերի, շոշափողի ու հատողի հատվածների հատկությունները, կիրառեցիք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Սովորեցիք եռանկյան կիսորդների, կողմերի միջնուղղահայացների, բարձրությունների կամ նրանց շարունակությունների մասին թեորեմները և կիրառեցիք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Սովորեցիք բազմանկյանը ներգծյալ և արտագծյալ շրջանագծեր հասկացությունները:
- Իմացաք, որ ցանկացած եռանկյան կարելի է և՛ ներգծել, և՛ արտագծել շրջանագիծ: Կարողանում եք կառուցել այդ շրջանագծերի կենտրոններն ու շրջանագծերը:
- Իմացաք ներգծյալ և արտագծյալ քառանկյունների հատկությունները, քառանկյանը շրջանագիծ ներգծելու և արտագծելու պայմանները, կիրառեցիք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Սովորեցիք դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրերով կառուցել շրջանագծի շոշափող, եռանկյանն արտագծած և ներգծած շրջանագծեր:



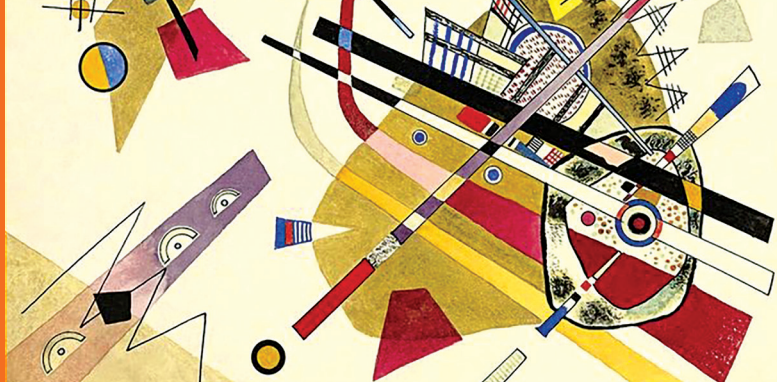
Նախագծային աշխատանք 1

GEOGEBRA-Ի ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՀԱՎԱՍԱՐԱՄՈՒՆ ԵՌԱՆԿՑԱՆ ՄԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՆԵԼՈՒ ՀԱՄԱՐ

Առաջարկվում են աշխատանքի հետևյալ փուլերը.

- GeoGebra-ի գործիքների ուսումնասիրում,
- GeoGebra-ի միջավայրում հետազոտությունների անցկացում,
- հիպոթեզի ձևակերպում,
- ապացուցում (պարտադիր պայման չէ),
- արդյունքների ներկայացում:

Կատարման ժամկետը՝ 2-3 շաբաթ:



ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱԶԱՓԱԿԱՆ ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ: ԵՐԿՐԱԶԱՓԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿՆԵՐ

Ուսումնասիրելով այս գլուխը՝



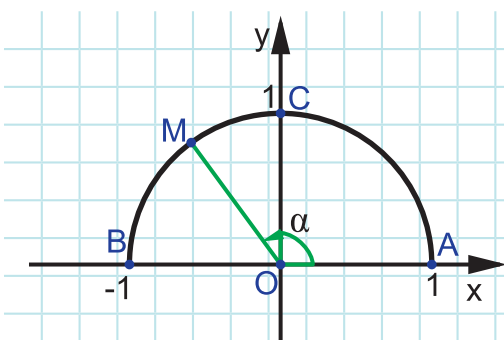
- Կտվորեք 0° -ից 180° անկյան սինուսի, կոսինուսի, տանգենսի, կոտանգենսի սահմանումները:
- Կիմանաք և կկիրառեք բերման բանաձևերը $90^\circ \pm \alpha$, $180^\circ - \alpha$ տեսքի անկյունների համար:
- Կտվորեք սինուսների և կոսինուսների թեորեմները, կկիրառեք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Կտվորեք եռանկյան, զուգահեռագծի, քառանկյան մակերեսների բանաձևերը (անկյան միջոցով) և կկիրառեք խնդիրներ լուծելիս:
- Կտվորեք եռանկյան մակերեսի բանաձևը՝ արտահայտված դրան ներգծած շրջանագծի շառավղով, ինչպես նաև Հերոնի բանաձևը, կկիրառեք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Կտվորեք արտագծյալ բազմանկյան մակերեսի բանաձևը՝ արտահայտված դրան ներգծած շրջանագծի շառավղով, կկիրառեք այն խնդիրներ լուծելիս:
- Կիմանաք, թե ինչպես են սահմանվում վեկտորների կազմած անկյունը և վեկտորների սկալյար արտադրյալը, կկիրառեք դրանք խնդիրներ լուծելիս:

§7. Անկյան սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը

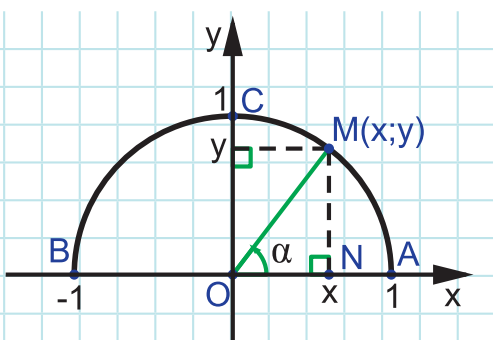
□ 17. 0° -ից 180° անկյան սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը, կոտանգենսը

Սուր անկյան սինուս, կոսինուս, տանգենս և կոտանգենս հասկացությունները Ձեզ հայտնի են 8-րդ դասարանից: Այս և մյուս գլխում ներկայացվելիք նյութի շարադրանքի համար անհրաժեշտ է ընդլայնել այդ հասկացությունները $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ անկյունների համար:

Դիտարկենք դեկարտյան կոորդինատային հարթության կոորդինատների O սկզբնակետում կենտրոն ունեցող և միավոր շառավղով կիսաշրջանագիծ, որն ընկած է վերևի կիսահարթությունում (նկ. 61): Այդպիսի կիսաշրջանագիծը կոչվում է **միավոր կիսաշրջանագիծ**:



Նկար 61



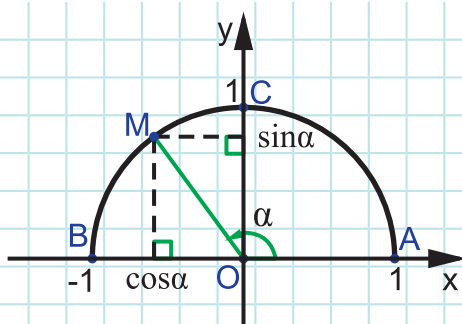
Նկար 62

Կհամարենք, որ α անկյանը ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) համապատասխանում է միավոր կիսաշրջանագծի M կետը, եթե $\angle MOA = \alpha$ (նկ. 61): Այդ նկարում, օրինակ, 0° -ին համապատասխանում է A կետը, 90° -ին՝ C կետը, իսկ 180° -ին՝ B կետը:

Եթե անկյունը սուր է, ապա դրան համապատասխանում է AC աղեղի ինչ-որ $M(x,y)$ կետ (նկ. 62): Այդ դեպքում MNO ուղղանկյուն եռանկյունուց կունենանք. $\sin \alpha = \frac{MN}{OM} = \frac{y}{1} = y$, $\cos \alpha = \frac{ON}{OM} = \frac{x}{1} = x$: Այսպիսով՝ սուր անկյան սինուսն ու կոսինուսը համապատասխանաբար հավասար են այդ անկյանը համապատասխանող M կետի օրդինատին ու աբսցիսին՝ $\sin \alpha = y$, $\cos \alpha = x$:

Նույն կերպ սահմանենք կամայական α անկյան ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) սինուսն ու կոսինուսը.

Սահմանում: $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ միջակայքի ցանկացած α անկյան սինուս կոչվում է այդ անկյանը համապատասխանող M կետի y օրդինատը, իսկ կոսինուս՝ M կետի x աբսցիսը (նկ. 63):



Նկար 63

Քանի որ միավոր կիսաշրջանագծի ցանկացած M կետի կոորդինատները բավարարում են $0 \leq y \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$ անհավասարություններին, ապա, ըստ վերևի սահմանման, $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ միջակայքի ցանկացած α անկյան համար՝ $0 \leq \sin \alpha \leq 1$, $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$:

Սահմանումից հետևում է, որ.

$\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$ (M կետը համընկնում է A կետի հետ),

$\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$ (M կետը համընկնում է C կետի հետ),

$\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$ (M կետը համընկնում է B կետի հետ):

Սահմանում: $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, $\alpha \neq 90^\circ$ միջակայքի ցանկացած

α անկյան տանգենս կոչվում է $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ հարաբերությունը՝

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} :$$

90° -ի անկյան տանգենսը որոշված չէ:

Սահմանում: $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ միջակայքի ցանկացած α անկ-

յան կոտանգենս կոչվում է $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ հարաբերությունը՝

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} :$$

0° -ի և 180° -ի անկյունների կոտանգենսները որոշված չեն:



Ինտերակտիվ մոդել

0° -ից 180° անկյան սինուսն ու կոսինուսը



Տեսանյութ

Ինչպես հեշտ հիշել սինուսի և կոսինուսի արժեքները

□ 18. Հիմնական եռանկյունաչափական նույնությունը: Բերման բանաձևեր: Կետի կոորդինատների հաշվման բանաձևերը

Սուր անկյունների համար 8-րդ դասարանից Ձեզ հայտնի է **հիմնական եռանկյունաչափական նույնությունը**՝ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$:

Ապացուցենք, որ այն ճիշտ է $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ միջակայքի ցանկացած α անկյան համար:

Ինչպես տեսանք նախորդ կետում, այդ միջակայքի ցանկացած α անկյանը համապատասխանող M կետի կոորդինատներն են $(\cos \alpha; \sin \alpha)$ (նկ. 63): Բացի դրանից՝ $OM = 1$: Օգտվելով կետերի հեռավորության՝ $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ բանաձևից՝ կունենանք.

$$1^2 = (\cos \alpha - 0)^2 + (\sin \alpha - 0)^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \quad \text{կամ} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1:$$

Սուր անկյունների դեպքում հիմնական նույնությունից հետևում է, որ $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$, $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$: Բայց բութ կամ փոքր անկյան դեպքում $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$, քանի որ բութ կամ փոքր α անկյան դեպքում $\cos \alpha < 0$:

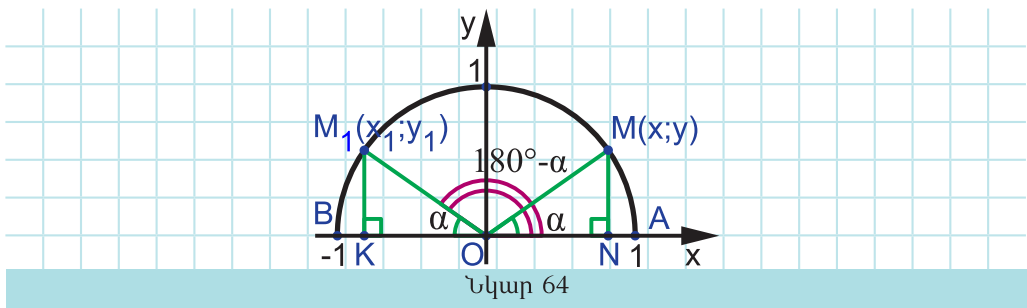
Ապացուցենք նույնություններ, որոնք կոչվում են **բերման բանաձևեր**:

$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ միջակայքի ցանկացած α անկյան համար տեղի ունեն հետևյալ նույնությունները.

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha:$$

Նախ նկատենք, որ եթե $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$ կամ $\alpha = 180^\circ$, ապա ակնհայտ է, որ դրանք ճիշտ են:

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ (նկ. 64):



Նկար 64

Այդ դեպքում ONM և OKM_1 ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են ըստ սուր անկյան և ներքնաձիգի ($\angle MON = \angle M_1OK = \alpha$, $OM = OM_1 = 1$): Այդ եռանկյունների հավասարությունից հետևում է, որ $y_1 = y$, $x_1 = -x$: Բայց, ըստ սինուսի և կոսինուսի սահմանման, $y_1 = \sin(180^\circ - \alpha)$, $y = \sin \alpha$, $x_1 = \cos(180^\circ - \alpha)$, $x = \cos \alpha$: Հետևաբար $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$:

Մնում է նկատել, որ եթե $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, ապա M և M_1 կետերը տեղերով փոխվում են:

Օգտվելով ապացուցված նույնություններից՝ գտնենք $\sin 150^\circ$ -ը և $\cos 150^\circ$ -ը: Ունենք՝ $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:

Ճիշտ են նաև հետևյալ նույնությունները.

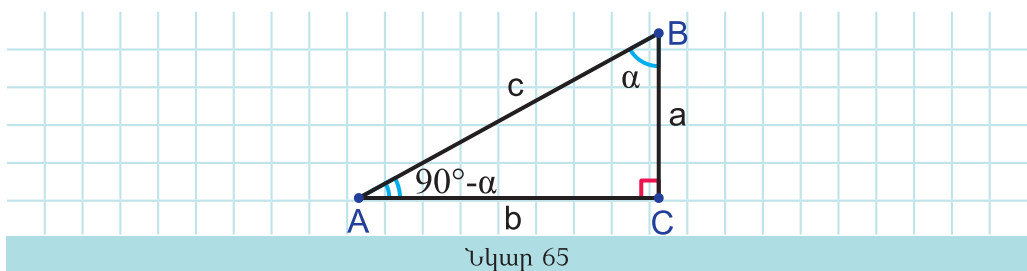
$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \text{որտեղ } 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ:$$

Եթե $\alpha = 0^\circ$ կամ $\alpha = 90^\circ$, ապա ակնհայտ է, որ դրանք ճիշտ են:

Իսկ եթե $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, ապա դրանք հետևում են ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյան սինուսի և կոսինուսի սահմանումներից:

Իրոք, ըստ նկար 65-ի նշանակումների, կունենանք.

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c} = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c} = \sin \alpha:$$



Նկար 65

Կարելի է ապացուցել, որ $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ միջակայքի ցանկացած α անկյան համար տեղի ունեն հետևյալ նույնությունները (փորձեք ապացուցել ինքնուրույն)։

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha :$$

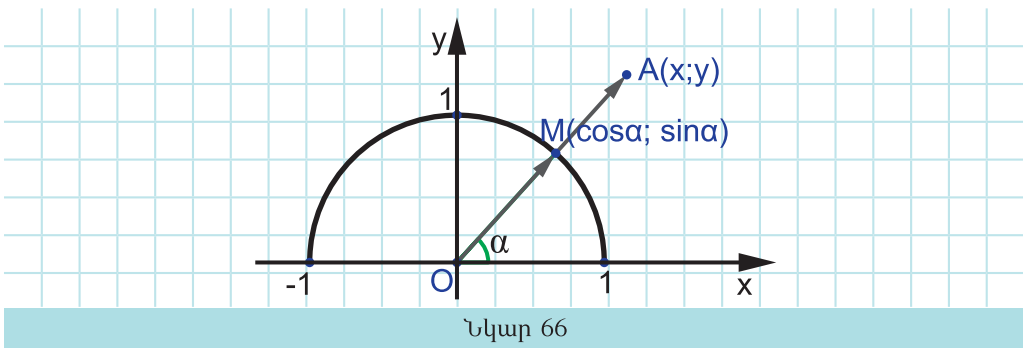
Այսպիսով՝ տեղի ունեն հետևյալ նույնությունները.

$$\left. \begin{aligned} \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha, & \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \sin(90^\circ + \alpha) &= \cos \alpha, & \cos(90^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha \end{aligned} \right\} 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha, \quad 0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ :$$

Անցնենք **կետի կոորդինատները հաշվելու բանաձևերի ստացմանը**։

Ենթադրենք՝ Oxy կոորդինատային համակարգում տրված է ոչ բացասական օրդինատով $A(x; y)$ կետը։ OA ձառագայթի և միավոր կիսաշրջանագծի հատման կետը նշանակենք M -ով, իսկ OA ձառագայթի և Ox դրական կիսաառանցքի կազմած անկյունը՝ α -ով (նկ. 66)։



$\overline{OM}$ վեկտորի կոորդինատները համընկնում են M կետի կոորդինատների հետ, իսկ $\overline{OA}$ վեկտորի կոորդինատները՝ A կետի կոորդինատների հետ, այսինքն՝ ունենք. $\overline{OM}(\cos \alpha; \sin \alpha)$, $\overline{OA}(x; y)$ ։ Քանի որ այդ վեկտորները համուղղված են, իսկ $\overline{OM}$ վեկտորը ոչ զրոյական վեկտոր է, ապա

$$\overline{OA} = \frac{OA}{OM} \cdot \overline{OM} = OA \cdot \overline{OM} : \text{ Հետևաբար}$$

$$x = OA \cdot \cos \alpha, \quad y = OA \cdot \sin \alpha :$$



Հարցեր և խնդիրներ

179. Կարո՞ղ է $0^\circ \leq \alpha \leq 108^\circ$ անկյան սինուսը լինել.

ա) դրական, բ) բացասական, գ) զրո:

- 180.** Կարո՞ղ է $0^\circ \leq \alpha \leq 108^\circ$ անկյան կոսինուսը լինել.
 ա) դրական, բ) բացասական, գ) զրո:
- 181.** Հետևյալներից ո՞րը կարող է լինել α -ի արժեքը, եթե $\cos \alpha < 0$.
 ա) $\alpha = 108^\circ$, բ) $\alpha = 88^\circ$, գ) $\alpha = 42^\circ$, դ) $\alpha = 126^\circ$:
- 182.** Որոշե՛ք արտահայտության նշանը.
 ա) $\sin 98^\circ \cdot \cos 110^\circ \cdot \cos 170^\circ$, գ) $\sin 20^\circ \cdot \cos 70^\circ \cdot \sin 155^\circ$,
 բ) $\cos 8^\circ \cdot \cos 130^\circ \cdot \sin 160^\circ$, դ) $\cos 15^\circ \cdot \cos 127^\circ \cdot \sin 163^\circ$:
- 183.** $[0^\circ; 180^\circ]$ միջակայքի անկյունների կոսինուսների հավասարությունից հետևում է, որ այդ անկյունները հավասար են:
- 184.** $[0^\circ; 180^\circ]$ միջակայքի անկյունների սինուսների հավասարությունից հետևում է, որ այդ անկյունները հավասար են:
- 185.** Դասավորե՛ք աճման կարգով՝ $\cos 9^\circ$, $\cos 100^\circ$, $\cos 50^\circ$, $\cos 140^\circ$:
- 186.** Դասավորե՛ք աճման կարգով՝ $\sin 9^\circ$, $\sin 100^\circ$, $\sin 40^\circ$, $\sin 160^\circ$:
- 187.** Գտե՛ք $\sin \alpha$ -ն, եթե.
 ա) $\cos \alpha = 0$, բ) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, գ) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, դ) $\cos \alpha = -1$:
- 188.** Գտե՛ք $\cos \alpha$ -ն, եթե.
 ա) $\sin \alpha = 1$, գ) $\sin \alpha = 0$, $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$
 բ) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, դ) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$:
- 189.** Գտե՛ք $\sin \alpha$ -ն ու $\operatorname{ctg} \alpha$ -ն, եթե ա) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, բ) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$:
- 190.** Գտե՛ք $\cos \alpha$ -ն ու $\operatorname{tg} \alpha$ -ն, եթե
 ա) $\sin \alpha = 0,6$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, բ) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$:
- 191.** Պարզեցրե՛ք արտահայտությունը.
 ա) $\sin(90^\circ - \alpha)$, գ) $\sin(90^\circ + \alpha)$, ե) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$,
 բ) $\cos(90^\circ - \alpha)$, դ) $\cos(90^\circ + \alpha)$, զ) $\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha)$:
- 192.** Պարզեցրե՛ք արտահայտությունը.
 ա) $\sin(180^\circ - \alpha)$, բ) $\cos(180^\circ - \alpha)$, գ) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$:
- 193.** Գտե՛ք արտահայտության արժեքը.
 ա) $\frac{\sin 108^\circ}{\sin 72^\circ}$, բ) $\frac{\cos 17^\circ}{\cos 163^\circ}$, գ) $\frac{\operatorname{tg} 42^\circ}{\operatorname{tg} 138^\circ}$:
- 194.** Օգտվելով բերման բանաձևերից՝ գտե՛ք $\sin 120^\circ$ -ը, $\cos 120^\circ$ -ը, $\operatorname{tg} 120^\circ$ -ը, $\operatorname{ctg} 120^\circ$ -ը:

195. Օգտվելով բերման բանաձևերից՝ գտե՛ք $\sin 135^\circ$ -ը, $\cos 135^\circ$ -ը, $\operatorname{tg} 135^\circ$ -ը, $\operatorname{ctg} 135^\circ$ -ը:
196. Օգտվելով բերման բանաձևերից՝ գտե՛ք $\sin 150^\circ$ -ը, $\cos 150^\circ$ -ը, $\operatorname{tg} 150^\circ$ -ը, $\operatorname{ctg} 150^\circ$ -ը:
197. Միավոր կիսաշրջանագիծը հատող OA ճառագայթը Ox դրական կիսաառանցքի հետ կազմում է α անկյուն: Գտե՛ք A կետի կոորդինատները, եթե.
- ա) $OA = 5$, $\alpha = 60^\circ$, գ) $OA = 10$, $\alpha = 180^\circ$, ե) $OA = 12$, $\alpha = 0^\circ$,
 բ) $OA = 8$, $\alpha = 120^\circ$, դ) $OA = 10$, $\alpha = 135^\circ$, զ) $OA = 12$, $\alpha = 150^\circ$:



Դինամիկ մաթեմատիկա

Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրերով կառուցեք ABC եռանկյուն: Չափեք A և B անկյունները: Գտեք չափված անկյունների սինուսները:

Գտեք $\frac{BC}{\sin A}$ -ն և $\frac{AC}{\sin B}$ -ն: Ստեղծեք գրություններ, որոնք ցույց են տալիս

$\frac{BC}{\sin A}$ -ն և $\frac{AC}{\sin B}$ -ն: Շարժեք եռանկյան գագաթները և հետևեք գրու-

թյուններին: Արեք եզրակացություն:

§8. Առնչություններ եռանկյան կողմերի և անկյունների միջև

□ 19. Միևուսների թեորեմը

Ինչպես գիտեք, եռանկյան ավելի մեծ կողմի դիմացի անկյունը ավելի մեծ է, և հակառակը՝ ավելի մեծ անկյան դիմացի կողմը ավելի մեծ է: Բայց սա որակական առնչություն է: Ի տարբերություն այս թեորեմի, սինուսների թեորեմը քանակական կապ է հաստատում եռանկյան կողմերի և անկյունների միջև:

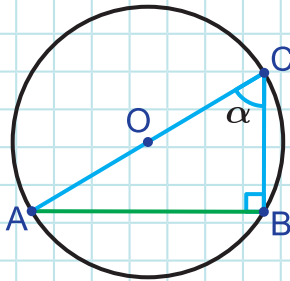
Այդ թեորեմը ձևակերպելուց առաջ ձևակերպենք և ապացուցենք մի օժանդակ թեորեմ (լեմմա):

Լեմմա: Շրջանագծի լարը հավասար է տրամագծի և այդ լարի վրա հենված ցանկացած ներգծյալ անկյան սինուսի արտադրյալին:

Ապացուցում: Դիտարկենք O կենտրոնով շրջանագծի AB լարը: Եթե AB լարը տրամագիծ է, ապա ակնհայտ է, որ պնդումը ճիշտ է:

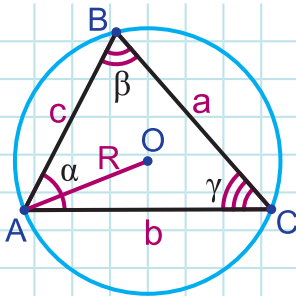
Դիտարկենք այն դեպքը, երբ AB լարը տրամագիծ չէ (նկ. 67): Տանենք AC տրամագիծը: Որպես տրամագծի վրա հենված ներգծյալ անկյուն՝ $\angle ABC = 90^\circ$: ABC ուղղանկյուն եռանկյունից, ըստ սուր անկյան սինուսի սահմանման, $\sin \alpha = \frac{AB}{AC}$: Ձևափոխելով ստացվածը՝ կունենանք.

$AB = AC \cdot \sin \alpha = 2R \cdot \sin \alpha$: Մնում է նկատենք, որ AB լարի վրա հենված ցանկացած ներգծյալ անկյուն կամ հավասար է α , կամ $180^\circ - \alpha$: Բայց $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$: Լեմման ապացուցված է:



Նկար 67

Թեորեմ: (Սինուսների թեորեմ) Եռանկյան կողմի հարաբերությունը դրա դիմացի անկյան սինուսին տվյալ եռանկյան համար հաստատուն մեծություն է և հավասար է եռանկյանն արտագծած շրջանագծի տրամագծին (նկ. 68):



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Նկար 68

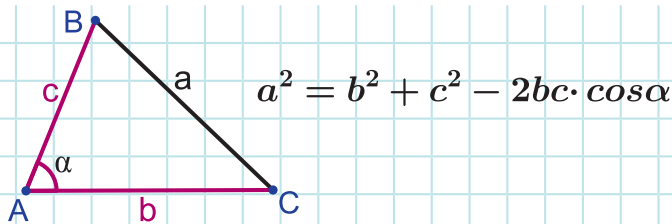
Ապացուցում: Ենթադրենք՝ $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ կողմերով ABC եռանկյան արտագծված շրջանագծի շառավիղը R է (նկ. 68): Այդ դեպքում, ըստ լեմմի, $a = 2R \cdot \sin \alpha$, $b = 2R \cdot \sin \beta$, $c = 2R \cdot \sin \gamma$: Հետևաբար

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R : \text{Թեորեմն ապացուցված է:}$$

□ 20. Կոսինուսների թեորեմը

Ինչպես գիտեք, եթե հայտնի են ուղղանկյուն եռանկյան երկու կողմը, ապա, Պյութագորասի թեորեմի օգնությամբ, կարելի է գտնել երրորդ կողմը: Իսկ կամայական եռանկյան դեպքում, բացի երկու կողմից, էլ ինչ պետք է իմանալ, որ հնարավոր լինի գտնել երրորդ կողմը: Այդ հարցի պատասխանը տալիս է կոսինուսների թեորեմը:

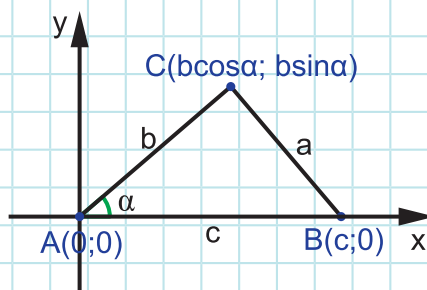
Թեորեմ: (Կոսինուսների թեորեմ) Եռանկյան կողմի քառակուսին հավասար է մյուս երկու կողմերի քառակուսիների գումարից հանած այդ կողմերի և դրանց կազմած անկյան կոսինուսի կրկնակի արտադրյալը (նկ. 69):



Նկար 69

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ ABC եռանկյունում $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$: Ապացուցենք, օրինակ, որ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$:

Ներմուծենք կոորդինատային համակարգ, ինչպես ցույց է տրված նկար 70-ում:



Նկար 70

Եռանկյան գագաթների կոորդինատների համար կունենաք. $A(0;0)$, $B(c;0)$, $C(b \cos \alpha; b \sin \alpha)$: Հետևաբար, ըստ երկու կետերի հեռավորության բանաձևի, $BC^2 = a^2 = (b \cos \alpha - c)^2 + (b \sin \alpha - 0)^2 = b^2 \cos^2 \alpha - 2bc \cdot \cos \alpha + c^2 + b^2 \sin^2 \alpha = b^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$: Թեորեմն ապացուցված է:

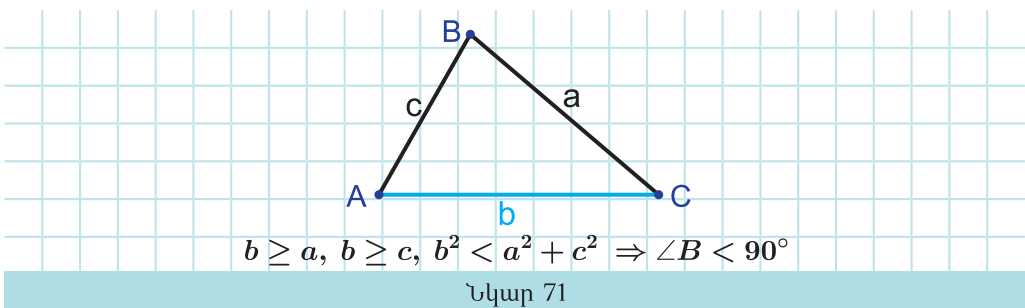
Կոսինուսների թեորեմից հետևում է, որ ուղղանկյուն եռանկյան դեպքում (երբ $\alpha = 90^\circ$) a ներքնաձիգի քառակուսին հավասար է էջերի քառակուսիների գումարին: Այդ պատճառով կոսինուսների թեորեմին ասում են նաև Պյութագորասի ընդհանրացված թեորեմ:

□ 21. Կոսինուսների թեորեմի որոշ հետևանքներ

Պյութագորասի թեորեմի հակադարձ թեորեմը հնարավորություն է տալիս բացահայտելու եռանկյան ուղղանկյուն եռանկյուն լինելը՝ համեմատելով եռանկյան ամենամեծ կողմի քառակուսին մյուս երկու կողմերի քառակուսիների գումարի հետ:

Ներկայացնենք կոսինուսների թեորեմի երկու հետևանք, որոնց օգնությամբ, համեմատելով եռանկյան ամենամեծ կողմի քառակուսին մյուս երկու կողմերի քառակուսիների գումարի հետ, հնարավոր է պարզել եռանկյան սուրանկյուն կամ բութանկյուն լինելը:

Հետևանք 1: Եթե եռանկյան ամենամեծ կողմի քառակուսին փոքր է մյուս կողմերի քառակուսիների գումարից, ապա այն սուրանկյուն եռանկյուն է (նկ. 71):



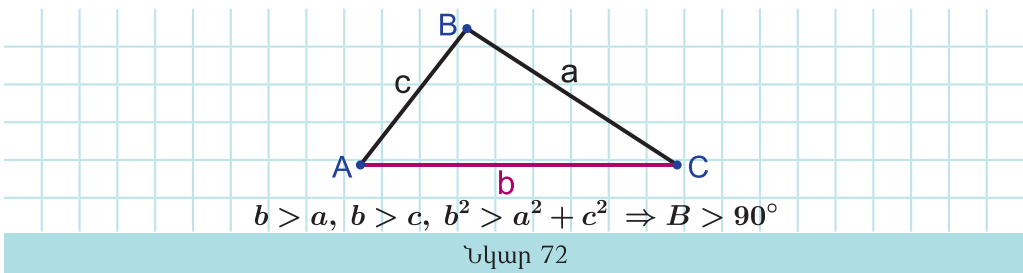
Ապացուցում: Ենթադրենք՝ $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ կողմերով ABC եռանկյան ամենամեծ կողմը AC կողմն է, և $b^2 < a^2 + c^2$: Ապացուցենք, որ այդ եռանկյունը սուրանկյուն եռանկյուն է:

Ըստ կոսինուսների թեորեմի՝ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$: Որտեղից՝

$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$: Հաշվի առնելով $b^2 < a^2 + c^2$ պայմանը՝ կունենանք,

որ $\cos B > 0$: Վերջինից կհետևի, որ եռանկյան B անկյունը սուր է: Բայց քանի որ եռանկյան ամենամեծ կողմի դիմացի անկյունը եռանկյան ամենամեծ անկյունն է, ապա կստացվի, որ եռանկյան բոլոր անկյուններն են սուր, այսինքն՝ եռանկյունը սուրանկյուն եռանկյուն է: Հետևանքն ապացուցված է:

Հետևանք 2: Եթե եռանկյան ամենամեծ կողմի քառակուսին մեծ է մյուս կողմերի քառակուսիների գումարից, ապա այն բութանկյուն եռանկյուն է (նկ. 72):



Ապացուցում: Ենթադրենք՝ $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ կողմերով ABC եռանկյան ամենամեծ կողմը AC կողմն է, և $b^2 > a^2 + c^2$: Ապացուցենք, որ այդ եռանկյունը բութանկյուն եռանկյուն է:

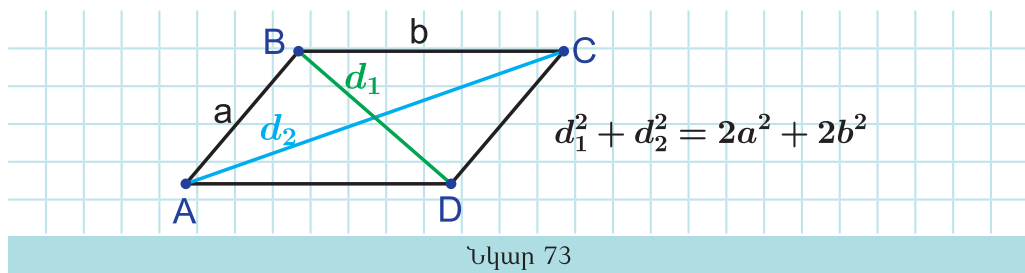
Ըստ կոսինուսների թեորեմի՝ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$, որտեղից՝ $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$: Հաշվի առնելով $b^2 > a^2 + c^2$ պայմանը՝ կունենանք,

որ $\cos B < 0$: Վերջինից կհետևի, որ եռանկյան B անկյունը բութ է: Ուրեմն եռանկյունը բութանկյուն եռանկյուն է: Հետևանքն ապացուցված է:

Ներկայացնենք կոսինուսների թեորեմի ևս մեկ հետևանք, որ կապ է հաստատում զուգահեռագծի կողմերի ու անկյունագծերի միջև:

Հետևանք 3: Զուգահեռագծի անկյունագծերի քառակուսիների գումարը հավասար է բոլոր կողմերի քառակուսիների գումարին (նկ. 73):

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ $ABCD$ զուգահեռագծի կից կողմերը a և b են, իսկ անկյունագծերը՝ d_1 և d_2 (նկ. 73): Ապացուցենք, որ $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$:



ABD և ABC եռանկյունների համար կիրառենք կոսինուսների թեորեմը. $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos A$, $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos B$: Քանի որ զուգահեռ ուղիղները հատողով հատելիս առաջացած միակողմանի անկյունների գումարը 180° է, ապա $\angle B = 180^\circ - \angle A$: Ուրեմն $\cos B = -\cos A$: Հաշվի առնելով դա և գումարելով վերևում ստացված հավասարությունները՝ կունենանք. $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$: Հետևանքն ապացուցված է:



Հարցեր և խնդիրներ

198. ABC եռանկյունում $AC = \sqrt{2}$ սմ, $BC = 1$ սմ, $\angle ABC = 45^\circ$: Գտե՛ք BAC անկյունը:
199. Եռանկյան կողմը 12 սմ է, իսկ դրա դիմացի անկյունը՝ 45° : Գտե՛ք այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:
200. Եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը 5 դմ է, անկյուններից մեկը՝ 60° : Գտե՛ք այդ անկյան դիմացի կողմը:
201. Եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը հավասար է կողմերից մեկին: Գտե՛ք այդ կողմի դիմացի անկյունը:
202. Ապացուցե՛ք, որ 120° անկյունով հավասարասրուն եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը հավասար է սրունքին:
203. Օգտվելով սինուսների թեորեմից՝ լուծե՛ք 164 խնդիրը:
204. Ապացուցե՛ք, որ նման եռանկյուններին արտագծած շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությունը հավասար է նմանության գործակցին:
205. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքը $12\sqrt{3}$ սմ է, հիմքին առընթեր անկյունը 60° է: Գտե՛ք այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:
206. R շառավղով շրջանագծի A կետից տարված են AB և AC լարերը: Գտե՛ք ABC եռանկյան անկյունները, եթե $AC = \sqrt{2}R$, $AB = R$:

207. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքի դիմացի գագաթով և հիմքի՝ ծայրակետերից տարբեր որևէ կետով տարված է ուղիղ: Ապացուցե՛ք, որ առաջացած եռանկյուններին արտագծած շրջանագծերի շառավիղները հավասար են:
208. Օգտվելով սինուսների թեորեմից՝ ապացուցե՛ք, որ եռանկյան կիսորդը կողմը բաժանում է մյուս երկու կողմերին համեմատական հատվածների:
209. Ապացուցե՛ք, որ եթե $\frac{a}{\cos \alpha} = \frac{b}{\cos \beta}$, որտեղ a -ն և b -ն եռանկյան կողմերն են, իսկ α -ն և β -ն դրանց դիմացի անկյունները, ապա եռանկյունը հավասարասրուն է:
210. Հավասարասրուն սեղանի հիմքերը 9 դմ և 21 դմ են, բարձրությունը՝ 8 դմ: Գտե՛ք սեղանին արտագծած շրջանագծի շառավիղը:
211. Եռանկյան 6 սմ և $2\sqrt{3}$ սմ երկարությամբ կողմերը կազմում են 30° անկյուն: Գտե՛ք երրորդ կողմը:
212. Եռանկյան 3 դմ և 8 դմ երկարությամբ կողմերը կազմում են 120° անկյուն: Գտե՛ք երրորդ կողմը:
213. Գտե՛ք 5 սմ, 7 սմ, 9 սմ երկարությամբ կողմերով եռանկյան ամենամեծ անկյան կոսինուսը:
214. Եռանկյան կողմերը 6 դմ և $2\sqrt{7}$ դմ են: Երկրորդ կողմի դիմացի անկյունը 60° է: Գտե՛ք եռանկյան երրորդ կողմը:
215. Գտե՛ք 4 սմ, 6 սմ, 8 սմ երկարությամբ կողմերով եռանկյան ամենամեծ կողմին տարած միջնագիծը:
216. Գտե՛ք կանոնավոր եռանկյան գագաթի հեռավորությունը հանդիպակաց կողմը 2:3 հարաբերությամբ բաժանող կետից, եթե եռանկյան կողմը 15 դմ է:
217. Հավասարասրուն եռանկյան սրունքը 4 սմ է, սրունքին տարած միջնագիծը՝ 3 սմ: Գտե՛ք եռանկյան հիմքը:
218. K -ն ABC եռանկյան AC կողմի այնպիսի կետ է, որ $AK = 3$ սմ, $KC = 6$ սմ: Գտե՛ք BK -ն, եթե $AB = 4$ սմ, $BC = 10$ սմ:
219. Եռանկյան 60° կազմող կողմերից մեկը երկու անգամ մեծ է մյուսից: Ապացուցե՛ք, որ այն ուղղանկյուն եռանկյուն է:
220. M և N կետերը համապատասխանաբար $ABCD$ շեղանկյան AD և BC կողմերի վրա են, ընդ որում՝ $DM : AM = BN : NC = 2 : 1$: Գտե՛ք MN -ը, եթե շեղանկյան կողմը a է և $\angle BAD = 60^\circ$:
221. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքը 5 սմ է, իսկ սրունքը՝ 20 սմ: Գտե՛ք հիմքին առընթեր անկյան կիսորդը:

222. Գտե՛ք $BC = 3$ սմ, $AD = 7$ սմ հիմքերով և $AB = 2$ սմ, $CD = 5$ սմ կողմնային կողմերով սեղանի մեծ հիմքին առընթեր անկյունների կոսինուսները:
223. A , B , C բնակավայրերը միացնող ուղղագիծ ճանապարհներով առաջացած եռանկյունում $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$: A -ից և B -ից միաժամանակ դեպի C շարժվեց երկու մեքենա, որոնց արագությունները համապատասխանաբար 50 կմ/ժ և 70 կմ/ժ են: Մեքենաներից ո՞րն ավելի շուտ կհասնի C :
224. Հնարավոր է արտագծել շրջանագիծ $ABCD$ քառանկյանը, եթե $\angle ADC = 30^\circ$, $AB = 3$ սմ, $BC = 4$ սմ, $AC = 6$ սմ:
225. Ինչպիսի՞ն է եռանկյունը, եթե դրա կողմերն են.
ա) 8 սմ, 9 սմ, 12 սմ, բ) 6 դմ, 7 դմ, 9 դմ, գ) 11 սմ, 13 սմ, 19 սմ:
226. Ինչպիսի՞ն է եռանկյունը, եթե դրա կողմերն են.
ա) 7 դմ, 11 դմ, 16 դմ,
բ) 8 դմ, 17 դմ, 20 դմ,
գ) 4 դմ, 9 դմ, 12 դմ:
227. Ինչպիսի՞ն է 7 սմ, 24 սմ, 25 սմ կողմերով եռանկյունը:
228. Զուգահեռագծի կից կողմերը 5 սմ և 6 սմ են, անկյունագծերից մեկը՝ 10 սմ: Գտե՛ք մյուս անկյունագիծը:
229. Զուգահեռագծի կից կողմերը 5 սմ և 7 սմ են, իսկ անկյունագծերը հարաբերում են, ինչպես $2\sqrt{3} : 5$: Գտե՛ք զուգահեռագծի անկյունագծերը:
230. Զուգահեռագծի անկյունագծերը $8\sqrt{3}$ դմ և 20 դմ են, իսկ կից կողմերը հարաբերում են, ինչպես $5 : 7$: Գտե՛ք զուգահեռագծի կողմերը:
231. Ապացուցե՛ք, որ a , b , c կողմերով եռանկյան c կողմին տարված միջնագիծը՝ $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$:
232. Եռանկյան կողմերը 11 դմ, 13 դմ և 12 դմ են: Գտե՛ք մեծ կողմին տարած միջնագիծը:
233. Եռանկյան երկու կողմերը 11 սմ և 23 սմ են, իսկ երրորդին տարած միջնագիծը՝ 10 սմ: Գտե՛ք երրորդ կողմը:
234. Ապացուցե՛ք, որ եռանկյան միջնագծերի քառակուսիների գումարի հարաբերությունը դրա կողմերի քառակուսիների գումարին $\frac{3}{4}$ է:



Խմբային աշխատանք

Դասարանի աշակերտներին բաժանեք երկու կամ երեք խմբի, խմբերին հանձնարարեք քննարկել հետևյալ հարցը և ներկայացնել այդ հարցի պատասխանը.

Եթե մի եռանկյան ցանկացած կողմը մեծ է մյուս եռանկյան ցանկացած կողմից, ապա կարո՞ղ ենք պնդել, որ առաջինին արտագծած շրջանագծի շառավիղը մեծ է երկրորդին արտագծած շրջանագծի շառավիղից:

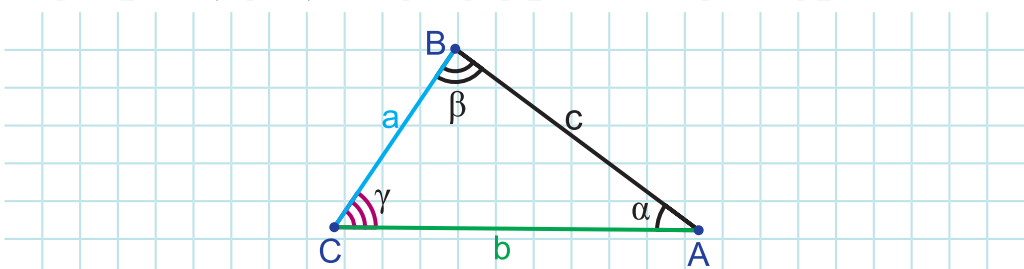
§9. Եռանկյան լուծումը

□ 22. Եռանկյան լուծումը

Լուծել եռանկյունը նշանակում է այն որոշող հայտնի տվյալների միջոցով գտնել եռանկյան անհայտ կողմերը և անկյունները: Այդպիսի խնդիրներ ծագում են գործնական տարբեր իրավիճակներում, օրինակ, շինարարությունում, գեոդեզիայում, նավագնացության մեջ, աստղագիտությունում:

Դիտարկենք եռանկյան լուծման երեք խնդիր և ներկայացնենք դրանց լուծման քայլերը:

Խնդիր 1. Հայտնի են ABC եռանկյան a , b կողմերը և դրանց կազմած անկյունը՝ γ -ն (սկ. 74): Գտնեք c կողմը և α , β անկյունները:



Նկար 74

Լուծում: Օգտվելով կոսինուսների թեորեմից՝ գտնենք c -ն.

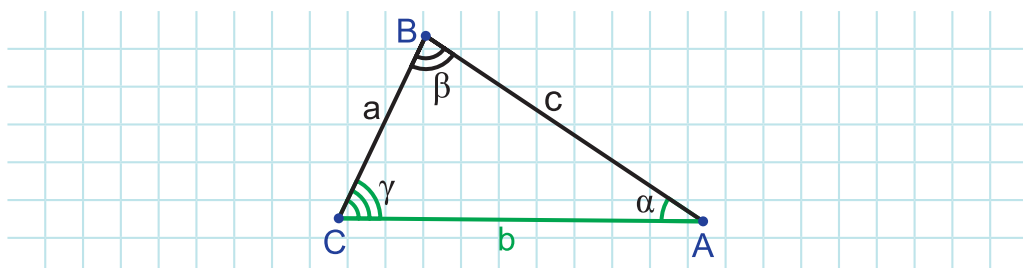
$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma}$: c -ն գտնելուց հետո α , β անկյուններից որևէ մեկը կարող ենք գտնել և՛ սինուսների թեորեմով, և՛ կոսինուսների թեորեմով: Բայց կոսինուսների թեորեմն ավելի հարմար է, քանի որ, ունե-

նախով անկյան կոսինուսը, միարժեք կգտնենք այդ անկյունը, իսկ անկյան սինուսը միարժեքորեն չի որոշում անկյան չափը:

Ըստ կոսինուսների թեորեմի՝ $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$: Ստացվածից հաշվի-

շով գտնում ենք α -ն: Երրորդ անկյունը՝ $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$:

Խնդիր 2. Հայտնի են ABC եռանկյան b կողմը և դրան առնթեր α և γ անկյունները (նկ. 75): Գտնեք β անկյունը, a , c կողմերը:

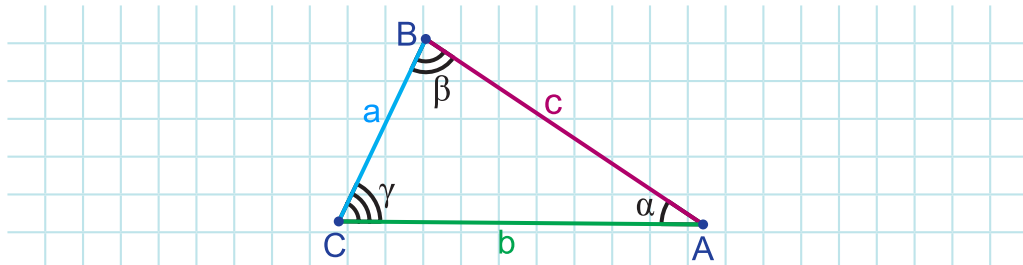


Նկար 75

Լուծում: Քանի որ եռանկյան երկու անկյունները հայտնի են, ապա $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$: a և c կողմերը գտնելու համար, երբ արդեն գտել ենք β անկյունը, օգտվենք սինուսների թեորեմից. $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$: Վերջինից

կունենանք. $a = \frac{b}{\sin \beta} \cdot \sin \alpha$, $c = \frac{b}{\sin \beta} \cdot \sin \gamma$:

Խնդիր 3. Հայտնի են ABC եռանկյան a , b , c կողմերը (նկ. 76): Գտնեք α , β , γ անկյունները:



Նկար 76

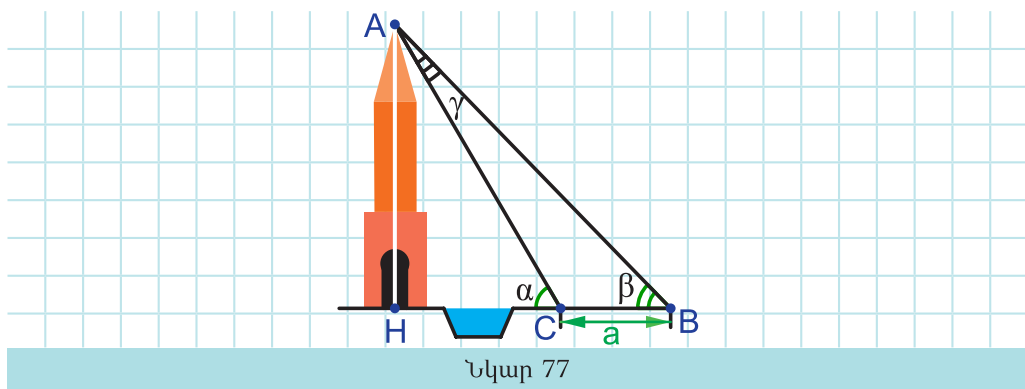
Լուծում: Օգտվելով կոսինուսների թեորեմից՝ գտնենք $\cos \alpha$ -ն. $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$: Ստացվածից հաշվիչով գտնում ենք α -ն: Նույն ձևով կարող ենք գտնել նաև $\cos \beta$ -ն՝ $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, ապա β անկյունը: Երրորդ անկյունը՝ $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$:

□ 23. Չափողական աշխատանքներ

Չափողական աշխատանքների հետ Դուք ծանոթ եք 7-րդ դասարանից: Եթե 7-րդ դասարանում չափողական աշխատանքների համար հիմք էին ծառայում եռանկյունների հավասարության հայտանիշները, 8-րդ դասարանում՝ եռանկյունների նմանության հայտանիշները, հիմա դրանց ավելանում են սինուսների և կոսինուսների թեորեմները:

Առարկայի բարձրության որոշումը

Ենթադրենք՝ ուզում ենք որոշել աշտարակի AH բարձրությունը, որի հիմքը անհասանելի է (նկ. 77):



Չափելով α ու β անկյունները և B, C կետերի a հեռավորությունը՝ կարելի է գտնել աշտարակի AH բարձրությունը:

Որպես $\triangle ACB$ եռանկյան արտաքին անկյուն՝ $\alpha = \beta + \gamma$: Հետևաբար $\gamma = \alpha - \beta$, իսկ $\angle ACB = 180^\circ - \alpha$: $\triangle ABC$ եռանկյան համար կիրառելով սինուսների թեորեմը՝ կունենանք.

$$\frac{AB}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{a}{\sin(\alpha - \beta)}:$$

Որտեղից, հաշվի առնելով նաև, որ $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, կունենանք.

$$AB = \frac{a}{\sin(\alpha - \beta)} \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}:$$

Մյուս կողմից, $\triangle AHB$ ուղղանկյուն եռանկյունուց, $\frac{AH}{AB} = \sin \beta$: Ուրեմն

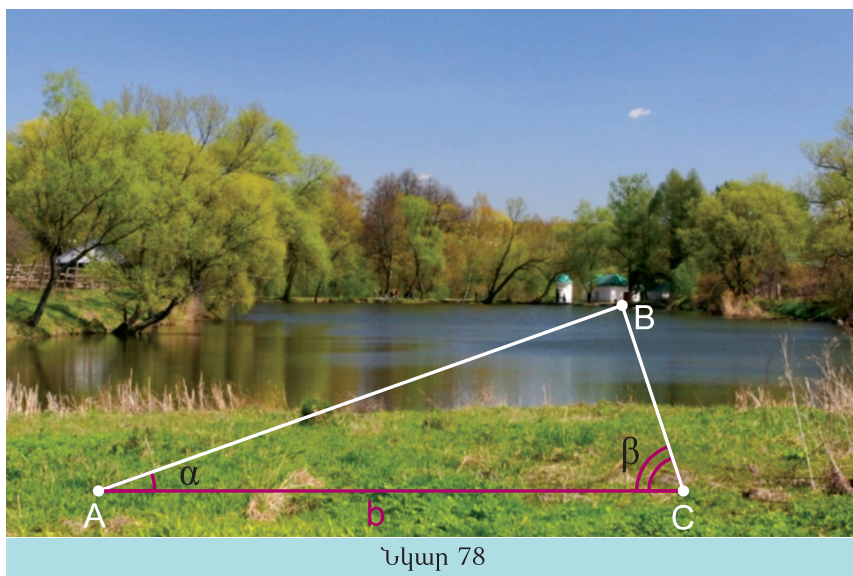
$$AH = AB \cdot \sin \beta = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} \cdot \sin \beta = \frac{a \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}:$$

Անմատչելի կետի հեռավորության որոշումը

Ենթադրենք՝ ուզում ենք որոշել գետի մի ափի հասանելի A կետի հեռավորությունը գետի մյուս ափի տնակից (B կետից) (նկ. 78):

Չափելով α ու β անկյունները և A, C կետերի b հեռավորությունը՝ կարելի է գտնել AB հեռավորությունը:

Իրոք, ABC եռանկյունուց՝ $\angle B = 180^\circ - (\alpha + \beta)$: ABC եռանկյան համար կիրառելով սինուսների թեորեմը՝ կունենանք. $\frac{AB}{\sin \beta} = \frac{b}{\sin B}$:



Որտեղից՝ $AB = \frac{b \sin \beta}{\sin B}$: Բայց $\sin B = \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$: Հե-

տևաբար $AB = \frac{b \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$:



Հարցեր և խնդիրներ

Եռանկյան լուծման խնդիրներում կհամարենք, որ տրված է ABC եռանկյուն և արված են հետևյալ նշանակումները. $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$:

235. Լուծե՛ք ABC եռանկյունը, եթե.

ա) $b = 5$ սմ, $c = 12$ սմ, $\alpha = 45^\circ$,

բ) $a = 10$ սմ, $b = 14$ սմ, $\gamma = 30^\circ$,

գ) $a = 8$ սմ, $c = 12$ սմ, $\beta = 60^\circ$:

- 236.** Լուծե՛ք ABC եռանկյունը, եթե.
ա) $b=6$ սմ, $c=12$ սմ, $\alpha=20^\circ$, բ) $a=8$ սմ, $c=7$ սմ, $\beta=130^\circ$:
- 237.** Լուծե՛ք ABC եռանկյունը, եթե.
ա) $b=9$ սմ, $\alpha=60^\circ$, $\gamma=45^\circ$,
բ) $a=8$ սմ, $\beta=30^\circ$, $\gamma=45^\circ$,
գ) $c=12$ սմ, $\alpha=120^\circ$, $\beta=30^\circ$:
- 238.** Լուծե՛ք ABC եռանկյունը, եթե.
ա) $b=14$ սմ, $\alpha=40^\circ$, $\gamma=10^\circ$, բ) $c=20$ սմ, $\alpha=100^\circ$, $\beta=50^\circ$:
- 239.** Լուծե՛ք ABC եռանկյունը, եթե.
ա) $a=13$ սմ, $b=5$ սմ, $c=12$ սմ,
բ) $a=10$ սմ, $b=14$ սմ, $c=6$ սմ,
գ) $a=12$ սմ, $b=20$ սմ, $c=15$ սմ:
- 240.** Լուծե՛ք ABC եռանկյունը, եթե.
ա) $a=16$ սմ, $b=6$ սմ, $c=12$ սմ,
բ) $a=15$ սմ, $b=9$ սմ, $c=8$ սմ:
- 241.** Գտե՛ք ABC եռանկյան անհայտ տարրերը, եթե.
ա) $a=10$ սմ, $b=14$ սմ, $\alpha=30^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$,
բ) $a=10$ սմ, $b=14$ սմ, $\alpha=30^\circ$, $90^\circ < \beta < 180^\circ$:
- 242.** Գտե՛ք զուգահեռագծի կողմերը, եթե դրա անկյունագծերը 12 սմ ու 16 սմ են և իրար հետ կազմում են 60° անկյուն:
- 243.** Գտե՛ք ABC եռանկյան BK կիսորդը, եթե $AB=6$ սմ, $BC=9$ սմ, $AC=10$ սմ:
- 244.** ABC հավասարասրուն եռանկյան AC հիմքը $12\sqrt{3}$ սմ է, իսկ B անկյունը 120° է: Գտե՛ք AM միջնագիծը:
- 245.** Երևանի հեռուստաաշտարակի M գագաթը A կետից երևում էր 54° -ի անկյան տակ: 100 մ մոտենալուց հետո՝ B կետից այն երևաց 68° -ի անկյան տակ (սկ. 79): Գտե՛ք հեռուստաաշտարակի բարձրությունը:

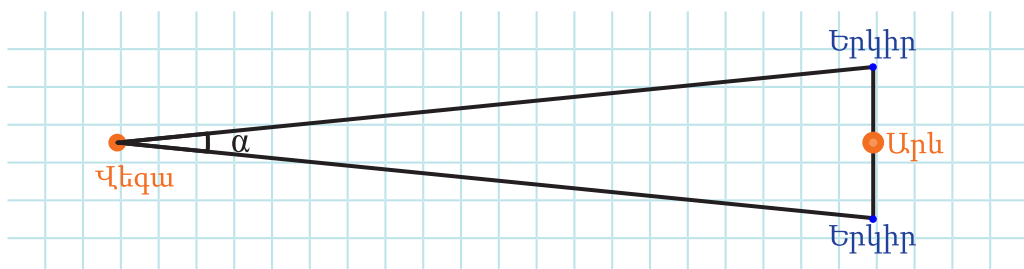


Նկար 79



Նկար 80

246. Դիտորդը 20 մ հեռավորությունից Գյումրու «Մայր Հայաստան» հուշարձանի հիմքը տեսնում է հորիզոնի նկատմամբ 5° անկյան, իսկ ամենաբարձր կետը՝ 63° անկյան տակ (նկ. 80): Գտեք հուշարձանի բարձրությունը:
247. Գտեք Վեգա աստղի հեռավորությունը Երկրից, եթե Երկրից Արև հեռավորությունը 150 000 000 կմ է, իսկ α անկյունը՝ $0,256''$ (նկ. 81): Այդ հեռավորությունն արտահայտեք լուսատարիներով:



Նկար 81

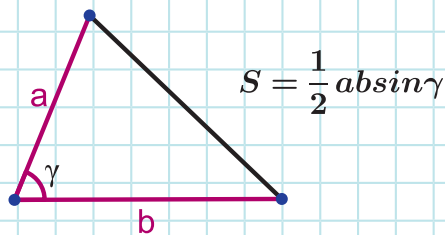
245–247 խնդիրների Ձեր ստացած պատասխանները համեմատեք դրանց մասին համացանցում եղած տվյալների հետ:

§10. Եռանկյան և զուգահեռագծի մակերեսները

□ 24. Եռանկյան մակերեսը

Մինչև հիմա Ձեզ հայտնի էր եռանկյան մակերեսը հաշվելու միայն մեկ բանաձև: Ավարտելով այս գլխի ուսումնասիրումը՝ Դուք կիմանաք եռանկյան մակերեսը հաշվելու ևս չորս բանաձև: Ահա դրանցից առաջինը:

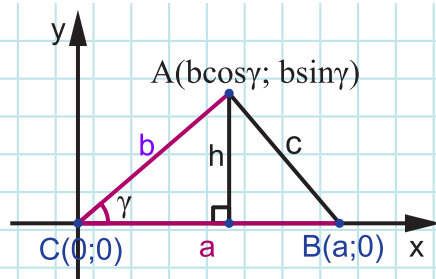
Թեորեմ: Եռանկյան մակերեսը հավասար է դրա երկու կողմերի և դրանցով կազմված անկյան սինուսի արտադրյալի կեսին՝ $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ (նկ. 82):



Նկար 82

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ ABC եռանկյունում $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = \gamma$: Ապացուցենք, որ այդ եռանկյան մակերեսը՝ $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$:

Ներմուծենք կոորդինատային համակարգ, ինչպես ցույց է տրված նկար 83-ում:

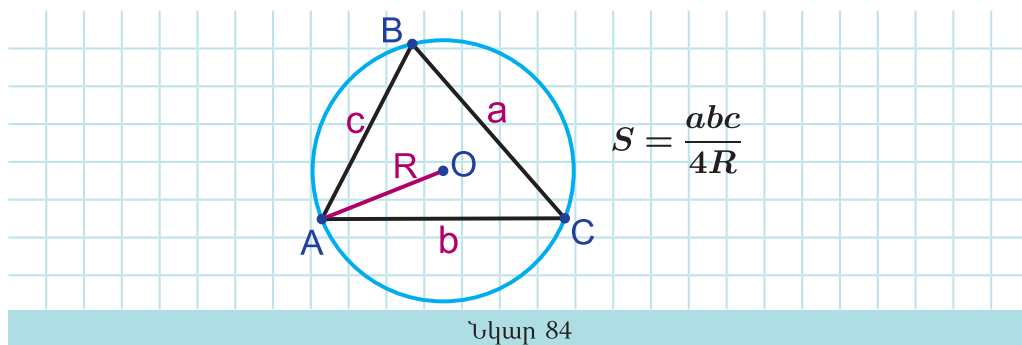


Նկար 83

ABC եռանկյան մակերեսը հավասար է A հիմքի և դրան տարված

և բարձրության արտադրյալի կեսին՝ $S = \frac{1}{2}ah$: Բայց, անկախ γ անկյան մեծությունից, h բարձրությունը հավասար է A կետի օրդինատին՝ $h = b \sin \gamma$: Ուրեմն $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$: Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք: Եռանկյան մակերեսը հավասար է դրա կողմերի արտադրյալի և դրան արտագծած շրջանագծի շառավղի քառապատիկի հարաբերությանը՝ $S = \frac{abc}{4R}$ (նկ. 84):



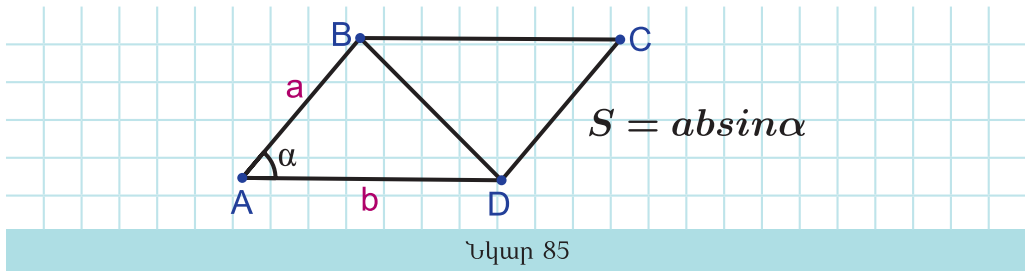
Նկար 84

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ եռանկյան կողմերը a, b, c են, իսկ դրան արտագծած շրջանագծի շառավղի R է (նկ. 84): Ապացուցենք, որ այդ եռանկյան մակերեսը՝ $S = \frac{abc}{4R}$:

Ըստ վերևում ապացուցված թեորեմի՝ $S = \frac{1}{2}ab \sin C$: Մյուս կողմից, ըստ սինուսների թեորեմի, $\frac{c}{\sin C} = 2R$: Հետևաբար $\sin C = \frac{c}{2R}$: Ուրեմն $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ab \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$: Հետևանքն ապացուցված է:

□ 25. Զուգահեռագծի մակերեսը

Թեորեմ: Զուգահեռագծի մակերեսը հավասար է կից կողմերի և դրանցով կազմված անկյան սինուսի արտադրյալին՝ $S = ab \sin \alpha$ (նկ. 85):



Ապացուցում: Ենթադրենք՝ $ABCD$ զուգահեռագծում $AB = a$, $AD = b$, $\angle A = \alpha$ (նկ. 85): Ապացուցենք, որ այդ զուգահեռագծի մակերեսը՝ $S = absin \alpha$:

Ջուգահեռագիծն իր BD անկյունագծով բաժանվում է երկու հավասար եռանկյունների: Հետևաբար $S = 2S_{ABD}$: Իսկ ABD եռանկյան մակերեսը, ըստ նախորդ կետի թեորեմի, հավասար է $\frac{1}{2}absin \alpha$: Ուրեմն $S = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2}absin \alpha = absin \alpha$: Թեորեմն ապացուցված է:

Օգտվելով $\angle A + \angle B = 180^\circ$ կապից և բերման բանաձևերից՝ համոզվեք, որ $ABCD$ զուգահեռագծի մակերեսը կարելի է հաշվել նաև $S = absin B$ բանաձևով:



Հարցեր և խնդիրներ

- 248.** Գտեք եռանկյան մակերեսը, եթե դրա 7 սմ և 16 սմ երկարությամբ կողմերը կազմում են 45° անկյուն:
- 249.** Գտեք եռանկյան մակերեսը, եթե դրա 11 դմ և 8 դմ երկարությամբ կողմերը կազմում են 150° անկյուն:
- 250.** Ապացուցեք, որ հավասար անկյուններ ունեցող եռանկյունների մակերեսները հարաբերում են այնպես, ինչպես այդ անկյունը կազմող կողմերի արտադրյալները:
- 251.** Եռանկյան կողմերի արտադրյալը 3570 սմ^3 է: Գտեք այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը, եթե դրա մակերեսը 84 սմ^2 է:
- 252.** Եռանկյան կողմերի արտադրյալը $150\sqrt{5} \text{ սմ}^3$ է: Գտեք այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը, եթե դրա մակերեսը 15 սմ^2 է:
- 253.** Գտեք 5 դմ, 5 դմ, 8 դմ կողմերով եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:

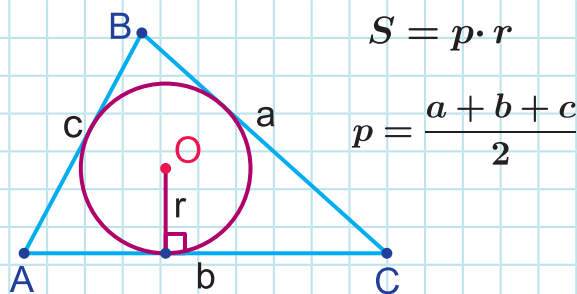
254. Ապացուցե՛ք տարբեր եղանակներով, որ նման եռանկյուններին արտագծած շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությունը հավասար է նմանության գործակցին:
255. ABC եռանկյան AB կողմի վրա նշված է M կետը, իսկ AC կողմի վրա՝ P կետը, ընդ որում՝ $AM:AB=1:3$, $AP:AC=2:5$: Գտե՛ք AMP և ABC եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:
256. ABC եռանկյան AB կողմի վրա նշված է M կետը, իսկ AC կողմի վրա՝ P կետը, ընդ որում՝ $2AM=MB$, $AP=PC$: Գտե՛ք AMP և BPC եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:
257. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առնթեր անկյունը 30° է, իսկ արտագծած շրջանագծի շառավիղը՝ 3 սմ: Գտե՛ք եռանկյան մակերեսը:
258. Ապացուցե՛ք, որ a և b կողմերով եռանկյուններից մեծագույն մակերես ունի այն եռանկյունը, որում այդ կողմերի կազմած անկյունը 90° է:
259. ABCD զուգահեռագծի A անկյունը 60° է, իսկ AB կողմը՝ 3 սմ: A անկյան կիսորդը BC կողմը հատում է E կետում: Գտե՛ք ABE եռանկյան մակերեսը:
260. ABC եռանկյան AN և BM միջնագծերը համապատասխանաբար 6 դմ և 9 դմ են և հատվում են K կետում: Գտե՛ք ABC եռանկյան մակերեսը, եթե $\angle AKB=30^\circ$:
261. Զուգահեռագծի կից կողմերը 10 սմ և 14 սմ են, անկյուններից մեկը՝ 60° : Գտե՛ք զուգահեռագծի մակերեսը:
262. Զուգահեռագծի կից կողմերը 6 սմ և 12 սմ են, անկյուններից մեկը՝ 150° : Գտե՛ք զուգահեռագծի մակերեսը:
263. $135\sqrt{2}$ դմ² մակերեսով զուգահեռագծի կից կողմերը 15 դմ և 18 դմ են: Գտե՛ք զուգահեռագծի անկյունները:
264. Զուգահեռագծի անկյուններից մեկը 45° է, իսկ բարձրությունները հարաբերում են, ինչպես 1 : 2: Գտե՛ք զուգահեռագծի կողմերը, եթե դրա մակերեսը $25\sqrt{2}$ մ² է:
265. Զուգահեռագծի կողմերից մեկը 2 սմ-ով մեծ է մյուսից, իսկ դրանց կազմած անկյունը 60° է: Գտե՛ք զուգահեռագծի կողմերը, եթե դրա մակերեսը $24\sqrt{3}$ սմ² է:
266. Ապացուցե՛ք, որ a և b կից կողմերով զուգահեռագծերից մեծագույն մակերես ունի այն զուգահեռագիծը, որում այդ կողմերի կազմած անկյունը 90° է:

267. Ապացուցե՛ք, որ շեղանկյան մակերեսը հավասար է դրա կողմի քառակուսու և անկյան սինուսի արտադրյալին:
268. $32\sqrt{2}$ սմ² մակերեսով շեղանկյան անկյուններից մեկը 45° է: Գտե՛ք շեղանկյան կողմը:

§11. Եռանկյան մակերեսի այլ բանաձևերը

□ 26. Եռանկյան մակերեսը ներգծած շրջանագծի շառավղի միջոցով

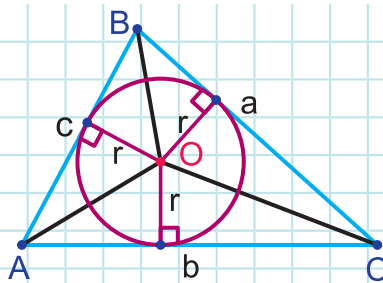
Թեորեմ: Եռանկյան մակերեսը հավասար է դրա կիսապարագծի և ներգծած շրջանագծի շառավղի արտադրյալին (նկ. 86):



Նկար 86

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ կողմերով ABC եռանկյանը ներգծված է O կենտրոնով և r շառավղով շրջանագիծ (նկ.

87): Ապացուցենք, որ $S_{ABC} = p \cdot r$, որտեղ $p = \frac{a + b + c}{2}$:



Նկար 87

Օ կետը միացնենք եռանկյան գագաթներին: ABC եռանկյունը կտրոհվի AOB , BOC և AOC եռանկյունների: AB , BC և AC կողմերի շոշափման կետերով տարված շառավիղները համապատասխանաբար կլինեն այդ եռանկյունների բարձրությունները: Հետևաբար

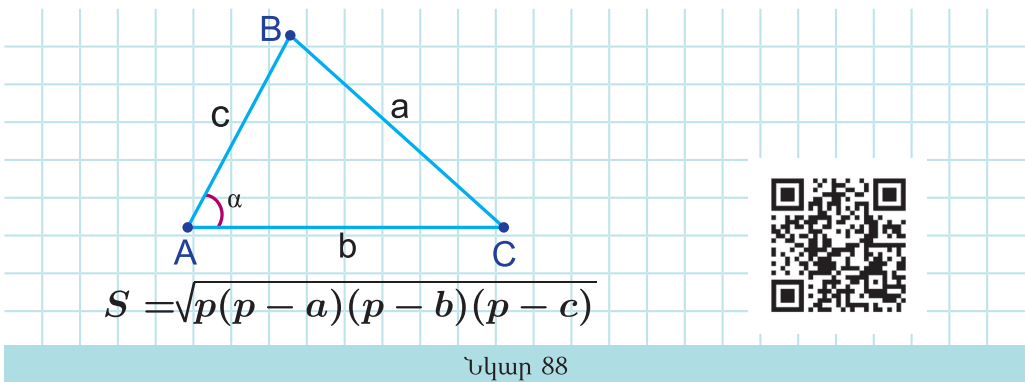
$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2}c \cdot r + \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r = \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot r = p \cdot r:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

□ 27. Հերոնի բանաձևը

Դուք գիտեք, որ եթե հայտնի են եռանկյան երեք կողմերը, ապա եռանկյունը միարժեք որոշված է (եռանկյունների հավասարության III հայտանիշ): Այդ դեպքում ուրեմն միարժեք որոշված է նաև եռանկյան մակերեսը: Բայց մինչև հիմա, առանց եռանկյան որևէ անկյուն կամ բարձրություն գտնելու, Դուք չէիք կարող գտնել եռանկյան մակերեսը, եթե հայտնի էին դրա բոլոր կողմերը:

Թեորեմ: (Հերոնի բանաձև) a , b , c կողմերով եռանկյան մակերեսը՝ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, որտեղ p -ն եռանկյան կիսաապարագիծն է՝ $p = \frac{a+b+c}{2}$ (նկ. 88):



Ապացուցում: Ենթադրենք՝ ABC եռանկյունում $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$: Ապացուցենք, որ այդ եռանկյան մակերեսը՝ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, որտեղ $p = \frac{a+b+c}{2}$:

Այդ եռանկյան մակերեսը՝ $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$: Քանի որ $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, ապա $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$: Ըստ կոսինուսների թեորեմի՝ $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$:

Հետևաբար $\cos^2 \alpha = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2$: Ուրեմն $\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2}$,

իսկ $S = \frac{1}{2}bc \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}$: Ձևափոխենք

արմատատակ արտահայտությունը.

$$\begin{aligned} (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 &= (2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2) = \\ &= (a^2 - (b - c)^2)((b + c)^2 - a^2) = (a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a): \end{aligned}$$

Քանի որ $a - b + c = 2(p - b)$, $a + b - c = 2(p - c)$, $b + c - a = 2(p - a)$, $a + b + c = 2p$, ապա $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$: Թեորեմն ապացուցված է:



Հարցեր և խնդիրներ

- 269.** Գտնք եռանկյան մակերեսը, եթե դրա պարագիծը 40 սմ է, իսկ ներգծած շրջանագծի շառավիղը՝ 3 սմ:
- 270.** Գտնք եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը, եթե դրա մակերեսը 210 դմ² է, իսկ պարագիծը՝ 84 դմ:
- 271.** Եռանկյան կողմերից մեկը 24 դմ է, իսկ մյուս երկու կողմերի գումարը՝ 32 դմ: Գտնք այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը, եթե դրա մակերեսը 84 դմ² է:
- 272.** Ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը 2 սմ է, իսկ ներքնաձիգը՝ 13 սմ: Գտնք եռանկյան մակերեսը:
- 273.** Ապացուցեք, որ նման եռանկյուններին ներգծած շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությունը հավասար է նմանության գործակցին:
- 274.** Գտնք 10 սմ, 10 սմ, 16 սմ կողմերով եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը:
- 275.** Եռանկյան կողմերը 5 սմ և 8 սմ են, իսկ դրանց կազմած անկյունը 60° է: Գտնք այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը:

- 276.** Գտնք 5 սմ, 7 սմ, 10 սմ կողմերով եռանկյան մակերեսը:
- 277.** Գտնք 13 դմ, 9 դմ, 6 դմ կողմերով եռանկյան մակերեսը:
- 278.** Հավասարասրուն եռանկյան պարագիծը 32 դմ է, իսկ հիմքը և սրունքը հարաբերում են, ինչպես 6:5: Գտնք եռանկյան մակերեսը:
- 279.** Եռանկյան կողմերը հարաբերում են, ինչպես 21:10:17, իսկ մակերեսը 84 սմ² է: Գտնք եռանկյան կողմերը:
- 280.** Եռանկյան կողմերը 10 դմ, 17 դմ, 21 դմ են: Գտնք այդ եռանկյան մեծ կողմին տարած բարձրությունը:
- 281.** Գտնք 9 սմ, 12 սմ, 15 սմ կողմերով եռանկյան մակերեսը և արտագծած շրջանագծի շառավիղը:
- 282.** 6 սմ, 7 սմ, 8 սմ շառավիղներով երեք շրջանագիծ զույգ առ զույգ շոշափում են միմյանց արտաքնապես: Գտնք այն եռանկյան մակերեսը, որի գագաթները այդ շրջանագծերի կենտրոններն են:
- 283.** 84 սմ² մակերեսով եռանկյան մի կողմը 21 դմ է, իսկ մյուս կողմերի տարբերությունը՝ 7 դմ: Գտնք եռանկյան պարագիծը:
- 284.** Գտնք եռանկյան մակերեսը, եթե դրա կողմերի երկարությունները հարաբերում են, ինչպես 7:15:20, իսկ ներգծած շրջանագծի շառավիղը 10 սմ է:
- 285.** Գտնք զուգահեռագծի մակերեսը, եթե դրա կողմերից մեկը 51 սմ է, իսկ անկյունագծերը՝ 40 սմ և 74 սմ են:

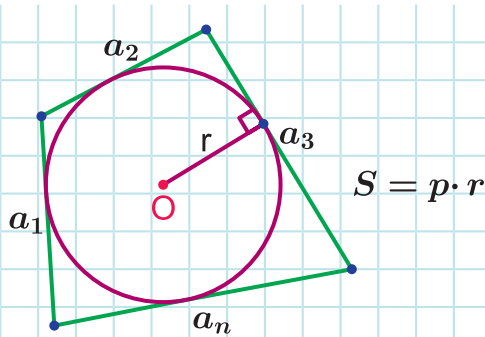
§12. Բազմանկյան մակերեսի այլ բանաձևեր

□ 28. Բազմանկյան մակերեսը ներգծած շրջանագծի շառավղի միջոցով

Դուք արդեն գիտեք, որ եռանկյան մակերեսը հավասար է դրա կիսապարագծի և ներգծած շրջանագծի շառավղի արտադրյալին:

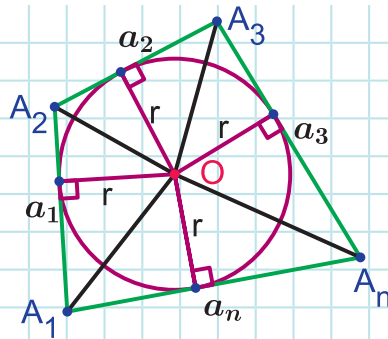
Պարզվում է, որ այդ բանաձևը ճիշտ է ցանկացած արտագծյալ բազմանկյան դեպքում.

Թեորեմ: Շրջանագծին արտագծած բազմանկյան մակերեսը հավասար է դրա կիսապարագծի և ներգծած շրջանագծի շառավղի արտադրյալին (նկ. 89):



Նկար 89

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ $A_1A_2 = a_1$, $A_2A_3 = a_2, \dots$, $A_nA_1 = a_n$ կողմերով $A_1A_2\dots A_n$ բազմանկյանը ներգծված է O կենտրոնով և r շառավղով շրջանագիծ (նկ. 90): Ապացուցենք, որ $S_{A_1A_2\dots A_n} = p \cdot r$, որտեղ $p = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{2}$:



Նկար 90

O կետը միացնենք բազմանկյան գագաթներին: Բազմանկյունն այդ հատվածներով կտրոհվի եռանկյունների: Բազմանկյան կողմերի շոշափման կետերով տարված շառավիղները համապատասխանաբար կլինեն այդ եռանկյունների բարձրությունները: Հետևաբար

$$\begin{aligned} S_{A_1A_2\dots A_n} &= S_{A_1OA_2} + S_{A_2OA_3} + \dots + S_{A_nOA_1} = \frac{1}{2}a_1 \cdot r + \frac{1}{2}a_2 \cdot r + \dots + \frac{1}{2}a_n \cdot r = \\ &= \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot r = p \cdot r: \end{aligned}$$

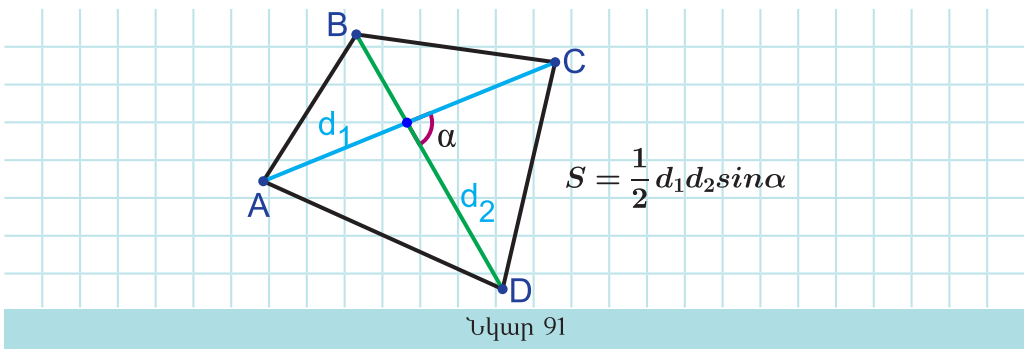
Թեորեմն ապացուցված է:

□ 29. Քառանկյան մակերեսը անկյունագծերի միջոցով

Դուք արդեն գիտեք, որ փոխադրահայաց անկյունագծերով ուռուցիկ քառանկյան մակերեսը հավասար է դրա անկյունագծերի արտադրյալի կեսին:

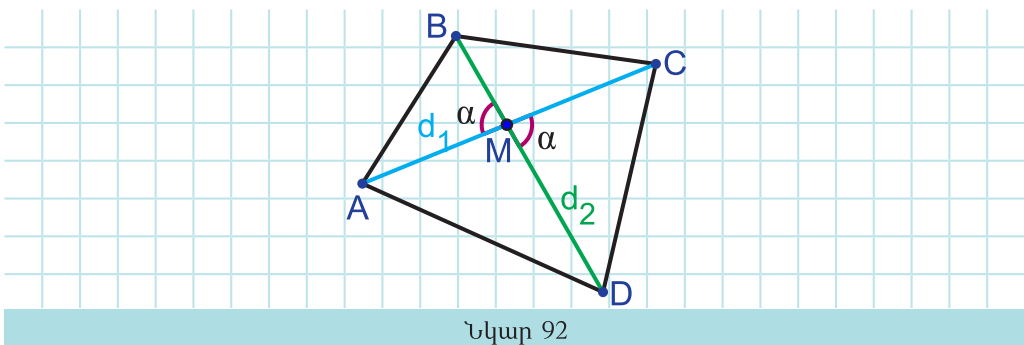
Այդ բանաձևի ընդհանրացումը, երբ ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերը փոխադրահայաց չեն, ներկայացված է հետևյալ թեորեմում.

Թեորեմ: Ուռուցիկ քառանկյան մակերեսը հավասար է դրա անկյունագծերի և դրանցով կազմված անկյան սինուսի արտադրյալի կեսին (նկ. 91):



Ապացուցում: Ենթադրենք՝ ABCD ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերի կազմած անկյունը α է (նկ. 92): Ապացուցենք, որ դրա մակերեսը՝ $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$:

Ըստ եռանկյան մակերեսի բանաձևի՝ $S_{ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot BM \cdot \sin \alpha$,
 $S_{BMC} = \frac{1}{2} MC \cdot BM \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} MC \cdot BM \cdot \sin \alpha$: Այդ եռանկյունների



մակերեսների գումարը հավասար է ABC եռանկյան մակերեսին՝

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} AM \cdot BM \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} MC \cdot BM \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} (AM + MC) \cdot BM \cdot \sin \alpha = \\ &= \frac{1}{2} AC \cdot BM \cdot \sin \alpha : \end{aligned}$$

Համանման ձևով կարելի է ցույց տալ, որ $S_{ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot DM \cdot \sin \alpha$:
Հետևաբար.

$$\begin{aligned} S &= S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot BM \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} AC \cdot DM \cdot \sin \alpha = \\ &= \frac{1}{2} AC (BM + DM) \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha : \end{aligned}$$

Թեորեմն ապացուցված է:



Հարցեր և խնդիրներ

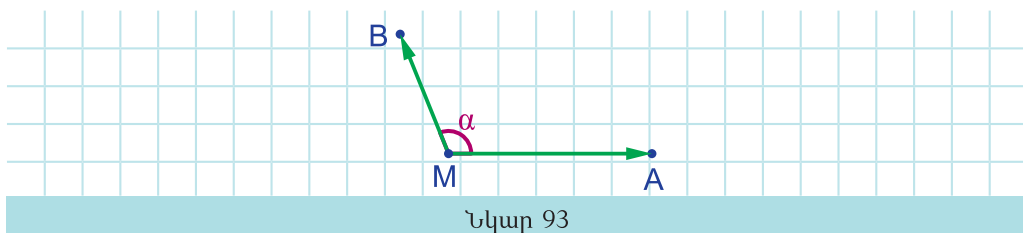
- 286.** Գտնք բազմանկյան մակերեսը, եթե դրա պարագիծը 40 սմ է, իսկ ներգծած շրջանագծի շառավիղը՝ 4,8 սմ:
- 287.** Գտնք բազմանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը, եթե դրա մակերեսը 156 դմ^2 է, իսկ պարագիծը՝ 52 դմ:
- 288.** Գտնք ABCD քառանկյան մակերեսը, եթե դրան ներգծած շրջանագծի շառավիղը 7 սմ է, իսկ $AB + CD = 36$ սմ:
- 289.** Շեղանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը $3\sqrt{3}$ սմ է, իսկ սուր անկյունը՝ 60° : Գտնք շեղանկյան կողմը:
- 290.** Շեղանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը $\frac{4}{\sqrt{3}}$ անգամ փոքր է դրա կողմից: Գտնք շեղանկյան անկյունները:
- 291.** Շրջանագծին արտագծած հավասարասրուն սեղանի բարձրությունը 4 սմ է, իսկ մակերեսը՝ 60 սմ²: Գտնք սեղանի սրունքը:
- 292.** Շրջանագծին արտագծած հավասարասրուն սեղանի սրունքը 12 դմ է, իսկ ներգծած շրջանագծի շառավիղը՝ 5 դմ: Գտնք սեղանի մակերեսը:
- 293.** Շրջանագծին արտագծած ուղղանկյուն սեղանի կողմնային կողմերը 12 սմ և 16 սմ են: Գտնք սեղանի մակերեսը:
- 294.** Ուռուցիկ քառանկյան 12 դմ և 18 դմ երկարությամբ անկյունագծերի կազմած անկյունը 45° է: Գտնք քառանկյան մակերեսը:

295. Զուգահեռագծի 7 սմ և 16 սմ երկարությամբ անկյունագծերի կազմած անկյունը 30° է: Գտե՛ք զուգահեռագծի մակերեսը:
296. Գտե՛ք սեղանի 6 սմ և 10 սմ երկարությամբ անկյունագծերի կազմած անկյունը, եթե դրա մակերեսը $15\sqrt{3}$ սմ² է:
297. Ուղղանկյան մակերեսը 36 դմ² է, անկյունագիծը՝ 12 դմ: Գտե՛ք անկյունագծերի կազմած անկյունը:
298. Ուղղանկյան կողմերը 6 սմ և 8 սմ են: Գտե՛ք անկյունագծերի կազմած անկյան սինուսը:
299. Ապացուցե՛ք, որ d_1 և d_2 անկյունագծերով ուռուցիկ քառանկյուններից մեծագույն մակերես ունի այն քառանկյունը, որի անկյունագծերի կազմած անկյունը 90° է:
300. Ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերը 8 սմ և $6\sqrt{3}$ սմ են և կազմում են 60° -ի անկյուն: Գտե՛ք այդ քառանկյան կողմերի միջակետերում գազաթներ ունեցող քառանկյան մակերեսը:
301. Ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերը 8 սմ են և կազմում են 45° -ի անկյուն: Գտե՛ք այն քառանկյան կողմերը և ներգծած շրջանագծի շառավիղը, որի գազաթները այդ քառանկյան կողմերի միջնակետերն են:

§13. Վեկտորների սկալյար արտադրյալը

□ 30. Երկու վեկտորների կազմած անկյունը: Վեկտորների սկալյար արտադրյալը

Սահմանում: $\overrightarrow{MA}$ և $\overrightarrow{MB}$ ոչ զրոյական չհամուղված վեկտորների կազմած անկյուն կոչվում է AMB անկյունը (նկ. 93):



Եթե վեկտորները համուղված են կամ դրանցից գոնե մեկը զրոյական է, ապա կրնդունենք, որ դրանց կազմած անկյունը 0° է:

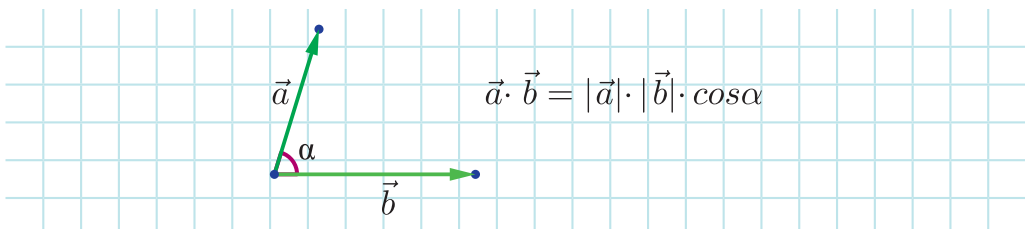
Եթե երկու վեկտորների սկզբնակետերը չեն համընկնում, ապա դրանց կազմած անկյունը որոշելու համար պետք է դրանք տեղադրել որևէ K կետից և օգտվել նույն սկզբակետն ունեցող վեկտորների կազմած անկյան սահմանումից:

Դժվար չէ ապացուցել, որ վեկտորների կազմած անկյունը կախված չէ K կետի ընտրությունից: Փորձեք դա անել ինքնուրույն:

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները կոչվում են **փոխուղղահայաց** (գրում են այսպես՝ $\vec{a} \perp \vec{b}$), եթե դրանց կազմած անկյունը 90° է:

Ձեզ հայտնի է, թե ինչպես են գումարում, հանում, թվով բազմապատկում վեկտորները: Այժմ կծանոթանաք երկու վեկտորների բազմապատկման տեսակներից մեկին:

Սահմանում: $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալ՝ $\vec{a} \cdot \vec{b}$, կոչվում է դրանց երկարությունների և դրանց կազմած անկյան կոսինուսի արտադրյալը (նկ. 94):



Նկար 94

Վեկտորների սկալյար արտադրյալը կիրառվում է ֆիզիկայի տարբեր բաժիններում՝ հաստատուն ուժի կատարած աշխատանքը հաշվելու համար, մասնավորապես մեխանիկայում: Եթե հաստատուն $\vec{F}$ ուժի ազդեցությամբ մարմնի տեղափոխությունը $\vec{s}$ է, ապա այդ ուժի կատարած A աշխատանքը՝ $A = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \alpha$, որտեղ α -ն $\vec{F}$ և $\vec{s}$ վեկտորների կազմած անկյունն է:

Ինչպես գիտեք, երկու վեկտորների գումարը, տարբերությունը, վեկտորի և թվի արտադրյալը վեկտորներ են, բայց երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը **վեկտոր չէ**, այլ **սկալյար է**:

Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են՝ $\alpha = 90^\circ$, ապա $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$:

Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ ոչ գրոյական վեկտորների սկալյար արտադրյալը զրո է՝ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, ապա սկալյար արտադրյալի սահմանումից հետևում է, որ $\cos \alpha = 0$: Իսկ դա նշանակում է, որ $\alpha = 90^\circ$, այսինքն՝ $\vec{a} \perp \vec{b}$:

Հետևաբար ոչ գրոյական վեկտորների սկալյար արտադրյալը զրո է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ վեկտորները փոխուղղահայաց են:

Վեկտորների սկալյար արտադրյալի սահմանումից հետևում է, որ ոչ գրոյական վեկտորների արտադրյալը դրական է, եթե դրանց կազմած անկյունը սուր է, և բացասական է, եթե այդ անկյունը բութ է:

Սահմանումից հետևում է, որ $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$: $\vec{a} \cdot \vec{a}$ սկալյար արտադրյալ կոչվում է $\vec{a}$ վեկտորի սկալյար քառակուսի և նշանակվում է $\vec{a}^2$ -ով:

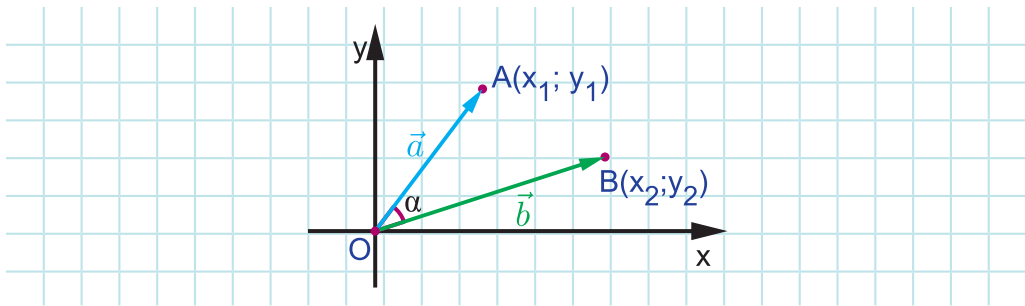
□ 31. Վեկտորների սկալյար արտադրյալը կոորդինատներով

Դուք գիտեք, թե ինչպես են կապված $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $k \cdot \vec{a}$ վեկտորների կոորդինատները $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կոորդինատների հետ: Այժմ տեսնենք, թե ինչի է հավասար $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը՝ արտահայտված դրանց կոորդինատներով:

Թեորեմ: $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ և $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ ոչ գրոյական վեկտորների սկալյար արտադրյալը՝ $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$:

Ապացուցում: Ակնհայտ է, որ բանաձևը ճիշտ է, եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներից գոնե մեկը գրոյական վեկտոր է:

Ենթադրենք՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տարագիծ ոչ գրոյական վեկտորներ են: Տեղադրենք այդ վեկտորները կոորդինատային հարթության O սկզբնակետից (նկ. 95):



Նկար 95

$\triangle AOB$ եռանկյունուց, ըստ կոսինուսների թեորեմի, կունենանք.
 $AB^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$: Քանի որ $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = \vec{a} \cdot \vec{b}$, ապա նախորդից կստանանք. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - AB^2)$: Բացի դրանից՝
 $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, $|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2$, $|\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2$: Հետևաբար
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2)$: Պարզեցնելով վերջինը՝
 կստանանք՝ $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$:

Մնում է դիտարկել ոչ զրոյական համագիծ վեկտորների դեպքը:

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ ոչ զրոյական վեկտորները համուղված են:

Այդ դեպքում $\alpha = 0^\circ$ և գոյություն ունի այնպիսի k դրական թիվ, որ $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$: Հետևաբար $x_1 = k \cdot x_2$, $y_1 = k \cdot y_2$: Ուրեմն այդ դեպքում

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (k \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b} = |k \cdot \vec{b}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 0^\circ = k \cdot |\vec{b}|^2 = k(x_2^2 + y_2^2) = (k \cdot x_2) \cdot x_2 + \\ &+ (k \cdot y_2) \cdot y_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2: \end{aligned}$$

Համանման ձևով կարելի է ցույց տալ, որ բանաձևը ճիշտ է նաև, երբ ոչ զրոյական վեկտորները հակուղված են: Թեորեմն ապացուցված է:

Քանի որ $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ և $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ ոչ զրոյական վեկտորների կազմած անկյան կոսինուսը՝ $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, իսկ $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$, $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$, ապա $\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$:

Ներկայացնենք նաև վեկտորների սկալյար արտադրյալի երկու հատկություն:

Ցանկացած $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորների համար.

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,

2. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$:

Հատկություն 1-ը հետևում է վեկտորների սկալյար արտադրյալի սահմանումից:

Հատկություն 2-ը ապացուցելու համար ենթադրենք, որ ինչ-որ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում դրանց կոորդինատներն են $\vec{a}\{x_1; y_1\}$, $\vec{b}\{x_2; y_2\}$, $\vec{c}\{x_3; y_3\}$:

Այդ դեպքում կունենանք, որ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (x_1 + x_2)x_3 + (y_1 + y_2)y_3 = (x_1x_3 + y_1y_3) + (x_2x_3 + y_2y_3) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$: Հատկությունն ապացուցված է:



Հարցեր և խնդիրներ

302. Գտնք $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ երկարությամբ վեկտորների սկալյար արտադրյալը, եթե դրանց կազմած անկյունը 30° է:

303. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը դրական է, իսկ $\vec{a}$ և $\vec{c}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը՝ բացասական: $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունն է մեծ, թե $\vec{a}$ և $\vec{c}$ վեկտորների կազմած անկյունը:

304. 45° անկյուն կազմող $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը 8 է, $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$: Գտնք $|\vec{b}|$ -ն:

305. ABCD շեղանկյան A անկյունը 60° է: Գտնք վեկտորների կազմած անկյունը.

ա) $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{AD}$,

գ) $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{BC}$,

ե) $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{AC}$,

բ) $\overrightarrow{BA}$ և $\overrightarrow{BC}$,

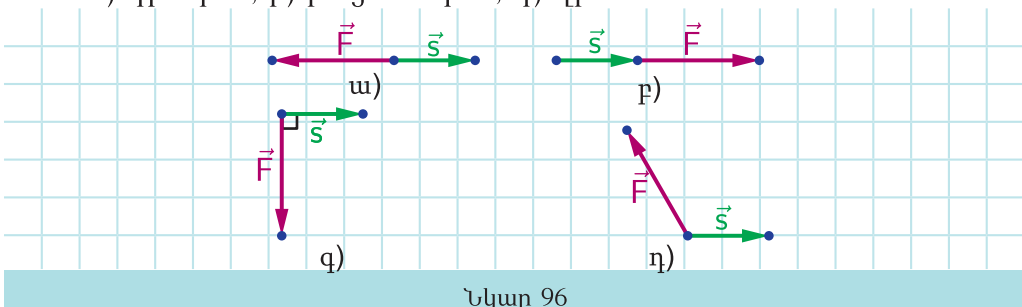
դ) $\overrightarrow{BC}$ և $\overrightarrow{CD}$,

զ) $\overrightarrow{BD}$ և $\overrightarrow{AC}$:

306. Գտնք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը, եթե $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$:

307. Ինչ անկյուն են կազմում $\vec{a}$ և $\vec{b}$ ոչ զրոյական վեկտորները, եթե դրանց սկալյար արտադրյալը 0 է:

- 308.** AB ներքնաձիգով ABC ուղղանկյուն եռանկյունում տարված է CD բարձրությունը: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{CB}$, $\overline{DC}$, $\overline{AB}$ վեկտորներից ընտրենք այնպիսի զույգեր, որոնց սկալյար արտադրյալը 0 է:
- 309.** $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը 90° է: Գտնք $\vec{a}(\vec{a} + \vec{b})$ -ն, եթե $|\vec{a}| = 5$:
- 310.** $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները հակուղղված են: Գտնք $2\vec{a}$ և $3\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը, եթե $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 4$:
- 311.** $\vec{a} + \vec{b}$ և $\vec{a} - \vec{b}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են: Ապացուցե՛ք, որ $|\vec{a}| = |\vec{b}|$:
- 312.** Գտնք $\vec{a}\{3; -4\}$ և $\vec{b}\{2; 6\}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը:
- 313.** $\vec{a}\{3; -4\}$, $\vec{b}\{9; -3\}$, $\vec{c}\{6; -2\}$, $\vec{d}\{3; -2\}$ վեկտորներից որո՞նք են ուղղահայաց $\vec{p}\{2; 6\}$ վեկտորին:
- 314.** Գտնք x -ը, եթե $\vec{a}\{x; 2\}$ և $\vec{b}\{4; -2\}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը 12 է:
- 315.** Գտնք $\vec{a}\{4; 4\}$ և $\vec{b}\{3; 3\}$ վեկտորների կազմած անկյունը:
- 316.** Գտնք $A(1; 7)$, $B(-1; -1)$, $C(-4; 2)$ գագաթներով եռանկյան անկյունների կոսինուսները:
- 317.** Ապացուցե՛ք, որ $\vec{i} + \vec{j}$ և $\vec{i} - \vec{j}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են, որտեղ $\vec{i}$ -ն և $\vec{j}$ -ն կոորդինատային վեկտորներն են:
- 318.** Ապացուցե՛ք, որ շեղանկյան անկյունագծերը փոխուղղահայաց են:
- 319.** Նկար 96-ում պատկերված են մարմնի $\vec{s}$ տեղափոխության և դրա վրա ազդող հաստատուն $\vec{F}$ ուժի վեկտորները: Ո՞ր դեպքում է մարմնի $\vec{s}$ տեղափոխության վրա $\vec{F}$ ուժի աշխատանքը ա) դրական, բ) բացասական, գ) զրո:



Նկար 96



Էլեկտրոնային թեմատիկ թեստ



Լրացուցիչ խնդիրներ

320. Պարզեցրե՛ք արտահայտությունը.

$$\begin{aligned} \text{ա) } & \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)}, & \text{գ) } & \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) \cdot \frac{\cos(90^\circ + \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha)}, \\ \text{բ) } & \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\cos(90^\circ + \alpha)} \cdot \sin(180^\circ - \alpha), & \text{դ) } & \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) \cdot \cos(180^\circ - \alpha): \end{aligned}$$

321. Գտե՛ք արտահայտության արժեքը.

$$\begin{aligned} \text{ա) } & 4\sin 120^\circ + 4\cos 150^\circ - 2\cos 135^\circ, \\ \text{բ) } & \sin 90^\circ (\operatorname{tg} 150^\circ \cdot \cos 135^\circ + \operatorname{tg} 120^\circ \cdot \sin 135^\circ): \end{aligned}$$

322. Գտե՛ք 30° սուր անկյունով ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը, եթե ուղիղ անկյան գագաթից տարված կիսորդը $\sqrt{6}$ սմ է:

323. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյունը α է: Գտե՛ք այդ եռանկյանը ներգծած և արտագծած շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությունը:

324. ABC եռանկյունում $AB = AC = 8\sqrt{2}$ սմ, $\angle A = 30^\circ$: B գագաթով տարված ուղիղը, որն անցնում է եռանկյանն արտագծած շրջանագծի O կենտրոնով, հատում է AC սրունքը D կետում: Գտե՛ք BD հատվածի երկարությունը:

325. Գտե՛ք AD և BC հիմքերով հավասարասրուն սեղանին արտագծած շրջանագծի շառավիղը, եթե $\angle BCA = 15^\circ$, $\angle CDA = 30^\circ$, $AD = 2\sqrt{2}$ սմ:

326. Սեղանին արտագծված և ներգծված են շրջանագծեր: Գտե՛ք այդ շրջանագծերի շառավիղների արտադրյալը, եթե սեղանի հիմքերը 4 սմ և 16 սմ են:

327. **(Էյլերի բանաձև)** Ապացուցե՛ք, որ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի r շառավիղը, արտագծած շրջանագծի R շառավիղը և այդ շրջանագծերի կենտրոնների d հեռավորությունը կապված են $d^2 = R^2 - 2Rr$ բանաձևով:
328. Եռանկյան երկու կողմերը հարաբերում են, ինչպես $1:2\sqrt{3}$ և կազմում են 30° անկյուն: Եռանկյան երրորդ կողմը $2\sqrt{7}$ սմ է: Գտե՛ք եռանկյան անհայտ կողմերը:
329. Եռանկյան երկու կողմերը 15 դմ և 35 դմ են, իսկ հայտնի կողմերից մեծի դիմացի անկյունը 120° է: Գտե՛ք եռանկյան պարագիծը:
330. Զուգահեռագծի կողմերից մեկը 10 սմ է, իսկ անկյունագծերը՝ 20 սմ և 24 սմ: Գտե՛ք զուգահեռագծի անկյունագծերի կազմած սուր անկյան կոսինուսը և մակերեսը:
331. AD և BC հիմքերով $ABCD$ սեղանում $AD=10$ սմ, $BC=3$ սմ, $CD=4$ սմ, D անկյունը 60° է: Գտե՛ք սեղանի անկյունագծերը:
332. Եռանկյան երկու կողմերը 4 սմ և 6 սմ են: Երրորդ կողմին տարված միջնագիծը 4 սմ է: Գտե՛ք եռանկյան երրորդ կողմը:
333. Ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունները սուր անկյունների գագաթներից a և b են: Գտե՛ք ներքնաձիգը:
334. 6 սմ և 8 սմ էջերով ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած շրջանագիծը ներքնաձիգը շոշափում է M կետում: Գտե՛ք M կետի հեռավորությունը ուղիղ անկյան գագաթից:
335. Եռանկյան կողմերը 1 սմ և 2 սմ են, իսկ դրանց կազմած անկյունը 60° է: Գտե՛ք այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնով և երրորդ կողմի ծայրակետերով անցնող շրջանագծի շառավիղը:
336. Ապացուցե՛ք, որ $BD = \sqrt{AB \cdot BC - AD \cdot DC}$, որտեղ BD -ն ABC եռանկյան կիսորդն է:
337. ABC եռանկյունում $AB=12$ սմ, $AC=15$ սմ, $BC=18$ սմ: Գտե՛ք եռանկյան ամենամեծ անկյան գագաթից տարված կիսորդը:
338. Ապացուցե՛ք, որ ուղղանկյուն եռանկյան մակերեսը հավասար է ներքնաձիգի այն հատվածների արտադրյալին, որոնց բաժանվում է ներքնաձիգը եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շոշափման կետով:
339. Ապացուցե՛ք, որ տրված անկյունագծերով զուգահեռագծերից ամենամեծ մակերես ունի շեղանկյունը:



340. Ապացուցե՛ք, որ տրված անկյունագծով ուղղանկյուններից ամենամեծ մակերես ունի քառակուսին:
341. Եռանկյան կողմերն են՝ 13 սմ, 15 սմ և 14 սմ: Գտե՛ք եռանկյանը ներգծած և արտագծած շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը:
342. Զուգահեռագծի կից կողմերը $4\sqrt{2}$ դմ և 7 դմ են, իսկ սուր անկյունը՝ 45° : Գտե՛ք զուգահեռագծի անկյունագծերի հատման կետի հեռավորությունը մեծ կողմից:
343. Շրջանագծին արտագծած ABCD քառանկյունում $AB=13$ սմ, $BC=20$ սմ, $CD=17$ սմ, իսկ AC անկյունագիծը 21 սմ է: Գտե՛ք շրջանագծի շառավիղը:
344. Գտե՛ք $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=4$ վեկտորների կազմած անկյունը, եթե.
 ա) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12\sqrt{3}$, բ) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -12$, գ) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -24$, դ) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$:
345. Գտե՛ք $|\vec{a} + \vec{b}|$ -ն և $|\vec{a} - \vec{b}|$ -ն, եթե $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, իսկ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը 60° է:
346. Գտե՛ք x -ը, եթե $\vec{a}\{2; 2\sqrt{3}\}$ և $\vec{b}\{x; 2\sqrt{3}\}$ վեկտորների կազմած անկյունը 60° է:
347. Գտե՛ք x -ը, եթե $\vec{a}\{2; 2\}$ և $\vec{b}\{x; 5\}$ վեկտորների կազմած անկյունը 45° է:

Ուսումնասիրելով այս գլուխը՝

- Սովորեցիք 0° -ից 180° անկյան սինուսի, կոսինուսի, տանգենսի, կոտանգենսի սահմանումները:
- Իմացաք և կիրառեցիք բերման բանաձևերը $90^\circ \pm \alpha$, $180^\circ - \alpha$ տեսքի անկյունների համար:
- Սովորեցիք սինուսների և կոսինուսների թեորեմները, կիրառեցիք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Սովորեցիք եռանկյան, զուգահեռագծի, քառանկյան մակերեսների բանաձևերը և կիրառեցիք խնդիրներ լուծելիս:
- Սովորեցիք եռանկյան մակերեսի բանաձևը՝ արտահայտված դրան ներգծած շրջանագծի շառավղով, ինչպես նաև Հերոնի բանաձևը, կիրառեցիք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Սովորեցիք արտագծյալ բազմանկյան մակերեսի բանաձևը՝ արտահայտված դրան ներգծած շրջանագծի շառավղով, կիրառեցիք այն խնդիրներ լուծելիս:
- Իմացաք, թե ինչպես են սահմանվում վեկտորների կազմած անկյունը և վեկտորների սկալյար արտադրյալը, կիրառեցիք դրանք խնդիրներ լուծելիս:

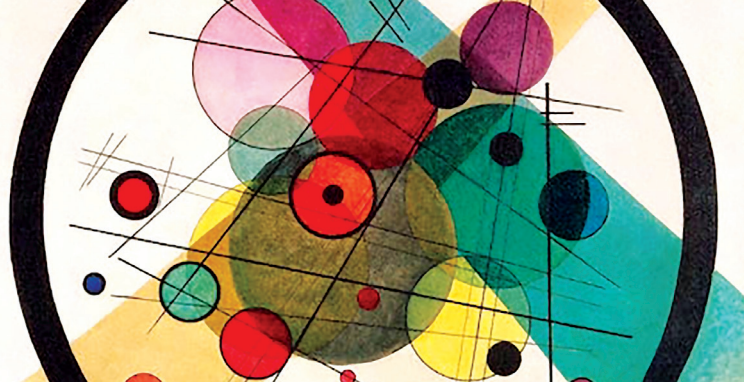


Նախագծային աշխատանք 2

ՀԵՐՈՆՑԻ ՀԱՅՏՆԱԳՈՐԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ, ՀԵՐՈՆՑԻ ՇԱՏՐՎԱՆ

Առաջարկվում են աշխատանքի հետևյալ փուլերը.

- տեղեկատվության որոնում,
 - ուսումնասիրում,
 - դասակարգում, համակարգում,
 - արդյունքների ներկայացում:
- Կատարման ժամկետը՝ 2–3 շաբաթ:



ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ: ՇՐՋԱՆԱԳԻԾ, ՇՐՋԱՆ



Ուսումնասիրելով այս գլուխը՝

- Կսովորեք կանոնավոր բազմանկյան սահմանումը, կիմանաք, որ կանոնավոր բազմանկյանը կարելի է և ներգծել, և արտագծել շրջանագիծ:
- Կսովորեք կանոնավոր բազմանկյանը ներգծած ու արտագծած շրջանագծերի շառավիղների կապն արտահայտող բանաձևը և կկիրառեք այն խնդիրներ լուծելիս:
- Կիմանաք կանոնավոր բազմանկյան մակերեսը հաշվելու բանաձևերը և կկիրառեք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Կսովորեք կանոնավոր բազմանկյան կողմի և ներգծած ու արտագծած շրջանագծերի շառավիղների կապերն արտահայտող բանաձևերը և կկիրառեք խնդիրներ լուծելիս:
- Կիմանաք շրջանագծի, աղեղի երկարությունները հաշվելու բանաձևերը և կկիրառեք խնդիրներ լուծելիս:
- Կիմանաք շրջանի, շրջանային սեկտորի և սեգմենտի մակերեսները հաշվելու բանաձևերը և կկիրառեք խնդիրներ լուծելիս:

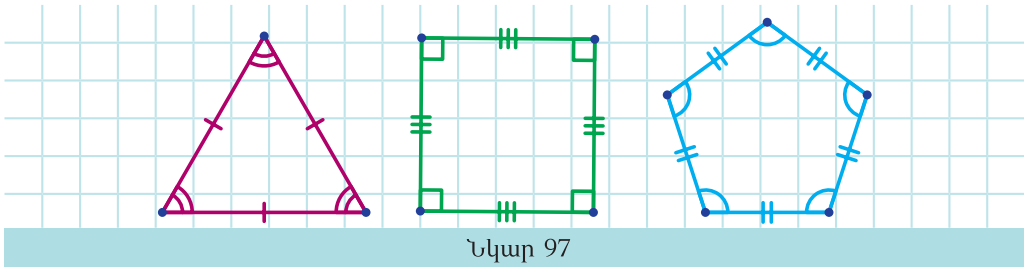
§14. Կանոնավոր բազմանկյուն

□ 32. Կանոնավոր բազմանկյուն

Ինչպես գիտեք, հավասարակողմ եռանկյան անկյունները հավասար են և հակառակը՝ եթե եռանկյան անկյունները հավասար են, ապա եռանկյունը հավասարակողմ է:

Բայց քառանկյունների (և ավելի շատ կողմեր ունեցող մյուս բազմանկյունների) դեպքում նման օրինաչափություններ տեղի չունեն: Օրինակ՝ ուղղանկյան անկյունները հավասար են, բայց կողմերը կարող են հավասար չլինել: Իսկ շեղանկյան կողմերն են հավասար, բայց անկյունները կարող են հավասար չլինել:

Սահմանում: Կանոնավոր բազմանկյուն է կոչվում այն ուռուցիկ բազմանկյունը, որի բոլոր անկյունները հավասար են և բոլոր կողմերն են հավասար (նկ. 97):



Նկար 97

Սահմանումից հետևում է, որ հավասարակողմ եռանկյունը կանոնավոր եռանկյուն է, իսկ քառանկյուններից կանոնավոր է քառակուսին:

Քանի որ ուռուցիկ n -անկյան անկյունների գումարը $(n-2) \cdot 180^\circ$ է, իսկ կանոնավոր n -անկյան անկյունները հավասար են, ապա կանոնավոր n -անկյան ամեն մի անկյունը՝ $\alpha_n = \frac{(n-2)}{n} \cdot 180^\circ$:

□ 33. Կանոնավոր բազմանկյանն արտագծված շրջանագիծը

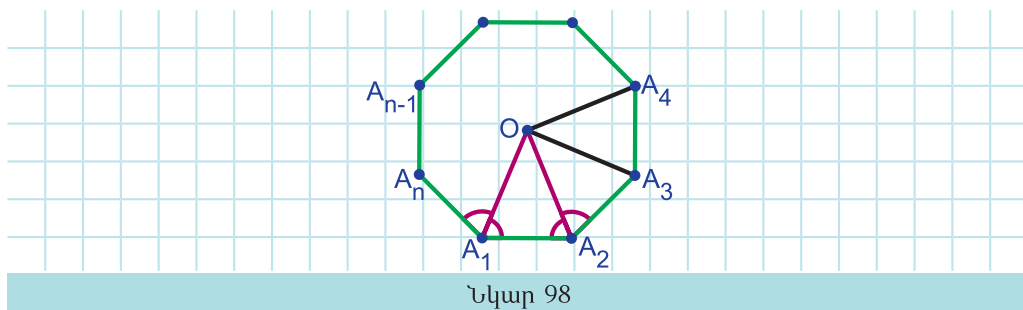
Ինչպես գիտեք, ցանկացած եռանկյան կարելի է արտագծել շրջանագիծ, այն էլ միայն մեկը: Բայց ոչ բոլոր քառանկյուններին կամ հինգանկյուններին կարելի է արտագծել շրջանագիծ: Վիճակը փոխվում է, եթե բազմանկյունը կանոնավոր է:

Թեորեմ: Ցանկացած կանոնավոր բազմանկյան կարելի է արտագծել շրջանագիծ, այն էլ միայն մեկը:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ $A_1A_2\dots A_n$ -ը կանոնավոր բազմանկյուն է, և դրա A_1 և A_2 անկյունների կիսորդները հատվում են O կետում (նկ. 98):

Քանի որ կանոնավոր բազմանկյան անկյունները հավասար են, ապա $\angle OA_1A_n = \angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \angle OA_2A_3 \equiv \alpha$: Ուրեմն OA_2A_1 եռանկյունը հավասարասրուն է՝ $OA_1 = OA_2$: Քանի որ $A_1A_2 = A_2A_3$, $OA_1 = OA_2$, $\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_3$ ապա, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի, $\triangle A_1OA_2 = \triangle A_2OA_3$:

Վերջինից հետևում է, որ $OA_3 = OA_2$, $\angle OA_3A_2 = \angle OA_2A_1 = \alpha$: Բայց $\angle A_3 = \angle A_2$, ուրեմն $\angle OA_3A_4 = \alpha$: Հիմա, ինչպես վերևում, արդեն կարելի է ցույց տալ, որ $\Delta A_2OA_3 = \Delta A_3OA_4$, որից կհետևի, որ $OA_4 = OA_3$:



Նկար 98

Հասկանալի է, որ նույն ձևով շարունակելով, կարելի է ապացուցել, որ $OA_1 = OA_2 = OA_3 = \dots = OA_n$: Ուրեմն O կետը հավասարահեռ է բազմանկյան բոլոր գագաթներից: Հետևաբար O կենտրոնով և OA_1 շառավղով շրջանագիծն անցնում է $A_1A_2\dots A_n$ բազմանկյան բոլոր գագաթներով, ինչն էլ նշանակում է, որ կանոնավոր բազմանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ:

Ապացուցենք, որ արտագծյալ շրջանագիծը միակն է: Եթե շրջանագիծն արտագծված է $A_1A_2\dots A_n$ կանոնավոր բազմանկյանը, ապա այն արտագծված է նաև $A_1A_2A_3$ եռանկյանը: Բայց եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը միակն է, ուրեմն կանոնավոր բազմանկյանն արտագծած շրջանագիծը նույնպես միակն է: Թեորեմն ապացուցված է:

□ 34. Կանոնավոր բազմանկյանը ներգծված շրջանագիծը

Դուք գիտեք, որ ցանկացած եռանկյան կարելի է ներգծել շրջանագիծ, այն էլ միայն մեկը: Բայց ավելի շատ կողմեր ունեցող բազմանկյուններից ոչ բոլորին է հնարավոր ներգծել շրջանագիծ: Վիճակն այլ է, եթե բազմանկյունը կանոնավոր է:

Թեորեմ: Ցանկացած կանոնավոր բազմանկյան կարելի է ներգծել շրջանագիծ, այն էլ միայն մեկը:

Ապացուցում: Նախորդ թեորեմն ապացուցելիս մենք տեսանք, որ եթե $A_1A_2\dots A_n$ կանոնավոր բազմանկյան A_1 և A_2 անկյունների կիսորդների հատման O կետը (նկ. 98) միացնենք բազմանկյան մյուս գագաթներին, ապա այդ գագաթների անկյունները նույնպես կիսվում են:

Դա նշանակում է, որ կանոնավոր բազմանկյան բոլոր անկյունների կիսորդները հատվում են O կետում: Հետևաբար O -ն հավասարահեռ է բազմանկյան բոլոր կողմերից: Ուրեմն O կենտրոնով և O -ից բազմանկյան որևէ կողմին տարված ուղղահայացին հավասար շառավղով շրջանագիծը կշոշափի բազմանկյան բոլոր կողմերը, այսինքն՝ ներգծված կլինի բազմանկյանը:

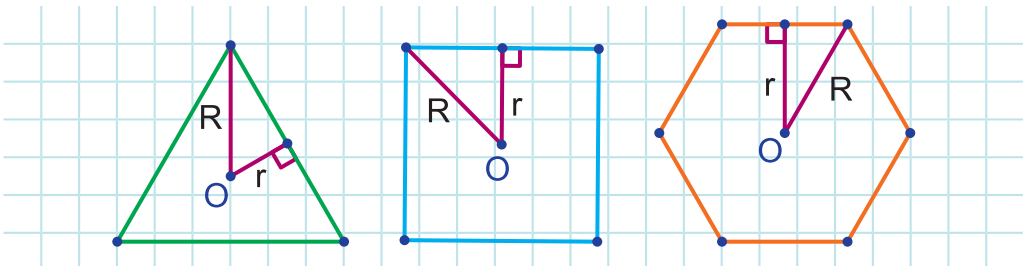
Նկատենք նաև, որ O կետից բազմանկյան որևէ կողմին տարված ուղղահայացի հիմքը այդ կողմի միջնակետն է: Իրոք, քանի որ $OA_1 = OA_2 = \dots = OA_n$ (նկ. 98), ապա, որպես հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարված բարձրություն, այդ ուղղահայացը նաև միջնագիծ է:

Կանոնավոր բազմանկյանը ներգծած շրջանագծի միակությունն ապացուցե՞ք ինքնուրույն (հիշե՛ք՝ ինչպես է ապացուցվել եռանկյանը ներգծված շրջանագծի միակությունը): Թեորեմն ապացուցված է:

Վերջին երկու թեորեմներն ապացուցելիս մենք տեսանք, որ կանոնավոր բազմանկյան կիսորդները հատվում են մի կետում և այդ կետը և՛ արտագծած, և՛ ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է:

Ուրեմն.

Հետևանք 1: Կանոնավոր բազմանկյանը ներգծած և արտագծած շրջանագծերի կենտրոնները համընկնում են (նկ. 99):

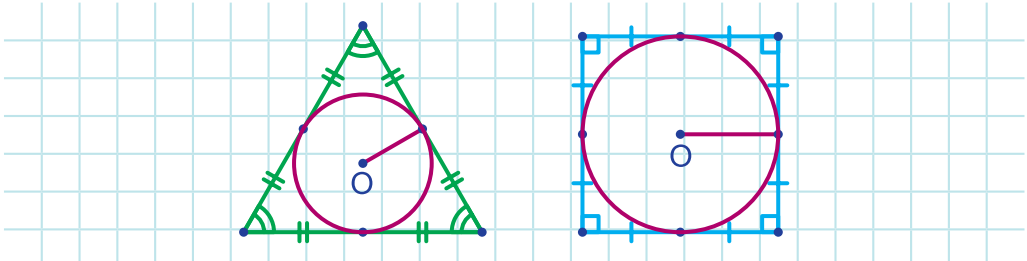


Նկար 99

Սահմանում: Կանոնավոր բազմանկյան կենտրոն է կոչվում դրան արտագծած կամ ներգծած շրջանագծի կենտրոնը:

Ինչպես տեսանք կանոնավոր բազմանկյանը ներգծած շրջանագծի մասին թեորեմն ապացուցելիս՝ ներգծված շրջանագծի շառավղիը O կետից որևէ կողմին տարված ուղղահայացն է, որի հիմքը այդ կողմի միջնակետն է: Ուրեմն.

Հետևանք 2: Կանոնավոր բազմանկյանը ներգծած շրջանագիծը բազմանկյան կողմերը շոշափում է դրանց միջնակետերում (նկ. 100):



Նկար 100



Դինամիկ մաթեմատիկա

Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով ստեղծեք բնական արժեքներ ընդունող սողնակ ($3 \leq n \leq 10$): «Կանոնավոր բազմանկյուն» գործիքով կառուցեք կանոնավոր n -անկյուն: Տարեք հարևան երկու անկյունների կիսորդները: Դրանց հատման կետն ընդունելով որպես կենտրոն՝ կառուցեք որևէ գազաթով անցնող շրջանագիծ: Սողնակով փոխեք n -ի արժեքը: Արեք եզրակացություն:

Կիսորդների հատման կետն ընդունելով որպես կենտրոն՝ կառուցեք բազմանկյան որևէ կողմի միջնակետով անցնող շրջանագիծ: Սողնակով փոխեք n -ի արժեքը: Արեք եզրակացություն:



Հարցեր և խնդիրներ

- 348.** Բազմանկյան կողմերը հավասար են: Կարելի է պնդել, որ այն կանոնավոր բազմանկյուն է: Պատասխանը հիմնավորեք:
- 349.** Բազմանկյան անկյունները հավասար են: Կարելի է պնդել, որ այն կանոնավոր բազմանկյուն է: Պատասխանը հիմնավորեք:
- 350.** Նշված քառանկյուններից ի՞նչ է կանոնավոր բազմանկյուն.
ա) ուղղանկյուն, բ) շեղանկյուն, գ) քառակուսի:
- 351.** Գտեք կանոնավոր վեցանկյան անկյունները:

352. Քանի՞ կողմ ունի կանոնավոր բազմանկյունը, եթե դրա ներքին անկյունները 150° են:
353. Քանի՞ կողմ ունի կանոնավոր բազմանկյունը, եթե դրա արտաքին անկյունները 20° են:
354. Կանոնավոր բազմանկյան երկու անկյունների գումարը 324° է, իսկ պարագիծը՝ 280 սմ: Գտե՛ք այդ բազմանկյան կողմը:
355. Գտե՛ք $A_1A_2\dots A_8$ կանոնավոր 8-անկյան A_3A_4 և A_6A_7 կողմերը պարունակող ուղիղների կազմած անկյունը:
356. Գտե՛ք 6 դմ կողմով ABCDEF կանոնավոր վեցանկյան AC անկյունագիծը:
357. Գտե՛ք $A_1A_2A_3\dots A_{12}$ կանոնավոր 12-անկյան A_2 , A_7 գագաթներով անցնող ուղղի և A_1A_{12} կողմը պարունակող ուղիղների կազմած անկյունը:
358. Ցանկացած կանոնավոր բազմանկյան հնարավոր է արտագծել շրջանագիծ: Իսկ ներգծել:
359. Կարո՞ղ են կանոնավոր բազմանկյանը ներգծած և արտագծած շրջանագծի կենտրոնները չհամընկնել:
360. $A_1A_2A_3\dots A_n$ կանոնավոր n -անկյանն արտագծած շրջանագծի O կենտրոնը միացրել են A_1A_n կողմի M միջնակետին: Գտե՛ք A_1MO անկյունը:
361. $A_1A_2A_3\dots A_7$ կանոնավոր յոթանկյանը ներգծած շրջանագիծը A_2A_3 կողմը շոշափում է K կենտույն: Գտե՛ք բազմանկյան պարագիծը, եթե $A_2K = 5$ սմ:
362. Շրջանագիծն անցնում է $A_1A_2A_3\dots A_n$ կանոնավոր n -անկյան A_1 , A_2 , A_3 գագաթներով: Կարո՞ղ է n -անկյան որևէ գագաթ չպատկանել այդ շրջանագծին: Պատասխանը հիմնավորե՛ք:
363. Շրջանագիծը շոշափում է $A_1A_2A_3\dots A_n$ կանոնավոր n -անկյան A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 կողմերը: Կարո՞ղ է n -անկյան որևէ կողմ չշոշափել այդ շրջանագիծը: Պատասխանը հիմնավորե՛ք:
364. Գտե՛ք կանոնավոր n -անկյան կենտրոնը դրա երկու հարևան գագաթներին միացնող ուղիղների կազմած անկյունը:
365. Ապացուցե՛ք, որ կանոնավոր վեցանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը հավասար է դրա կողմին:
366. $A_1A_2A_3\dots A_n$ կանոնավոր n -անկյան արտաքին անկյունը 60° է, իսկ պարագիծը՝ 72 սմ: Գտե՛ք A_1OA_2 եռանկյան մակերեսը, որտեղ O -ն բազմանկյան կենտրոնն է:

367. Ապացուցե՛ք, որ a կողմով կանոնավոր քառանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը՝ $R = \frac{\sqrt{2}}{2} a$:
368. Գտե՛ք $A_4 A_1 A_5$ անկյունը, որտեղ A_1, A_4, A_5 կետերը $A_1 A_2 \dots A_8$ կանոնավոր 8-անկյան գագաթներն են:
369. Ապացուցե՛ք, որ AD -ն $ABCDEF$ կանոնավոր վեցանկյանն արտագծած շրջանագծի տրամագիծն է:
370. Գտե՛ք $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ կանոնավոր n -անկյան O կենտրոնը դրա A_1 գագաթին և $A_1 A_2$ կողմի միջնակետին միացնող ուղիղների կազմած անկյունը:
371. Ապացուցե՛ք, որ կանոնավոր եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը երկու անգամ մեծ է այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղից:
372. Գտե՛ք $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ կանոնավոր n -անկյան պարագիծը, եթե դրան արտագծած և ներգծած շրջանագծերի շառավիղները համապատասխանաբար 10 սմ և $5\sqrt{3}$ սմ են:

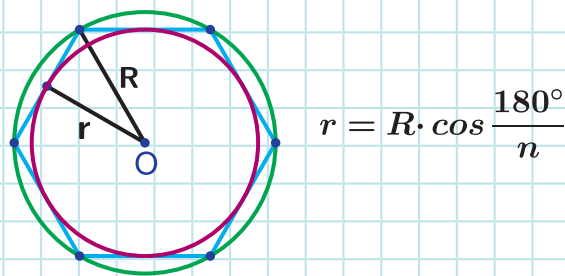
§15. Կանոնավոր բազմանկյանն արտագծած և ներգծած շրջանագծերի շառավիղները

□ 35. Կանոնավոր բազմանկյանն արտագծած և ներգծած շրջանագծերի շառավիղների կապը

Դուք արդեն ապացուցել եք, որ կանոնավոր եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը երկու անգամ մեծ է այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղից (խնդիր 371):

Հիմա կներկայացնենք կանոնավոր n -անկյանն արտագծած և ներգծած շրջանագծերի շառավիղները կապող մի բանաձև:

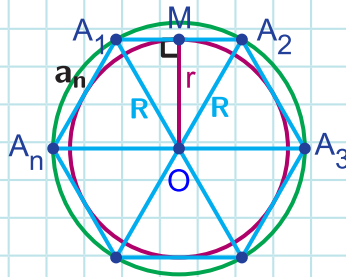
Թեորեմ: Կանոնավոր n -անկյանն արտագծած և ներգծած շրջանագծերի շառավիղները կապված են հետևյալ բանաձևով. $r = R \cdot \cos \frac{180^\circ}{n}$ (նկ. 101):



Նկար 101

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ $A_1A_2A_3...A_n$ կանոնավոր n -անկյան արտագծած և ներգծած շրջանագծերի շառավիղները համապատասխանաբար R և r են: Ցույց տանք, որ $r = R \cdot \cos \frac{180^\circ}{n}$:

Միացնենք կանոնավոր n -անկյան O կենտրոնը բազմանկյան բոլոր գագաթներին և A_1A_2 կողմի M միջնակետին (նկ. 102):



Նկար 102

Առաջացած n եռանկյունները՝ A_1OA_2 , A_2OA_3 , ..., $A_{n-1}OA_n$ հավասար են ըստ եռանկյունների հավասարության III հայտանիշի: Հետևաբար այդ եռանկյունների O գագաթների անկյունները հավասար են, և դրանցից ամեն մեկը հավասար է $\frac{360^\circ}{n}$:

Քանի որ A_1OA_2 եռանկյունը հավասարասրուն է, իսկ OM -ը դրա հիմքին տարված միջնագիծն է, ապա այն նաև կիսորդ է ու բարձրություն: Ուրեմն $\angle MOA_2$ եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է, ընդ որում՝

$$MA_1 = \frac{a_n}{2}, \quad \angle MOA_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n}:$$

Ըստ ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյան կոսինուսի սահմանման՝

$\frac{r}{R} = \cos \frac{180^\circ}{n}$: Հետևաբար $r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմից մասնավորապես հետևում է, որ.

$$r = \frac{R}{2}, (n=3) \text{ (կանոնավոր եռանկյան),}$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2} R, (n=4) \text{ (քառակուսու),}$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} R, (n=6) \text{ (կանոնավոր վեցանկյան):}$$

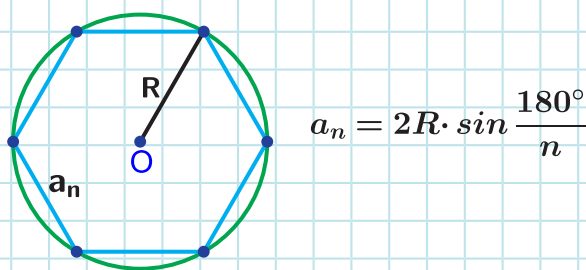
□ 36. Կանոնավոր բազմանկյան կողմի և արտագծած, ներգծած շրջանագծերի շառավիղների կապը

Որոշակի տվյալների առկայության դեպքում Դուք կարողանում եք գտնել եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը: Քանի որ մի ուղղի չպատկանող երեք կետով անցնող շրջանագիծը միակն է, ապա այդ նույն բանաձևերով կարողանում եք գտնել նաև ավելի շատ կողմեր ունեցող արտագծելի բազմանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:

Դուք կարողանում եք գտնել եռանկյանը, ներգծելի բազմանկյանը ներգծած շրջանագծերի շառավիղները:

Հիմա ներկայացնենք կանոնավոր n -անկյան կողմը և դրան արտագծած շրջանագծի շառավիղը կապող մի բանաձև:

Թեորեմ: Կանոնավոր n -անկյան կողմը՝ $a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$, որտեղ R -ը դրան արտագծած շրջանագծի շառավիղն է (նկ. 103):



Նկար 103

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ $A_1A_2A_3...A_n$ կանոնավոր n -անկյան կողմը a_n է, իսկ արտագծած շրջանագծի շառավիղը՝ R : Ցույց տանք, որ $a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$:

Նախորդ կետի թեորեմն ապացուցելիս մենք տեսանք, որ $\angle MOA_1$ եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է, ընդ որում՝ $OA_1 = R$, $MA_1 = \frac{a_n}{2}$, $\angle MOA_1 = \frac{180^\circ}{n}$ (նկ. 102):

Ըստ ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյան սինուսի սահմանման՝ $\frac{\frac{a_n}{2}}{R} = \sin \frac{180^\circ}{n}$: Որտեղից՝ $a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմից մասնավորապես հետևում է, որ.

$$a_3 = \sqrt{3}R, (n=3) \text{ (կանոնավոր եռանկյան),}$$

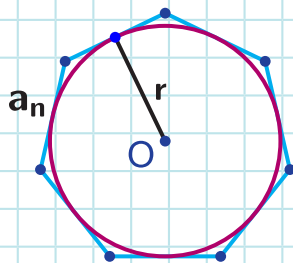
$$a_4 = \sqrt{2}R, (n=4) \text{ (քառակուսու),}$$

$$a_6 = R, (n=6) \text{ (կանոնավոր վեցանկյան):}$$

Ներկայացնենք նաև կանոնավոր n -անկյան կողմը և դրան ներգծած շրջանագծի շառավիղը կապող մի բանաձև:

Թեորեմ: Կանոնավոր n -անկյան կողմը՝ $a_n = 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$, որտեղ r -ը դրան ներգծած շրջանագծի շառավիղն է (նկ. 104):

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ $A_1A_2A_3...A_n$ կանոնավոր n -անկյան կողմը a_n է, իսկ ներգծած և արտագծած շրջանագծերի շառավիղները՝ համապատասխանաբար r և R : Ցույց տանք, որ $a_n = 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$:



$$a_n = 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$

Վերևում ապացուցվեց, որ $a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$, իսկ նախորդ կետում՝
 որ $r = R \cdot \cos \frac{180^\circ}{n}$: Երկրորդ առնչությունից R -ն արտահայտենք r -ով՝
 $R = \frac{r}{\cos \frac{180^\circ}{n}}$: Ստացվածը տեղադրելով առաջինի մեջ՝ կունենանք.
 $a_n = 2 \cdot \frac{r}{\cos \frac{180^\circ}{n}} \cdot \sin \frac{180^\circ}{n} = 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$: Թեորեմն ապացուցված է:
 Թեորեմից մասնավորապես հետևում է, որ.

$$a_3 = 2\sqrt{3}r, (n=3) \text{ (կանոնավոր եռանկյան),}$$

$$a_4 = 2r, (n=4) \text{ (քառակուսու),}$$

$$a_6 = \frac{2\sqrt{3}r}{3}, (n=6) \text{ (կանոնավոր վեցանկյան):}$$



Ինտերակտիվ մոդել

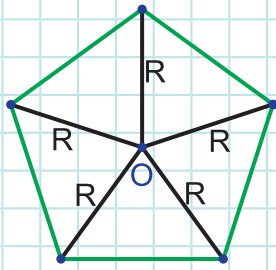
Կանոնավոր բազմանկյուններ

□ 37. Կանոնավոր բազմանկյան մակերեսը

Այս կետում կապացուցենք երկու բանաձև, որոնք հնարավորություն են տալիս գտնելու կանոնավոր n -անկյան մակերեսը, եթե հայտնի է դրան արտագծած կամ ներգծած շրջանագծի շառավիղը:

Թեորեմ: Կանոնավոր n -անկյան մակերեսը՝ $S = n \cdot \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}$,

որտեղ R -ը արտագծած շրջանագծի շառավիղն է (նկ. 105):



$$S = n \cdot \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}$$

Նկար 105

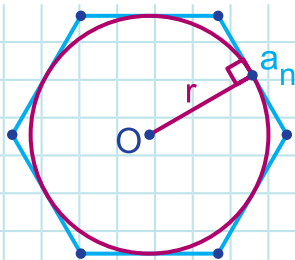
Ապացուցում: Ենթադրենք՝ $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ կանոնավոր n -անկյան արտագծած շրջանագծի շառավիղը R է: Ցույց տանք, որ դրա մակերեսը՝

$$S = n \cdot \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}:$$

Միացնենք կանոնավոր n -անկյան O կենտրոնը բազմանկյան բոլոր գագաթներին (նկ. 105): Կառաջանան n եռանկյունները, որոնք հավասար են՝ ըստ եռանկյունների հավասարության III հայտանիշի: Հետևաբար այդ եռանկյունների O գագաթների անկյունները հավասար են, և դրանցից ամեն մեկը հավասար է $\frac{360^\circ}{n}$:

Դրանցից ամեն մեկի մակերեսը, ըստ եռանկյան մակերեսի $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ բանաձևի, հավասար է $\frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$: Քանի որ n -անկյունը տրոհվել է այդպիսի n եռանկյունների, ապա դրա մակերեսը՝ $S = n \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$: Թերեմն ապացուցված է:

Թերեմ: Կանոնավոր n -անկյան մակերեսը՝ $S = nr^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$, որտեղ r -ը ներգծած շրջանագծի շառավիղն է (նկ. 106):



$$S = nr^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{360^\circ}{n}$$

Նկար 106

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ $A_1A_2A_3...A_n$ կանոնավոր n -անկյան կողմը a_n է, իսկ ներգծած շրջանագծի շառավիղը՝ r : Ցույց տանք, որ դրա մակերեսը՝ $S = nr^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$:

Ինչպես գիտեք, արտագծյալ բազմանկյան մակերեսը՝ $S = p \cdot r$, որտեղ p -ն բազմանկյան կիսապարագիծն է, իսկ r -ը՝ ներգծած շրջանագծի շառավիղը: Ուրեմն n -անկյան մակերեսը՝ $S = \frac{n \cdot a_n}{2} r$: Այս բանաձևում a_n -ը փոխարինելով կետ 36-ի երկրորդ թեորեմի բանաձևի աջ մասով՝ կունենանք. $S = \frac{n \cdot a_n}{2} r = \frac{nr}{2} 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} = nr^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$: Թեորեմն ապացուցված է:



Հարցեր և խնդիրներ

- 373.** Գտե՛ք կանոնավոր վեցանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը, եթե դրան արտագծած շրջանագծի շառավիղը $8\sqrt{3}$ դմ է:
- 374.** Քառակուսուն արտագծած շրջանագծի շառավիղը 10 սմ է: Գտե՛ք այդ քառակուսուն ներգծած շրջանագծի շառավիղը:
- 375.** Ապացուցե՛ք, որ հավասարակողմ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը հավասար է դրան արտագծած շրջանագծի շառավիղի կեսին:
- 376.** Քանի՞ կողմ ունի կանոնավոր բազմանկյունը, եթե դրան արտագծած շրջանագծի շառավիղը $18\sqrt{2}$ սմ է, իսկ ներգծած շրջանագծի շառավիղը՝ 18 սմ:
- 377.** Քանի՞ կողմ ունի կանոնավոր բազմանկյունը, եթե դրան ներգծած և արտագծած շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությունը $\frac{\sqrt{3}}{2}$ է:
- 378.** Կարո՞ղ է նույն կանոնավոր բազմանկյանն արտագծած և ներգծած շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությունը լինել 3:
- 379.** Կարո՞ղ է նույն կանոնավոր բազմանկյանը ներգծած և արտագծած շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությունը մեծ լինել 0,999-ից:
- 380.** Գտե՛ք հավասարակողմ եռանկյան կողմը, եթե դրան արտագծած շրջանագծի շառավիղը 14 սմ է:

- 381.** Գտե՛ք 8 դմ կողմով քառակուսուն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:
- 382.** Գտե՛ք կանոնավոր վեցանկյան պարագիծը, եթե դրան արտագծած շրջանագծի շառավիղը 9 սմ է:
- 383.** Գտե՛ք 18 սմ կողմով հավասարակողմ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը:
- 384.** Գտե՛ք 10 դմ կողմով քառակուսուն ներգծած շրջանագծի շառավիղը:
- 385.** Գտե՛ք կանոնավոր վեցանկյան պարագիծը, եթե դրան ներգծած շրջանագծի շառավիղը $6\sqrt{3}$ սմ է:
- 386.** Գտե՛ք կանոնավոր բազմանկյան պարագիծը, եթե դրա կողմը 24 սմ է, իսկ արտագծած շրջանագծի շառավիղը՝ $12\sqrt{2}$ սմ:
- 387.** Գտե՛ք շրջանագծին արտագծած և ներգծած քառակուսիների կողմերի հարաբերությունը:
- 388.** Շրջանագծին ներգծված է հավասարակողմ եռանկյուն, այդ եռանկյանը՝ շրջանագիծ: Երկրորդ շրջանագծին ներգծված է քառակուսի, իսկ քառակուսուն՝ երրորդ շրջանագիծը: Գտե՛ք առաջին և երրորդ շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությունը:
- 389.** Քառակուսու կողմը հավասար է հավասարակողմ եռանկյան կողմին: Գտե՛ք դրանց ներգծած շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությունը:
- 390.** Կանոնավոր վեցանկյան կողմը հավասար է հավասարակողմ եռանկյան կողմին: Գտե՛ք դրանց արտագծած շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությունը:
- 391.** Շրջանագծին ներգծած կանոնավոր եռանկյան մակերեսը S է: Գտե՛ք այդ շրջանագծին արտագծած քառակուսու մակերեսը:
- 392.** Գտե՛ք կանոնավոր ութանկյան մակերեսը, եթե դրան արտագծած շրջանագծի շառավիղը 6 սմ է:
- 393.** Գտե՛ք կանոնավոր վեցանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը, եթե դրա մակերեսը $24\sqrt{3}$ սմ² է:
- 394.** Գտե՛ք կանոնավոր վեցանկյան մակերեսը, եթե դրան ներգծած շրջանագծի շառավիղը 5 սմ է:
- 395.** Գտե՛ք շրջանագծին արտագծած և ներգծած հավասարակողմ եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:
- 396.** Շրջանագծին ներգծած կանոնավոր վեցանկյան մակերեսը S է: Գտե՛ք այդ շրջանագծին արտագծած կանոնավոր վեցանկյան մակերեսը:

397. Գտն՞ք կանոնավոր ութանկյան պարագիծը, եթե դրա մակերեսը $32\sqrt{2}$ սմ² է:
398. Շրջանագծին արտագծած է կանոնավոր վեցանկյուն և ներգծած է կանոնավոր հնգանկյուն: Գտն՞ք այդ բազմանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:

§16. Շրջանագիծ և շրջան

□ 38. Շրջանագծի երկարությունը, աղեղի երկարությունը

Խնդիրներ, գործնական տարբեր հարցեր լուծելիս հաճախ պետք է լինում գտնել շրջանագծի երկարությունը: Հատվածի երկարությունը գտնելու համար, ինչպես գիտեք, պետք է պարզել, թե չափման միավոր ընտրված հատվածը և դրա մասերը քանի անգամ են տեղավորվում այդ հատվածում:

Բայց ակնհայտ է, որ չափման միավոր ընտրված հատվածը կամ դրա մասը և շրջանագծի որևէ մաս (աղեղ) չեն կարող վերադարձվել այնպես, որ դրանք համընկնեն:

Մյուս կողմից, եթե պատկերացնենք, որ շրջանագիծը հաստություն չունեցող և չձգվող թել է, ապա պարզ է, որ դրա երկարությունը հավասար է այն հատվածի երկարությանը, որը կստացվի, եթե շրջանագիծը մի կետում կտրենք և ուղղենք:

Որպես շրջանագծի երկարության մոտավոր արժեք ընդունում են դրան ներգծված կանոնավոր n -անկյան պարագիծը:

Պարզվում է, որ ինչքան մեծ է n -ը, այնքան ավելի ճշգրիտ է այդ մոտարկումը: Կարելի է համոզվել, որ n -ի մեծացմանը զուգընթաց՝ 1) ներգծված կանոնավոր n -անկյան կողմերն ավելի քիչ են տարբերվում շրջանագծի աղեղներից, 2) այդ բազմանկյան պարագիծն աճում է, 3) և այդ աճը գնալով դանդաղում է (դրանցում համոզվել Ձեզ կօգնի ինտերակտիվ մոդելը, որի QR կոդը տեղադրված է այստեղ):



Ուրեմն n -ի անսահմանափակ մեծացման դեպքում կանոնավոր n -անկյան պարագիծը ինչքան ասեք քիչ կտարբերվի շրջանագծի երկարությունից: Դա նշանակում է, որ ինչքան փոքր դրական թիվ էլ տրված լինի (օրինակ, 10^{-6} , 10^{-10}), հնարավոր է n -ը մեծացնել այնքան,

որ շրջանագծի երկարության և դրան ներգծված կանոնավոր n -անկյան պարագծի տարբերությունը փոքր լինի այդ թվից (օրինակ, 10^{-10} սմ-ից):

Ցույց տանք, որ շրջանագծի երկարության և դրա տրամագծի երկարության հարաբերությունը հաստատուն է:

Դիտարկենք R և R' շառավիղներով երկու շրջանագիծ և համապատասխանաբար դրանց ներգծված a_n և a'_n կողմերով կանոնավոր բազմանկյուններ: Շրջանագծերի երկարությունները նշանակենք C -ով և C' -ով, իսկ կանոնավոր բազմանկյունների պարագծերը՝ P_n -ով և P'_n -ով: Ըստ կետ 36-ի առաջին բանաձևի.

$$P_n = n \cdot a_n = 2nR \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad P'_n = n \cdot a'_n = 2nR' \sin \frac{180^\circ}{n}:$$

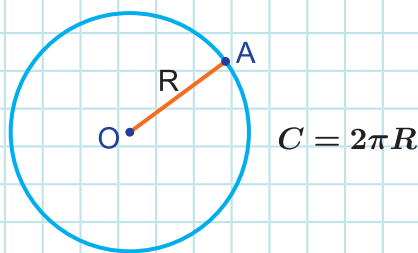
$$\text{Հետևաբար } \frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}:$$

Ստացվածը ճիշտ է n -ի ցանկացած ($n \geq 3$) բնական արժեքի համար: Բացի դրանից, n -ի անսահմանափակ աճի դեպքում P_n -ը և P'_n -ը համապատասխանաբար ինչքան ասեք քիչ են տարբերվում C -ից և C' -ից:

Հետևաբար, n -ի անսահմանափակ աճի դեպքում, $\frac{P_n}{P'_n}$ -ը ինչքան ասեք քիչ է տարբերվում $\frac{C}{C'}$ -ից: Ուրեմն $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$ կամ $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}:$

Հաստատունը, որին հավասար է շրջանագծի երկարության և դրա տրամագծի հարաբերությունը, նշանակում են π տառով (կարդացվում է՝ պի, հունարեն պարագիծ բառի՝ περιμετρος-ի առաջին տառը): Ուրեմն $\frac{C}{2R} = \pi$ կամ $C = 2\pi R$: Այսպիսով.

Թեորեմ: R շառավիղով շրջանագծի երկարությունը՝ $C = 2\pi R$ (նկ. 107):



Նկար 107

Պարզվում է π -ն իռացիոնալ թիվ է, այսինքն՝ չի ներկայացվում սովորական կոտորակով: Հին հույն գիտնական Արքիմեդը, կառուցելով շրջանագծին ներգծած և արտագծած կանոնավոր 96-անկյուններ, π թվի համար ստացել է հետևյալ գնահատականը՝ $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$: Դրանից ել-

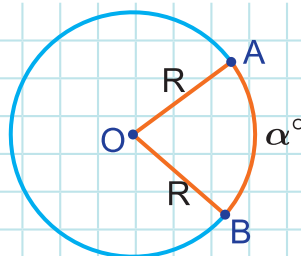


նելով՝ նա առաջարկել է որպես π թվի մոտավոր արժեք ընդունել $\frac{22}{7}$ կոտորակը (Արքիմեդի թիվ, $\frac{22}{7} \approx 3,14$):

Շրջանագծի երկարության և դրա տրամագծի հարաբերությունը π -ով նշանակելը լայն կիրառություն է ստացել XVIII դարից՝ Լեոնարդո Էյլերի առաջարկով: Էյլերը, կիրառելով բարձրագույն մաթեմատիկայի մեթոդներ, ստացել է π թվի 153 ճշգրիտ նիշով մոտավորությունը: 2022 թվականին Google-ի թիմը հաշվարկել է π թվի առաջին 100 տրիլիոն նիշերը ստորակետից հետո:

Շրջանագծի երկարության բանաձևն օգտագործելով՝ ստանանք բանաձև շրջանագծի α աստիճանային չափով աղեղի երկարությունը գտնելու համար:

Թեորեմ: R շառավղով շրջանագծի α° աղեղի երկարությունը՝ $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$ (նկ. 108):



Նկար 108

Ապացուցում: Քանի որ R շառավղով շրջանագծի 360° աղեղի, այսինքն՝ շրջանագծի երկարությունը $2\pi R$ է, ապա 1° աղեղի երկարությունը կլինի $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$, իսկ α° աղեղի երկարությունը՝ l -ը կլինի $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$: Թեորեմն ապացուցված է:

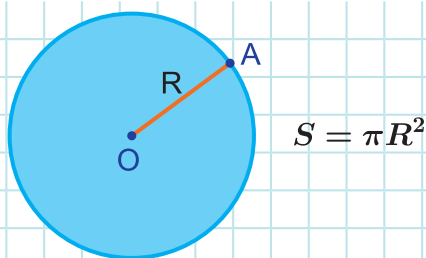


Ինտերակտիվ մոդել

π թիվը

□ 39. Շրջանի մակերեսը, շրջանային սեկտորի և սեգմենտի մակերեսները

Թեորեմ: R շառավղով շրջանի մակերեսը՝ $S = \pi R^2$ (նկ. 109):

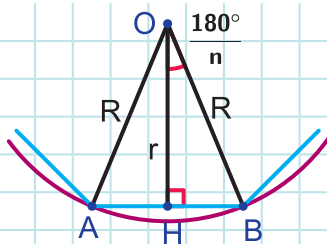


Նկար 109

Ապացուցում: Դիտարկենք R շառավղով շրջան և դրան ներգծած կանոնավոր n -անկյուն: Ինչպես տեսանք՝ նախորդ կետում՝ n -ը մեծացնելիս կանոնավոր n -անկյան կողմերը ավելի ու ավելի քիչ են տարբերվում շրջանագծի աղեղներից:

Այդ պատճառով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյան S_n մակերեսը ավելի ու ավելի քիչ է տարբերվում շրջանագծով եզերված շրջանի S մակերեսից: Ուրեմն, n -ի անսահմանափակ մեծացման դեպքում, S_n -ը ինչքան ասեք քիչ կտարբերվի S -ից:

Նկար 110-ում պատկերված է O կենտրոնով և R շառավղով շրջանագծի ու դրան ներգծված կանոնավոր n -անկյան մի մասը: O կետը միացված է բազմանկյան A և B գագաթներին ու AB կողմի H միջնակետին:



Նկար 110

Այդ դեպքում OH -ը կանոնավոր n -անկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղ է, իսկ $\angle HOB = \frac{180^\circ}{n}$: Հիշենք, որ $OH = r = R \cdot \cos \frac{180^\circ}{n}$: Հետևաբար $S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OH = \frac{1}{2} a_n R \cos \frac{180^\circ}{n}$, որտեղ a_n -ը կանոնավոր n -անկյան կողմն է:

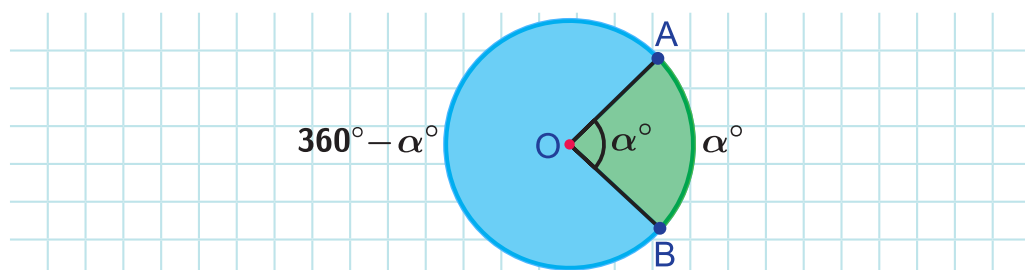
Քանի որ շրջանագծի՝ կանոնավոր n -անկյան գագաթներին միացված շառավիղները n -անկյունը տրոհում են իրար հավասար n եռանկյունների, ապա կանոնավոր n -անկյան S_n մակերեսի համար կունենանք.

$S_n = n \cdot S_{AOB} = \frac{1}{2} n \cdot a_n \cdot R \cos \frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2} P_n \cdot R \cos \frac{180^\circ}{n}$, որտեղ P_n -ը կանոնավոր n -անկյան պարագիծն է:

n -ի անսահմանափակ մեծացման դեպքում $\frac{180^\circ}{n}$ -ը ինչքան ասեք քիչ կտարբերվի 0 -ից, իսկ $\cos \frac{180^\circ}{n}$ -ը՝ 1 -ից: Ինչքան ասեք քիչ կտարբերվեն նաև P_n -ն ու շրջանագծի C երկարությունը, S_n -ն ու շրջանի S մակերեսը: Այս ամենը հաշվի առնելով՝ շրջանի S մակերեսի համար կունենանք.

$S = \frac{1}{2} C \cdot R$: Իսկ քանի որ $C = 2\pi R$, ապա $S = \pi R^2$: Թեորեմն ապացուցված է:

Անցնենք շրջանային սեկտոր և սեգմենտ հասկացությունների սահմանումներին: Նկար 111-ում OA և OB շառավիղները շրջանը բաժանել են երկու մասի, որոնք ներկված են տարբեր գույներով:



Նկար 111

Սահմանում: Շրջանի այն մասը, որը սահմանափակված է աղեղով և աղեղի ծայրակետերը շրջանի կենտրոնին միացնող երկու շառավիղներով, կոչվում է շրջանային սեկտոր կամ սեկտոր (նկ. 111):

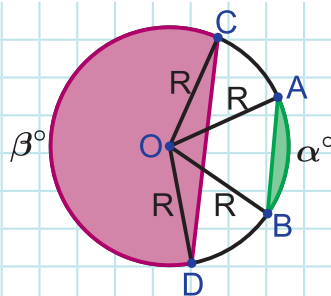
Նկար 111-ում կանաչ սեկտորի աղեղը α° է, կապույտ սեկտորի աղեղը՝ $360^\circ - \alpha^\circ$:

Թեորեմ: R շառավղով շրջանի α° աղեղով սեկտորի մակերեսը՝ $S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$ (նկ. 111):

Ապացուցում: Քանի որ R շառավղով շրջանի մակերեսը πR^2 է, ապա 1° աղեղով սեկտորի մակերեսը կլինի $\frac{\pi R^2}{360}$, իսկ α° աղեղով սեկտորի մակերեսը՝ S-ը կլինի $S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$: Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում: Շրջանի այն մասը, որը սահմանափակված է աղեղով և աղեղի ծայրակետերը միացնող լարով, կոչվում է շրջանային սեգմենտ կամ սեգմենտ (նկ. 112):

Նկար 112-ում կանաչ սեգմենտի աղեղը α° է, ընդ որում՝ $\alpha^\circ < 180^\circ$, մանուշակագույն սեգմենտի աղեղը β° է, ընդ որում՝ $\beta^\circ > 180^\circ$:



Նկար 112

Առաջին դեպքում (կանաչ) սեգմենտի մակերեսը հավասար է նույն աղեղով սեկտորի և AOB եռանկյան մակերեսների տարբերությանը՝

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha - S_{AOB}, \text{ որտեղ } R\text{-ը շրջանի շառավիղն է:}$$

Երկրորդ դեպքում (մանուշակագույն) սեգմենտի մակերեսը հավասար է նույն աղեղով սեկտորի և COD եռանկյան մակերեսների գումարին՝

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \beta + S_{COD}, \text{ որտեղ } R\text{-ը շրջանի շառավիղն է:}$$

Եթե սեգմենտի աղեղի աստիճանային չափը 180° է, ապա այն կիսաշրջան է, որի մակերեսը՝ $S = \frac{\pi R^2}{2}$, որտեղ R -ը շրջանի շառավիղն է:

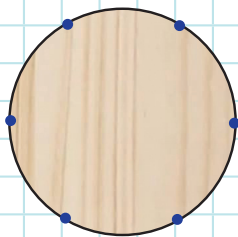


Ինտերակտիվ մոդել
Սեկտոր և սեգմենտ

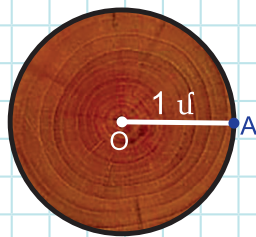


Հարցեր և խնդիրներ

- 399.** Գտե՛ք 13 սմ շառավղով շրջանագծի երկարությունը:
- 400.** Գտե՛ք 10π սմ երկարությամբ շրջանագծի շառավիղը:
- 401.** Գտե՛ք 15 սմ շառավղով 36° աղեղի երկարությունը:
- 402.** Գտե՛ք 18 դմ շառավղով շրջանագծի 120° աղեղի երկարությունը:
- 403.** Գտե՛ք շրջանագծի շառավիղը, եթե դրա 45° աղեղի երկարությունը 19 սմ է:
- 404.** Վարպետը ի՞նչ շառավղով շրջանաձև սեղան պիտի պատրաստի, որ դրա շուրջը նստող 6 մարդուց ամեն մեկին՝ սեղանի շրջանագծի աղեղով բաժին հասնի 80 սմ (նկ. 113):



Նկար 113



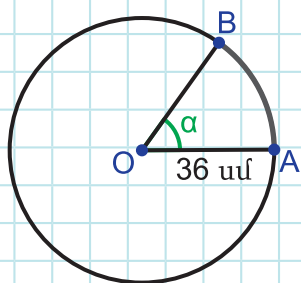
Նկար 114

- 405.** Ամենաշատը քանի՞ մարդ կարող է նստել 1 մ շառավղով շրջանաձև սեղանի շուրջը, եթե նրանցից ամեն մեկին՝ սեղանի շրջանագծի աղեղով բաժին պիտի հասնի ոչ պակաս, քան 75 սմ (նկ. 114):
- 406.** Հանրապետության հրապարակի ժամացույցի փոքր սլաքի երկարությունը 110 սմ է (նկ. 115): Ի՞նչ երկարությամբ աղեղ է գծում այդ սլաքի ծայրը 1 ժամում:

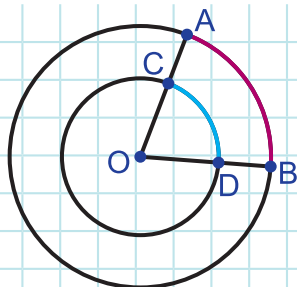


Նկար 115

- 407.** Վարպետը 80 սմ և 32,5 սմ կից կողմերով ուղղանկյունաձև թիթեղից պատրաստեց 80 սմ երկարությամբ խողովակ: Գտնք խողովակի տրամագիծը, եթե թիթեղի եզրերն իրար միացնելու համար ծախսվել է 1,1 սմ:
- 408.** Ինչքան կավելանա R շառավղով շրջանագծի երկարությունը, եթե դրա շառավիղը մեծացնենք 1 սմ-ով:
- 409.** Շրջանաձև լճի ափին կանգնած տղան ափով վազելով, թե՛ լողալով ավելի շուտ կհասնի տրամագծորեն հակադիր կետին, եթե վազելու արագությունը երկու անգամ մեծ է լողալու արագությունից:
- 410.** Գտնք 8 սմ կողմով կանոնավոր վեցանկյանը ներգծած շրջանագծի երկարությունը:
- 411.** Ավտոմեքենայի անիվների տրամագիծը 65 սմ է: Մեքենայի անիվներից ամեն մեկը, առանց սահքի, 1 րոպեում անում է 500 պտույտ: Գտնք մեքենայի արագությունը:
- 412.** Երկաթգծի կոր տեղամասի երկարությունը 900 մ է, իսկ կորության շառավիղը՝ 1800 մ: Գտնք կոր տեղամասի աղեղի աստիճանային չափը:
- 413.** Եռանկյան կողմը $10\sqrt{3}$ սմ է, իսկ դրան կից անկյունները 10° և 50° են: Գտնք այն աղեղների երկարությունները, որոնց բաժանվում է այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը եռանկյան գագաթներով:
- 414.** Նկար 116-ի AB աղեղի երկարությունը 7π սմ է: Գտնք α -ն, եթե $OA = 36$ սմ:



Նկար 116



Նկար 117

- 415.** Օ կենտրոնով շրջանագծերից մեկի շառավիղը 9 սմ է, մյուսինը՝ 15 սմ (նկ. 117): Գտե՛ք CD աղեղի երկարությունը, եթե AB աղեղի երկարությունը 5π սմ է:
- 416.** Օ կենտրոնով շրջանագծի AB աղեղի աստիճանային չափը 120° է: A և B կետերով տարված շոշափողները հատվում են C կետում: Ապացուցե՛ք, որ այդ շրջանագծի AB փոքր աղեղը, AC , BC հատվածները շոշափող շրջանագծի երկարությունը հավասար է AB փոքր աղեղի երկարությանը:
- 417.** Գտե՛ք 6 դմ շառավղով շրջանի մակերեսը:
- 418.** Գտե՛ք 25π սմ² մակերեսով շրջանի շառավիղը:
- 419.** Քանի՞ անգամ կմեծանա շրջանի մակերեսը, եթե դրա շառավիղը մեծացվի 3 անգամ:
- 420.** Գտե՛ք 21 սմ շառավղով և 60° աղեղով սեկտորի մակերեսը:
- 421.** 40° աղեղով սեկտորի մակերեսը 25π դմ² է: Գտե՛ք սեկտորի շառավիղը:
- 422.** Գտե՛ք 25 սմ շառավղով և 150° աղեղով սեգմենտի մակերեսը:
- 423.** Գտե՛ք 6 դմ շառավղով և 210° աղեղով սեգմենտի մակերեսը:
- 424.** 7 սմ և 11 սմ շառավիղներով շրջանագծերը համակենտրոն են: Գտե՛ք այդ շրջանագծերով սահմանափակված օղակի մակերեսը:
- 425.** Հայաստանի Հանրապետության տարածքը 29743 կմ² է, հարևան երկրների հետ սահմանների երկարությունը՝ 1570 կմ: Նույն մակերեսի դեպքում քանի՞ կիլոմետր կլինեն այն շրջանի շառավիղը, որը կզբաղեցներ Հայաստանի Հանրապետությունը: Քանի՞ կիլոմետրով կկրճատվեր սահմանների երկարությունը:
- 426.** Ապրելի լիճը Կոտայքի մարզի Կլոր Թառ լեռան լանջին է (նկ. 118), մակերեսը՝ 0,6 հա: Համարելով լճի մակերեսույթը շրջան՝ գտե՛ք դրա շառավիղը:



Նկար 118

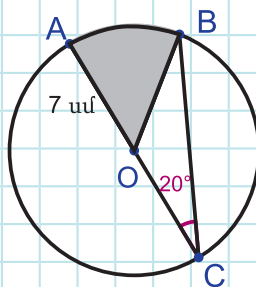
427. 0,12 կմ² մակերեսով Քարի լիճը Արագած լեռան լանջին է (նկ. 119): Համարելով լճի մակերեսային շրջան՝ գտե՛ք լճի ափի երկարությունը:



Նկար 119

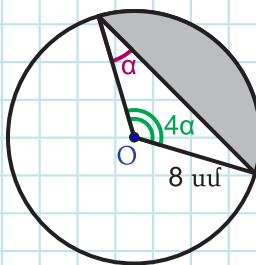
428. Երկու համակենտրոն շրջանագծերից մեծի AB լարը շոշափում է փոքր շրջանագիծը: Գտե՛ք այդ շրջանագծերով սահմանափակված օղակի մակերեսը, եթե $AB = 8$ սմ:
429. Շրջանագծին ներգծված է քառակուսի, իսկ այդ քառակուսուն՝ շրջանագիծ: Գտե՛ք այդ շրջանագծերով սահմանափակված շրջանների մակերեսների հարաբերությունը:
430. Գտե՛ք 90° աղեղով սեգմենտի շառավիղը, եթե դրա մակերեսը 16π սմ² է:
431. Շրջանի մակերեսը 256π դմ² է: Գտե՛ք այդ շրջանի այն սեկտորի մակերեսը, որի աղեղի երկարությունը 4π դմ է:
432. R շառավղով շրջանի մեջ ընկած շրջանագիծը շրջանը բաժանում է երկու հավասարամեծ մասերի: Գտե՛ք շրջանագծի շառավիղը:
433. Գյուղին ջուր մատակարարող 12 սմ և 16 սմ տրամագծերով երկու խողովակներն ուզում են փոխարինել մեկ այնպիսի խողովակով, որի լայնական հատույթի մակերեսը հավասար է գործողների լայնական հատույթների մակերեսների գումարին (R շառավղով խողովակի լայնական հատույթի մակերեսը πR^2 է): Ինչքա՞ն պետք է լինի նոր խողովակի տրամագիծը:

434. Խանութում վաճառվում են 10 սմ և 15 սմ շառավիղներով շրջանաձև պիցցաներ, որոնց բաղադրությունն ու հաստությունը նույնն են: Երկու փոքր պիցցա գնելն է շահավետ, թե՛ մեկ մեծը, եթե փոքրն արժե 500 դրամ, իսկ մեծը՝ 1000 դրամ (ենթադրվում է, որ գնվածը լրիվ օգտագործվելու է):
435. Ուղղանկյուն եռանկյան կողմերը ընդունելով որպես տրամագծեր՝ կառուցել են երեք կիսաշրջաններ: Ապացուցե՛ք, որ ներքնաձիգի վրա կառուցված կիսաշրջանի մակերեսը հավասար է էջերի վրա կառուցված կիսաշրջանների մակերեսների գումարին:
436. AC-ն O կենտրոնով և 7 սմ շառավղով շրջանագծի տրամագիծն է: Գտե՛ք ներկված մասի մակերեսը, եթե $\angle ACB = 20^\circ$ (նկ. 120):



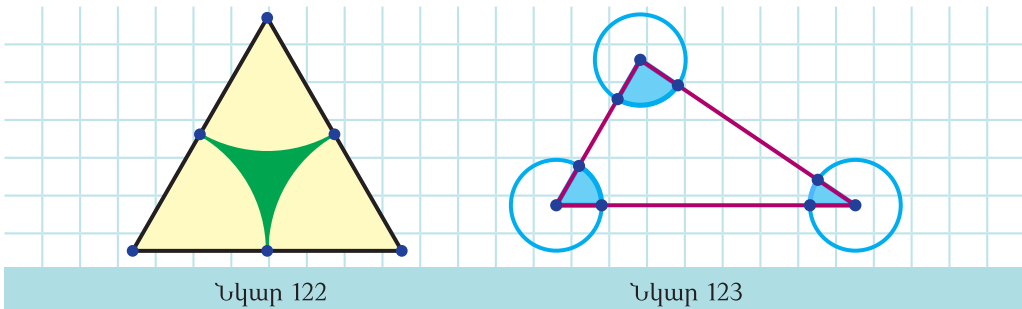
Նկար 120

437. Ըստ նկար 121-ի տվյալների, որտեղ O-ն շրջանագծի կենտրոնն է, գտե՛ք ներկված մասի մակերեսը:



Նկար 121

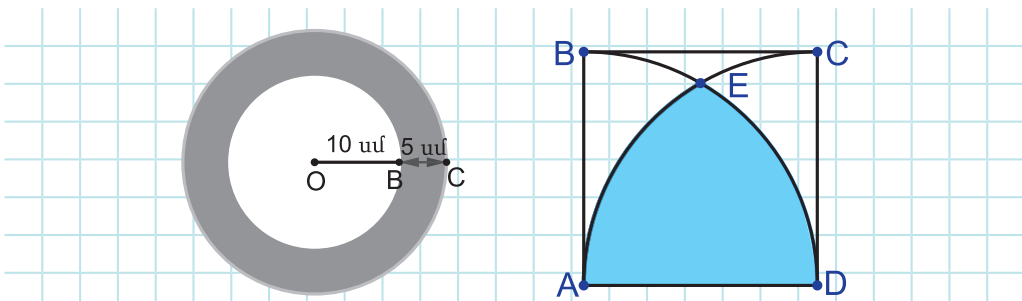
438. 4 սմ կողմով կանոնավոր եռանկյան գագաթներն ընդունելով որպես կենտրոններ՝ կառուցված են 2 սմ շառավղով սեկտորներ (նկ. 122): Գտե՛ք կանաչ պատկերի մակերեսը:



Նկար 122

Նկար 123

439. Տարակողմ եռանկյան գագաթներն ընդունելով որպես կենտրոններ՝ կառուցված են յուրաքանչյուրը 12 սմ^2 մակերեսով շրջաններ (նկ. 123): Գտնք ներկված սեկտորների մակերեսների գումարը:
440. Թղթի ժապավենը կիպ փաթաթված է 10 սմ շառավղով կոճին: Թղթի հաստությունը $0,5 \text{ մմ}$ է, իսկ փաթաթված թղթի շերտի հաստությունը 5 սմ է: Քանի մետր թուղթ են փաթաթել (նկ. 124):
441. 60° կենտրոնային անկյունով սեկտորին ներգծված է շրջանագիծ: Գտնք սեկտորի և ներգծված շրջանագծով եզերված շրջանի մակերեսների հարաբերությունը:



Նկար 124

Նկար 125

442. 10 սմ կողմով ABCD քառակուսու A և D գագաթներն ընդունելով որպես կենտրոններ՝ գծվել են քառակուսու կողմին հավասար շառավղիներով աղեղներ (նկ. 125): Գտնք կապույտ պատկերի մակերեսը:



Խմբային աշխատանք

Դասարանի աշակերտներին բաժանեք երկու խմբի: Խմբով թող քննարկեն հետևյալ հարցը և ներկայացնեն իրենց եզրակացությունը. Ինչո՞ւ են կոյուղու հորերի կափարիչները շրջանաձև:

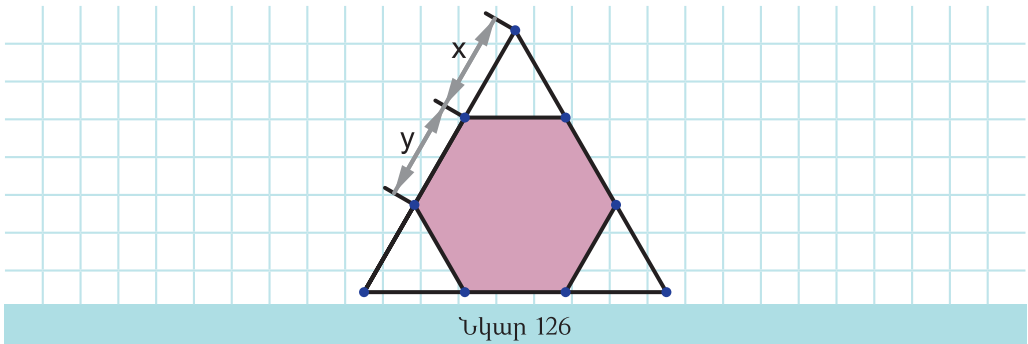


Էլեկտրոնային թեմատիկ թեստ



Լրացուցիչ խնդիրներ

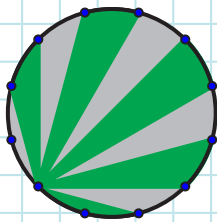
443. Ունեք հավասարակողմ եռանկյան տեսք ունեցող մետաղական թիթեղ, որի կողմի երկարությունը 120 սմ է (նկ. 126): Դրանից, անկյունները կտրել հեռացնելով, պետք է ստանալ կանոնավոր վեցանկյուն: Գտեք x -ը և y -ը:



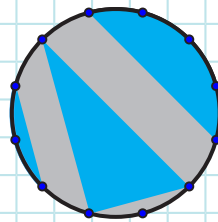
Նկար 126

444. Տարված է O կենտրոնով շրջանագծի BD տրամագիծը, իսկ OD շառավղի միջնակետով՝ BD տրամագծին ուղղահայաց AC լարը: Ապացուցեք, որ ABC եռանկյունը կանոնավոր է:
445. Գտեք $ABCDEF$ կանոնավոր վեցանկյան մակերեսը, եթե դրա AC անկյունագիծը $6\sqrt{3}$ սմ է:
446. Գտեք $ABCDEF$ կանոնավոր վեցանկյան մակերեսը, եթե ABD եռանկյան մակերեսը 60 սմ² է:
447. $A_1A_2A_3...A_8$ -ը կանոնավոր 8-անկյուն է: Ապացուցեք, որ.
ա) $A_2A_5 \parallel A_1A_6$, բ) $A_1A_2A_5A_6$ -ը ուղղանկյուն է:
448. Կանոնավոր բազմանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը $12\sqrt{2}$ սմ է, իսկ ներգծած շրջանագծինը՝ 12 սմ: Գտեք բազմանկյան կողմը:
449. Կանոնավոր բազմանկյան կողմը 16 դմ է, ներգծած շրջանագծի շառավիղը՝ $8\sqrt{3}$ դմ: Գտեք արտագծած շրջանագծի շառավիղը:

450. R շառավղով շրջանագծին արտագծած կանոնավոր բազմանկյան կողմը a է: Գտնք այդ շրջանագծին ներգծված և նույն թվով կողմեր ունեցող կանոնավոր բազմանկյան կողմը:
451. R շառավղով շրջանագծին ներգծված կանոնավոր բազմանկյան կողմը b է: Գտնք այդ շրջանագծին արտագծված և նույն թվով կողմեր ունեցող կանոնավոր բազմանկյան կողմը:
452. Գտնք կանոնավոր քառանկյանը արտագծած և ներգծած շրջանների մակերեսների հարաբերությունը:
453. Գտնք 12 սմ շառավղով և 120° աղեղով սեգմենտին ներգծած ամենամեծ մակերես ունեցող շրջանի մակերեսը:
454. Կանոնավոր եռանկյան կողմերից մեկը R շառավղով շրջանի տրամագիծ է: Գտնք եռանկյան այն մասի մակերեսը, որն այդ շրջանից դուրս է:
455. Շրջանը եզերող շրջանագիծը բաժանված է 12 հավասար աղեղների (նկ. 127): Շրջանի մակերեսի դր մասն է ներկված կանաչ գույնով:

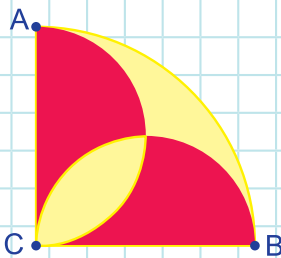


Նկար 127



Նկար 128

456. Շրջանը եզերող շրջանագիծը բաժանված է 12 հավասար աղեղների (նկ. 128): Շրջանի մակերեսի դր մասն է ներկված կապույտ գույնով:
457. 90° կենտրոնային անկյունով և 6 սմ շառավղով սեկտորի AC և CB շառավիղներն ընդունելով որպես տրամագծեր՝ կառուցված են երկու կիսաշրջաններ (նկ. 129): Գտնք սեկտորի կարմիր մասի մակերեսը:



Նկար 129

- 458.** R շառավղով շրջանագծի AB աղեղի ծայրակետերով տարված շոշափողները հատվում են C կետում: Գտնեք այդ շոշափողներով և AB փոքր աղեղով սահմանափակված պատկերի մակերեսը, եթե AB աղեղի աստիճանային չափը ա) 90° , բ) 120° :
- 459.** Տրված շրջանագծին արտագծեք կանոնավոր վեցանկյուն (նաև դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով):
- 460.** Կառուցեք (նաև դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով) շրջան, որի մակերեսը հավասար է տրված երկու շրջանների մակերեսների գումարին:



Խմբային աշխատանք

Դասարանի աշակերտներին բաժանեք երկու խմբի: Խմբով թող քննարկեն հետևյալ հարցերը և ներկայացնեն իրենց եզրակացությունները.

Կարող է եռանկյանն արտագծած և ներգծած շրջանների մակերեսների հարաբերությունը լինել 10000: Իսկ կանոնավոր բազմանկյան դեպքում:

Ուսումնասիրելով այս գլուխը՝

- Սովորեցիք կանոնավոր բազմանկյան սահմանումը, իմացաք, որ կանոնավոր բազմանկյանը կարելի է և՛ ներգծել, և՛ արտագծել շրջանագիծ:
- Սովորեցիք կանոնավոր բազմանկյանը ներգծած ու արտագծած շրջանագծերի շառավիղների կապն արտահայտող բանաձևը և կիրառեցիք այն խնդիրներ լուծելիս:
- Իմացաք կանոնավոր բազմանկյան մակերեսը հաշվելու բանաձևերը և կիրառեցիք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Սովորեցիք կանոնավոր բազմանկյան կողմի և ներգծած ու արտագծած շրջանագծերի շառավիղների կապերն արտահայտող բանաձևերը և կիրառեցիք խնդիրներ լուծելիս:
- Իմացաք շրջանագծի, աղեղի երկարությունները հաշվելու բանաձևերը և կիրառեցիք խնդիրներ լուծելիս:
- Իմացաք շրջանի, շրջանային սեկտորի և սեգմենտի մակերեսները հաշվելու բանաձևերը և կիրառեցիք խնդիրներ լուծելիս:



Նախագծային աշխատանք 3

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՍԽԱԼՆԵՐ, ՈՐՈՆՔ ՀԱՆԳԵՑՐԵԼ ԵՆ ԱՂԵՏՆԵՐԻ

Առաջարկվում են աշխատանքի հետևյալ փուլերը.

- տեղեկատվության որոնում,
- ուսումնասիրում,
- դասակարգում, համակարգում,
- արդյունքների ներկայացում:

Կատարման ժամկետը՝ 2–3 շաբաթ:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ

1. Օ-ն ABCD ուղղանկյան անկյունագծերի հատման կետն է, $\angle ABD + \angle AOD = 210^\circ$: Գտե՛ք $\angle BCA$ անկյունը:
2. ABCD շեղանկյան A անկյունը 68° է: B գագաթից AD և CD կողմերին տարված են համապատասխանաբար BM և BN ուղղահայացները: Գտե՛ք $\angle BNM$ անկյունը:
3. Գտե՛ք ABCD քառանկյան AB կողմը, եթե $AB = BC$, $CD = 16\sqrt{2}$ սմ, $\angle A = 135^\circ$, $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 105^\circ$:
4. ABC եռանկյունում $AM = BM = CM = 17$ սմ, որտեղ M-ը AC կողմի միջնակետն է: Գտե՛ք այդ եռանկյան մակերեսը, եթե $BC = 16$ սմ:
5. ABCD զուգահեռագծի C անկյան կիսորդը AD կողմը հատում է K կետում: Գտե՛ք զուգահեռագծի պարագիծը, եթե $AK = 2$ սմ, $DK = 3$ սմ:
6. Ուղղանկյուն սեղանի հիմքերը 3 դմ և 8 դմ են: Գտե՛ք մեծ կողմնային կողմի երկարությունը, եթե հայտնի է, որ այն 1 դմ-ով երկար է մյուս կողմնային կողմից:
7. ABC եռանկյան AB և BC կողմերի վրա K և M կետերը վերցված են այնպես, որ $AK : KB = 2$, $MC : BM = 3$: Գտե՛ք $\triangle BKM$ եռանկյան մակերեսը, եթե ABC եռանկյան մակերեսը 132 սմ² է:
8. ABCD ուղղանկյան CD կողմը 1 սմ է և հավասար է դրան արտագծած շրջանագծի շառավղին: Գտե՛ք $\sqrt{3}S_{ABCD}$ -ն:
9. Եռանկյան մակերեսը հավասար է միևնույն գագաթից տարված միջնագծի և բարձրության արտադրյալին: Գտե՛ք եռանկյան այդ գագաթի անկյունը:
10. ABCD զուգահեռագծի AD կողմի վրա ընտրված է M կետ, ընդ որում՝ $AM : MD = 2 : 1$: Գտե՛ք զուգահեռագծի մակերեսը, եթե $S_{ABM} = 12$ դմ²:
11. Զուգահեռագծի բարձրությունները 5 դմ և 4 դմ են, իսկ պարագիծը՝ 54 դմ: Գտե՛ք զուգահեռագծի մակերեսը:
12. ABCD զուգահեռագծի B անկյունը 135° է: Այդ անկյան գագաթից AD կողմին տարված BE բարձրությունը զուգահեռագծի կողմը բաժանում է $AE = 6$ սմ և $ED = 10$ սմ երկարությամբ հատվածների: Գտե՛ք զուգահեռագծի մակերեսը:

13. ABCD ուղղանկյունում $AB = 4\sqrt{2}$ սմ, $BC = 9\sqrt{2}$ սմ: Գտե՛ք այդ ուղղանկյան անկյունների կիսորդների հատումից առաջացած քառանկյան մակերեսը:
14. Հավասարասրուն սեղանի կողմերի միջնակետերը գագաթներ ունեցող քառանկյան պարագիծը 24 սմ է: Գտե՛ք սեղանի անկյունագիծը:
15. M-ը ABCD զուգահեռագծի AB կողմի միջնակետն է, իսկ O-ն՝ AC անկյունագծի և DM հատվածի հատման կետը: Գտե՛ք AOD և AMO եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:
16. $BC = 6$ սմ և $AD = 10$ սմ հիմքերով ABCD սեղանի անկյունագծերը փոխուղղահայաց են: Գտե՛ք սեղանի հիմքերի միջնակետերը միացնող հատվածի երկարությունը:
17. ABCD սեղանի AB և CD հիմքերը համապատասխանաբար 3 սմ և 13 սմ են: Գտե՛ք սեղանի մակերեսը, եթե անկյունագծերը DAB և ABC անկյունների կիսորդներն են:
18. BC և AD հիմքերով ABCD սեղանի բարձրությունը 8 սմ է, AD հիմքը՝ 14 սմ: Գտե՛ք սեղանի միջին գիծը, եթե $S_{BCD} = 16$ սմ²:
19. Գտե՛ք BC և AD հիմքերով ABCD սեղանի մակերեսը, եթե $BC : AD = 1 : 2$, իսկ $S_{ACD} = 24$ սմ²:
20. K-ն BC և AD հիմքերով ABCD սեղանի CD կողմի միջնակետն է: Գտե՛ք սեղանի մակերեսը, եթե $S_{AKB} = 12$ սմ²:
21. $BC = 8$ սմ և $AD = 26$ սմ հիմքերով ABCD սեղանում $\angle A = 40^\circ$, $\angle D = 50^\circ$: Գտե՛ք հիմքերի միջնակետերը միացնող հատվածի երկարությունը:
22. AH-ը ABC հավասարասրուն ($AB = BC$) եռանկյան BC կողմին տարված բարձրությունն է: Գտե՛ք ABC եռանկյան մակերեսը, եթե $BH = 8$ դմ, $CH = 2$ դմ:
23. AK-ն $AB = BC$ կողմերով ABC եռանկյան A անկյան կիսորդն է: Գտե՛ք AC-ն, եթե $BK = 4$ սմ, $CK = 6$ սմ:
24. Գտե՛ք ABC եռանկյան AC կողմը, եթե AD բարձրությունը BC կողմը տրոհում է $BD = 2\sqrt{3}$ սմ, $DC = 8$ սմ հատվածների, իսկ $\angle ABC = 60^\circ$:
25. AK-ն ABC եռանկյան A անկյան կիսորդն է: Գտե՛ք KC-ն, եթե $AB = 12$ սմ, $BK \cdot AC = 120$ սմ²:
26. Եռանկյան կողմերը 8 սմ, 12 սմ և 15 սմ են: Շրջանագիծը, որի կենտրոնը եռանկյան մեծ կողմի վրա է, շոշափում է փոքր կողմերը: Գտե՛ք այն հատվածները, որոնց բաժանվում է մեծ կողմը շրջանագծի կենտրոնով:

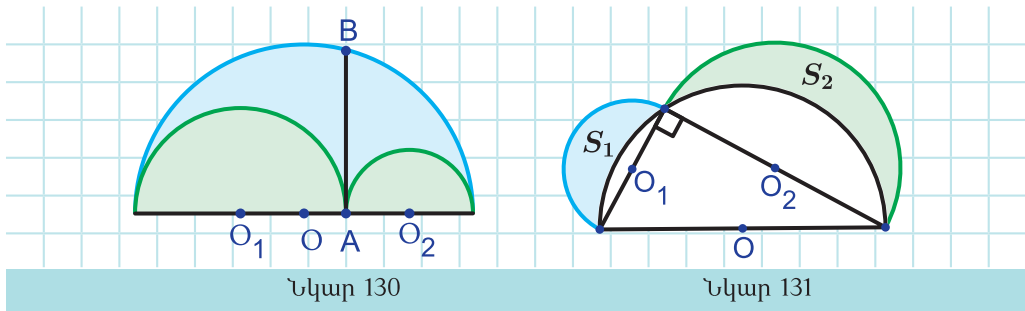
27. ABC եռանկյան AM և CK բարձրությունները հատվում են O կետում: Գտնք OK-ն, եթե $OC = 8$ սմ, $AO \cdot OM = 24$ սմ²:
28. CK-ն C ուղիղ անկյունով ABC եռանկյան բարձրությունն է: Գտնք ABC եռանկյան մակերեսը, եթե $AK = 9$ սմ, $CB = 20$ սմ:
29. ABC եռանկյան AC կողմի շարունակության վրա վերցված է այնպիսի D կետ, որ $\angle BDC = \angle ABC$ (C կետը A և D կետերի միջև է): Գտնք AC կողմի երկարությունը, եթե հայտնի է, որ $AB = 3$ սմ, $DC = 8$ սմ:
30. AK-ն C ուղիղ անկյունով ABC եռանկյան կիսորդն է: Գտնք ABC եռանկյան մակերեսը, եթե $BK = 10$ սմ, $KC = 6$ սմ:
31. CK-ն C ուղիղ անկյունով ABC եռանկյան կիսորդն է: Գտնք ABC եռանկյան պարագիծը, եթե $AK = 15$ սմ, $KB = 20$ սմ:
32. Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունն այն տրոհում է 16 սմ և 12 սմ պարագծերով երկու եռանկյունների: Գտնք տրված եռանկյան պարագիծը:
33. Գտնք $BC = 4$ սմ և $AD = 9$ սմ հիմքերով ABCD սեղանի AC անկյունագիծը, եթե $\angle BAC = \angle CDA$:
34. AK-ն AC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան կիսորդն է: Գտնք եռանկյան B անկյունը, եթե $\triangle ABC \sim \triangle AKC$:
35. CH-ը C ուղիղ անկյունով ABC եռանկյան բարձրությունն է: Գտնք AH-ը, եթե $AB = 13$ սմ, $CH = 6$ սմ:
36. CH-ը C ուղիղ անկյունով և $AB = 10$ սմ, $AC = 6$ սմ կողմերով ABC եռանկյան բարձրությունն է, իսկ HN-ը՝ AHC եռանկյան բարձրությունը: Գտնք HN-ը:
37. BH-ը ABC եռանկյան բարձրությունն է, ընդ որում՝ $CH = 5$ սմ: Եռանկյան միջնագծերի հատման կետի հեռավորությունը AC կողմից 4 սմ է: Գտնք BC-ն:
38. Գտնք ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետի հեռավորությունը AC կողմից, եթե $AC = 12$ սմ, $S_{ABC} = 54$ սմ²:
39. $BC = 6$ սմ և $AD = 12$ սմ հիմքերով ABCD սեղանի անկյունագծերը հատվում են O կետում: Գտնք COD եռանկյան մակերեսը, եթե սեղանի բարձրությունը 9 սմ է:
40. Գտնք C ուղիղ անկյունով ABC եռանկյան CK կիսորդը, եթե $AC = 6\sqrt{2}$ դմ, $BC = 3\sqrt{2}$ դմ:

41. Գտնք ABC եռանկյան BD կիսորդը, եթե $\angle B = 60^\circ$, $AB = \sqrt{3}$ սմ, $BC = 2\sqrt{3}$ սմ:
42. CH -ը C ուղիղ անկյունով ABC եռանկյան բարձրությունն է: Գտնք $6\text{tg}A$ -ն, եթե $AH = 18$ սմ, $BH = 8$ սմ:
43. CH -ը C ուղիղ անկյունով ABC եռանկյան բարձրությունն է: Գտնք $12\cos A$ -ն, եթե $AC = 6$ սմ, $BH = 5$ սմ:
44. ABC եռանկյունում $AB = BC = 5$ սմ, $AC = 6$ սմ: Գտնք $\sin B$ -ն:
45. ABC եռանկյունում $AB = BC = 5$ սմ, $AC = 4\sqrt{5}$ սմ: Գտնք $\cos B$ -ն:
46. $ABCD$ ուռուցիկ քառանկյան AB կողմի միջնակետը M -ն է, իսկ CD կողմի միջնակետը՝ N -ը: Գտնք S_{AND} -ն, եթե $S_{\text{MBC}} = 12$ սմ², $S_{\text{AMCN}} = 20$ սմ²:
47. BD -ն $AB = 12$ սմ և $BC = 8$ սմ կողմերով ABC եռանկյան կիսորդն է: Գտնք S_{DBC} -ն, եթե $S_{\text{ABD}} = 60$ սմ²:
48. $ABCD$ ուռուցիկ քառանկյան AC անկյունագիծը կիսում է դրա A անկյունը: Գտնք ADC եռանկյան մակերեսը, եթե $AB = 8$ դմ, $AD = 10$ դմ, $S_{\text{ABC}} = 64$ դմ²:
49. O կենտրոնով և $\sqrt{13}$ սմ շառավղով շրջանագծին A կետից տարված են AK շոշափողը և հատող, որը շրջանագիծը հատում է M և N կետերում: Գտնք O կետի հեռավորությունը AN ուղղից, եթե $AM = MN$, $AK = \sqrt{32}$ սմ:
50. ABC եռանկյունում $AB = 16$ դմ, $\angle ABC = 30^\circ$: Այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի տրամագիծը AB -ն է: Գտնք A կետի հեռավորությունը a ուղղից, եթե a ուղիղը C կետում շոշափում է ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը:
51. Եռանկյան երկու կողմերը 8 դմ և 9 դմ են, իսկ դրանց ընդհանուր գագաթից տարված բարձրությունը՝ 6 դմ: Գտնք այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:
52. Շրջանագծի տրամագծին ուղղահայաց լարը տրամագիծը բաժանում է 3 դմ և 27 դմ երկարությամբ հատվածների: Գտնք այդ լարի երկարությունը:
53. $ABCD$ քառանկյանը արտագծած է շրջանագիծ: Գտնք AD և BC ուղիղների կազմած անկյունը, եթե $\angle DBC = 30^\circ$, $\angle BDA = 70^\circ$:
54. Շրջանագիծը շոշափում է O անկյան կողմերը A և B կետերում: Գտնք O անկյունը, եթե A և B կետերը շրջանագիծը տրոհում են երկու աղեղների, որոնցից մեկը 250° է:

55. Շրջանագծի դրսի A կետով տարված ուղիղը շրջանագիծը հատում է B և C կետերում: Գտնեք A կետից շրջանագծին տարված շոշափողի երկարությունը, եթե $AB = 6$ սմ և $AC = 24$ սմ:
56. 11 սմ շառավղով և O կենտրոնով շրջանագծի AB լարի K կետի հեռավորությունը O կենտրոնից 7 սմ է: Գտնեք AK -ն և KB -ն, եթե $AB = 18$ սմ:
57. 13 սմ շառավղով շրջանագիծը եռանկյան ամեն մի կողմից անջատում է 10 սմ երկարությամբ լար: Գտնեք եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը:
58. $ABCD$ քառանկյունում $AB = 5$ սմ, $BC = 12$ սմ, $\angle B = \angle D = 90^\circ$: Գտնեք այդ քառանկյանն արտագծած շրջանագծի տրամագիծը:
59. $ABCD$ շեղանկյունում $AB = 10$ դմ, $AC = 16$ դմ: B գագաթից տարված են BM և BK բարձրությունները: Գտնեք BKM եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:
60. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքը 6 սմ է, իսկ հիմքին տարված բարձրությունը՝ 9 սմ: Գտնեք եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:
61. ABC սուրանկյուն եռանկյան B անկյան կիսորդը եռանկյանն արտագծած O կենտրոնով շրջանագիծը հատում է D կետում: Գտնեք DC -ն, եթե $AC = 48$ սմ, $OC = 25$ սմ:
62. Շրջանագիծը, որն անցնում է եռանկյան $3\sqrt{2}$ սմ և $5\sqrt{2}$ սմ երկարությամբ կողմերի միջնակետերով և այդ կողմերի ընդհանուր գագաթով, շոշափում է եռանկյան երրորդ կողմը: Գտնեք երրորդ կողմը:
63. ABC եռանկյան C գագաթին հարակից արտաքին անկյան կոսի-նուսը $-0,8$ է, իսկ AB կողմը՝ 12 դմ: Գտնեք եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:
64. ABC եռանկյան բարձրությունները հատվում են H կետում: Ապացուցեք, որ ABC և AHB եռանկյուններին արտագծած շրջանագծերի շառավիղները հավասար են:
65. ABC եռանկյան բարձրությունները հատվում են H կետում: Գտնեք AHC եռանկյան արտագծած շրջանագծի շառավիղը, եթե $\sin A = \frac{4}{5}$, $BC = 16$ սմ:
66. C ուղիղ անկյունով ABC եռանկյունում տարված է CH բարձրությունը: Գտնեք եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը, եթե $AC = 15$ դմ, $BH = 16$ դմ:

67. Գտնք ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը, եթե $AB = BC = 39$ սմ, $AC = 30$ սմ:
68. ABC հավասարասրուն եռանկյան AC հիմքը $4\sqrt{2}$ սմ է, իսկ սրունքին տարված միջնագիծը՝ 5 սմ: Գտնք եռանկյան սրունքը:
69. O կենտրոնով շրջանագիծը շոշափում է A անկյան մի կողմը C կետում և հատում է մյուս կողմը B և D կետերում: Գտնք շրջանագծի շառավիղը, եթե $AC = 16$ դմ, $AD = 32$ դմ, իսկ O կետի հեռավորությունը AB ուղղից 5 դմ է:
70. Հավասարակողմ եռանկյան կողմը $16\sqrt{3}$ սմ է: Գտնք եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնի և միջին գծի հեռավորությունը:
71. Շրջանագիծը շոշափում է $AB = 15$ սմ, $BC = 12$ սմ, $AC = 18$ սմ կողմերով եռանկյան AB և BC կողմերը, իսկ O կենտրոնը AC կողմի վրա է: Գտնք AO -ն:
72. Շրջանագիծը շոշափում է C ուղիղ անկյունով ABC եռանկյան AC և CB էջերը, իսկ դրա O կենտրոնը AB ներքնաձիգի վրա է: Գտնք ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը, եթե $AO = 15$ սմ, $OB = 20$ սմ:
73. ABC եռանկյանն արտագծած O կենտրոնով և 5 սմ շառավիղով շրջանագծի կենտրոնը AB կողմի վրա է, իսկ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը 2 սմ է: Գտնք եռանկյան մակերեսը:
74. Շրջանագիծը շոշափում է A անկյան կողմերը B և C կետերում: BC -ին A -ից տարված ուղղահայացը 9 դմ է, իսկ AB -ն՝ 15 դմ: Գտնք շրջանագծի շառավիղը:
75. Շրջանագծին ներգծված AD մեծ հիմքով $ABCD$ սեղանի BH բարձրությունը 24 սմ է: Գտնք շրջանագծի շառավիղը, եթե $HD = 32$ սմ, $\sin C = \frac{4}{5}$:
76. Գտնք շրջանագծին արտագծած $ABCD$ հավասարասրուն սեղանի AB սրունքը, եթե $S_{ABCD} = 32\sqrt{3}$ սմ², $\angle A = 60^\circ$:
77. Գտնք շրջանագծին ներգծված սեղանի մակերեսը, եթե դրա բարձրությունը 9 դմ է, իսկ անկյունագիծը՝ 15 դմ:
78. Զուգահեռագծի կողմերը 2 սմ և 3 սմ են: Մեծ կողմերը հատող և դրանց ուղղահայաց ուղիղը զուգահեռագիծը բաժանում է երկու քառանկյունների, որոնցից ամեն մեկին կարելի է ներգծել շրջանագիծ: Գտնք զուգահեռագծի սուր անկյունը:

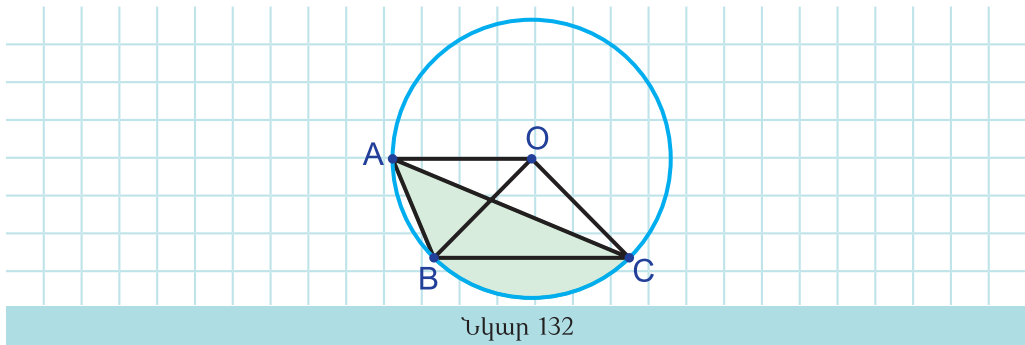
79. Շրջանագծերի O_1 և O_2 կենտրոնների հեռավորությունը 25 սմ է, իսկ շառավիղները՝ 16 սմ և 9 սմ: Այդ շրջանագծերի ընդհանուր շոշափողը դրանցից առաջինը շոշափում է A , իսկ երկրորդը՝ B կետում: Գտնք O_1ABO_2 քառանկյան մակերեսը:
80. 18 սմ տրամագծով շրջանագծին ներգծած $ABCD$ ուղղանկյունում $\angle CBD = 20^\circ$: Գտնք CD փոքր աղեղի երկարությունը:
81. 16 սմ տրամագծով շրջանագծին ներգծած BC և AD հիմքերով սեղանում $\angle A = 78^\circ$, $\angle BDC = 33^\circ$: Գտնք CD փոքր աղեղի երկարությունը:
82. CH -ը $\angle C = 90^\circ$ և $\angle B = 20^\circ$ անկյուններով ABC եռանկյան բարձրությունն է: Շրջանագիծը, որի տրամագիծը CH -ն է, հատում է CB էջը D կետում: Գտնք HD փոքր աղեղի երկարությունը, եթե $CH = 36$ սմ:
83. Գտնք $\sqrt{2}$ դմ, $\sqrt{8}$ դմ, $\sqrt{14}$ դմ կողմերով եռանկյան մակերեսը:
84. Գտնք $5\sqrt{5}$ դմ շառավղով կիսաշրջանին ներգծած քառակուսու կողմը:
85. Գտնք շրջանագծին ներգծված BC և AD հիմքերով սեղանի մակերեսը, եթե $P_{ABCD} = 42$ սմ, $BC = 3$ սմ և BD -ն B անկյան կիսորդն է:
86. Գտնք $ABCDEF$ կանոնավոր վեցանկյան պարագիծը, եթե C գագաթից AD անկյունագծին տարված ուղղահայացը $2\sqrt{3}$ սմ է:
87. Գտնք $ABCDEF$ կանոնավոր վեցանկյան մակերեսը, եթե $AC = 4\sqrt{3}$ դմ:
88. Կանոնավոր եռանկյանը ներգծած շրջանագծին ներգծած է կանոնավոր վեցանկյուն: Գտնք եռանկյան և վեցանկյան մակերեսների հարաբերությունը:
89. Շրջանագծին ներգծած կանոնավոր եռանկյան կողմը 6 սմ է: Գտնք նույն շրջանագծին ներգծած քառակուսու կողմը:
90. 6 սմ կողմով կանոնավոր եռանկյանը ներգծած և արտագծած են շրջանագծերը: Գտնք օղակի մակերեսը:
91. 4 սմ կողմով կանոնավոր վեցանկյանը ներգծած և արտագծած են շրջանագծերը: Գտնք օղակի մակերեսը:
92. Գտնք $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ կանոնավոր վեցանկյան և $A_1A_2A_3$ եռանկյան մակերեսների հարաբերությունը:
93. Երեք կիսաշրջաններ դասավորված են այնպես ինչպես ցույց է տրված նկար 130-ում: Գտնք կապույտ պատկերի մակերեսը, եթե $AB = 10$ սմ:



Նկար 130

Նկար 131

94. 4 սմ և 8 սմ էջերով ուղղանկյան կողմերը ընդունելով որպես տրամագծեր՝ կառուցված են կիսաշրջաններ (նկ. 131): Գտնք $S_1 + S_2$ -ը:
95. ABC եռանկյանն արտագծած է 10 սմ շառավղով և O կենտրոնով շրջանագիծ (նկ. 132): Գտնք կանաչ պատկերի մակերեսը, եթե $AO \parallel BC$, $\angle BAC = 36^\circ$:



Նկար 132

96. Գտնք $A(5; 3)$, $B(-7; 1)$ ծայրակետերով AB հատվածի միջնակետի կոորդինատները:
97. Գտնք AB ներքնաձիգով ուղղանկյուն եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնի կոորդինատները, եթե $A(3; 5)$, $B(9; -1)$:
98. Գտնք $A(2; 3)$, $B(6; 12)$ և $C(6; -6)$ գագաթներով եռանկյան AM միջնագծի երկարությունը:
99. Աբսցիսների առանցքի վրա գտնվող այն կետի կոորդինատները, որը հավասարահեռ է $A(1; 1)$, $B(3; 5)$ կետերից:
100. ABCD զուգահեռագծի գագաթների կոորդինատները $A(1; 2)$, $B(2; 5)$ և $C(7; -1)$ են: Գտնք BD անկյունագծի երկարության քառակուսին:
101. ABCD զուգահեռագծի գագաթների կոորդինատները $A(4; 2)$, $B(5; x)$, $C(-3; 4)$, $D(-4; -1)$ են: Գտնք x-ի արժեքը:

102. Գտնք $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 4$ հավասարումով տրված շրջանագծի շառավիղը:
103. Գտնք $O(3;2)$ կենտրոնով և $A(6;-3)$ կետով անցնող շրջանագծի շառավիղը և գրեք դրա հավասարումը:
104. Տրված են $A(2;6)$, $B(8;10)$, $C(-1;4)$ կետերը: Գրեք այն շրջանագծի հավասարումը, որն անցնում է C կետով, իսկ կենտրոնը AB հատվածի միջնակետն է:
105. Գրեք $A(-2;-1)$ և $B(2;2)$ կետերով անցնող ուղղի հավասարումը:
106. Գրեք ABC եռանկյան CM միջնագիծն ընդգրկող ուղղի հավասարումը, եթե $A(4;6)$, $B(-4;0)$, $C(-1;4)$:
107. Որոշեք $ABCD$ քառանկյան տեսակը, եթե $\overline{AB} = \overline{DC}$ և $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$:
108. ABC կանոնավոր եռանկյան կողմը $\sqrt{3}$ է: Գտնք $\overline{AB} + \overline{AC}$ վեկտորի երկարությունը:
109. Գտնք $\overline{AC}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե C -ն $A(5;3)$, $B(-7;1)$ ծայրակետերով AB հատվածի միջնակետն է:
110. Գտնք λ -ն, եթե $\vec{a} \{ \lambda; 5 \}$ վեկտորի երկարությունը 13 է:
111. $\overline{AB}$ վեկտորը վերածեք ըստ $\vec{i}$, $\vec{j}$ կոորդինատային վեկտորների, եթե $A(-3; 4)$, $B(6;-2)$:
112. Գտնք λ -ն, եթե $\vec{a} \{ \lambda; 5 \}$ և $\vec{b} \left\{ 1; \frac{1}{2} \right\}$ վեկտորները համագիծ են:
113. Գտնք 60° անկյուն կազմող $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը, եթե $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 4$:
114. Գտնք 120° անկյուն կազմող $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը, եթե $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 3$:
115. Գտնք $\vec{a} \{ 3; -2 \}$, $\vec{b} \{ 7; 1 \}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը:
116. Տրված են $\vec{a} \{ 3; -1 \}$, $\vec{b} \{ 1; 2 \}$ վեկտորները: Գտնք $3\vec{a} - \vec{b}$ և $\vec{a}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը:
117. n -ի ո՞ր արժեքի դեպքում $\vec{a} \{ 2n; -1 \}$ և $\vec{b} \{ 1; n \}$ վեկտորները կլինեն փոխուղղահայաց:
118. Գտնք $\vec{a} \{ -4; 2 \}$ և $\vec{b} \{ 1; 2 \}$ վեկտորների կազմած անկյունը:
119. Գտնք $\vec{a} \{ 0; 3 \}$ և $\vec{b} \{ 2; 2 \}$ վեկտորների կազմած անկյունը:

- 120 Գտե՛ք $|\vec{a}| = 3$ և $|\vec{b}| = 5$ վեկտորների կազմած անկյունը, եթե $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{19}$:
121. 8 շառավղով շրջանագծին ներգծված է $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ կանոնավոր վեցանկյունը: Գտե՛ք $\overrightarrow{A_4A_1}$ և $\overrightarrow{A_4A_3}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ, ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ, ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

ԳԼՈՒԽ I $\angle B = 60^\circ$

1. Ոչ:
3. ա) ոչ մի, բ) երկու, գ) մեկ:
4. 20° :
5. 10 սմ:
6. $3\sqrt{2}$ դմ:
8. ≈ 226 կմ:
9. 67° :
10. 28 սմ:
11. 53° :
12. $6\sqrt{3}$ դմ:
13. 2,2 սմ:
15. 18 սմ:
18. 120° , 30° , 30° :
19. 80° :
20. 9 սմ: Ցուցում: Շրջանագծի կենտրոնը միացրեք AB լարի միջնակետին և անկյան մյուս կողմի շոշափման կետին:
21. ա) չունեն ընդհանուր կետ, բ) հատվում են, գ) ունեն արտաքին շոշափում:
23. ա) $d < 2$ սմ կամ $d > 20$ սմ, բ) $2 \text{ սմ} < d < 20 \text{ սմ}$, գ) $d = 2$ սմ կամ $d = 20$ սմ:
25. 14 սմ կամ 4 սմ: Ցուցում: Օգտվեք նախորդ խնդրից և երկու անգամ Պյութագորասի թեորեմից:
26. 8 դմ:
27. 10 սմ: Ցուցում: Դիտարկվող եռանկյան կողմերն արտահայտեք շրջանագծերի շառավիղներով:
30. 108° կամ 56° :
31. $\angle ABC$ -ն ներգծյալ է, $\angle AOC$ -ն կենտրոնային է:

33. $90^\circ, 36^\circ, 54^\circ$:
36. Ուղղանկյուն եռանկյուն է:
37. 20,5 սմ:
38. 180° :
39. 30° կամ 150° :
41. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$:
42. 40° :
43. 36° :
44. 20° :
47. Ցուցում: Երկու անգամ օգտվեք տրամագծի վրա հենված անկյան հատկությունից:
49. 108° :
50. 64° :
52. $78^\circ, 130^\circ$:
55. Ցուցում: Տարեք այդ լարերի ծայրակետերում գագաթներ ունեցող քառանկյան անկյունագիծ և օգտվեք ներգծյալ անկյան մասին թեորեմից:
58. 20° :
59. 90° :
60. 18 սմ:
61. 16 դմ:
62. 8 սմ:
63. 24 սմ:
65. 36 սմ:
66. 16 սմ:
67. 20 սմ:
68. 8 սմ, 8 սմ, 8 սմ:
69. 6 սմ, 12 սմ:
70. $R^2 - d^2$: Ցուցում: Կիրառեք հատվող լարերի հատկությունը:
72. 8 սմ:
73. 25 սմ:
74. Ցուցում: Շրջանագծերից ամեն մեկի համար կիրառեք շոշափողի և հատողի բանաձևը:

- 76. 14° :
- 77. 67° :
- 79. Ուղղանկյուն եռանկյուն է:
- 80. 1:1:
- 81. Այո:
- 83. Ցուցում: Երկու անգամ օգտվեք եռանկյան կիսորդների մասին թեորեմից:
- 84. Ցուցում: Օ կետը միացրեք A և B գագաթներին և օգտվելով զուգահեռ ուղիղները հատողով հատելիս առաջացած խաչադիր անկյունների հավասարությունից, ցույց տվեք, որ BNO և AMO եռանկյունները հավասարասրուն են:
- 85. Ցուցում: Ցույց տվեք, որ OQB և APO եռանկյունները հավասարասրուն են:
- 86. 90° : Ցուցում: Ցույց տվեք, որ ADB և CDB եռանկյունները հավասարասրուն են: Օգտվեք հավասարասրուն եռանկյան հատկությունից և եռանկյան անկյունների գումարի մասին թեորեմից:
- 87. Ցուցում: Օգտվեք անկյան կիսորդի հատկությունից և դրան հակադարձ թեորեմից:
- 88. 90° : Ցուցում: Օգտվեք տրամագծի վրա հենված անկյան և եռանկյան բարձրությունների մասին թեորեմներից:
- 89. Ցուցում: Օգտվեք եռանկյան բարձրությունների մասին թեորեմից և եռանկյունների նմանության I հայտանիշից:
- 91. Ցուցում: AH բարձրության և BM միջնագծի հատման կետը նշանակեք L-ով: CL-ը կլինի BMC եռանկյան միջնագիծը: Ցույց տվեք, որ այդ եռանկյան M գագաթից տարված բարձրությունն անցնում է CL միջնագծի միջնակետով:
- 92. 35° :
- 93. 110° :
- 94. 1:3:
- 95. 14 սմ:
- 96. 13 դմ:
- 97. 180° :
- 98. 8 սմ:
- 99. Ցուցում: Արեք հակասող ենթադրություն և ցույց տվեք, որ այդ դեպքում եռանկյունն ունի անկյուն, որ մեծ կամ հավասար է 90° -ին:

101. 4 դմ:
102. 9 սմ:
103. 7 սմ:
104. 32 սմ:
105. 52 դմ:
106. 7 դմ:
107. 9:
109. 60° , 120° :
110. Ցուցում: Օգտվեք արտագծյալ քառանկյան հատկությունից:
111. Ցուցում: Օգտվեք ներգծյալ քառանկյան հատկությունից:
112. Ցուցում: Օգտվելով 55 խնդրից՝ ցույց տվեք, որ սեղանի հիմքին առընթեր անկյունները հավասար են:
113. Ցուցում: Ներգծված շրջանագծի կենտրոնը միացրեք սեղանի հիմքերի շոշափման կետերին:
115. 30° :
116. 2 դմ:
117. 108 սմ²: Ցուցում: Օգտվեք 112 խնդրից և հավասարասրուն սեղանի հատկություններից:
118. 96 սմ²: Ցուցում: Օգտվեք 112 խնդրից, ապա ցույց տվեք, որ սեղանի սրունքը հավասար է մեծ հիմքին:
120. Այո:
121. Ոչ:
123. Ցուցում: Ցույց տվեք, որ հավասարասրուն սեղանի հանդիպակաց անկյունների գումարը 180° է:
124. 40 սմ:
125. 2 դմ, 32 դմ:
126. Ցուցում: Ապացուցեք, որ առաջացած քառանկյունն ուղղանկյուն է:
127. Ցուցում: Ենթադրենք՝ այդ սեղանի հիմքերը AD-ն և BC-ն են: Օգտվեք նրանից, որ $\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} = 90^\circ$, $\frac{\angle C}{2} + \frac{\angle D}{2} = 90^\circ$:
128. $\frac{\sqrt{ab}}{2}$: Ցուցում: Նկատենք, որ այդպիսի սեղանը հավասարասրուն է, և դրա սրունքը հավասար է հիմքերի կիսագումարին:

129. Ցուցում: Շրջանագծի կենտրոնից ուղղահայացներ տարեք այդ լարերին և ցույց տվեք, որ քառանկյան կողմերը հավասարահեռ են շրջանագծի կենտրոնից:
130. Ցուցում: Դիտարկեք A, B, C կետերով անցնող շրջանագիծը և ցույց տվեք, որ եթե D -ն այդ շրջանագծի վրա չէ, ապա $\angle BCA \neq \angle BDA$:
131. Ցուցում: Նախ ցույց տվեք, որ BCK և ADK եռանկյունները նման են, ապա օգտվեք նախորդ խնդրից:
132. 2 սմ:
133. 14 դմ:
134. 10 սմ, 24 սմ, 26 սմ:
135. 7 սմ:
136. 5սմ:
137. 6,5 սմ:
138. 60 դմ:
141. 24 սմ^2 :
142. 24 սմ:
143. 40 սմ:
144. 15 դմ^2 :
145. 24 սմ^2 :
146. $35^\circ, 55^\circ$:
147. 5 դմ:
148. Ցուցում: Ենթադրենք՝ O կենտրոնով և r շառավղով շրջանագիծը C ուղիղ անկյունով ABC եռանկյան AB, BC և AC կողմերը համապատասխանաբար շոշափում է M, N, K կետերում: Ցույց տվեք, որ $\Delta AMO = \Delta AKO$, $\Delta BMO = \Delta BNO$: Դրանից կհետևի, որ $S_{AMOK} + S_{BMON} = r \cdot c$:
149. $2\sqrt{5}$ սմ:
150. $\sqrt{m(m+n)}, \sqrt{n(m+n)}$: Ցուցում: A և B կետերից շոշափողին տարված ուղղահայացների հիմքերը համապատասխանաբար նշանակեք D -ով և E -ով: Տարեք նաև ABC եռանկյան CH բարձրությունը: Համոզվեք, որ AHC և ADC եռանկյունները հավասար են: Հետևաբար $AH = m$: Նույն ձևով գտեք HB -ն: Օգտվեք $a^2 = a_c \cdot c$ բանաձևից:
151. 12 սմ, 16 սմ, 10 սմ:

152. $\frac{\sqrt{5}}{5}R$:
153. Ցուցում: Օգտվեք նույն կետից տարված շոշափողի հատվածների հավասարությունից և ուղղանկյուն եռանկյան 30° դիմացի էջի հատկությունից:
154. $2R$. Ցուցում: Օգտվեք նույն կետից տարված շոշափողի հատվածների հավասարությունից:
155. $\frac{R}{3}$:
156. 3:
157. 3 սմ:
158. a: Ցուցում: Օգտվեք նույն կետից տարված շոշափողի հատվածների հավասարությունից և որ ներգծած շրջանագիծը հավասարակողմ եռանկյան կողմերը շոշափում է դրանց միջնակետերում:
159. Ցուցում: Ենթադրենք՝ $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$: Որպես ABO եռանկյան արտաքին անկյուն՝ $\angle BOM = \alpha + \beta$: Մյուս կողմից՝ $\angle OBM = \angle OBC + \angle CBM$: Որպես նույն աղեղի վրա հենված անկյուններ՝ $\angle CBM = \angle MAC$: Ուրեմն $\angle OBM = \angle OBC + \angle MAC = \beta + \alpha$:
160. 16 սմ: Ցուցում: Ենթադրենք՝ այդ եռանկյունը $AB = 10$ սմ, $AC = 12$ սմ, $BC = 6$ սմ կողմերով ABC եռանկյունն է: Ենթադրենք նաև, որ ներգծած շրջանագիծը AB կողմը շոշափում է M կետում: Օգտվելով նույն կետից տարված շոշափողի հատվածների հավասարությունից՝ ցույց տվեք, որ $AM = p - BC$, որտեղ p -ն ABC եռանկյան կիսապարագիծն է: Մյուս կողմից՝ AM -ը հավասար է անջատված եռանկյան կիսապարագծին:
161. Ցուցում: Ենթադրենք՝ շրջանագծերի կենտրոնները O -ն ու O_1 -ն են, M -ը O կենտրոնով շրջանագծի վրա է: Նախ ցույց տվեք, որ BM և BN աղեղների վրա հենված կենտրոնային անկյունները հավասար են, ապա օգտվեք MOB և BO_1N հավասարասրուն եռանկյունների նմանությունից:
162. Ցուցում: Ցույց տվեք, որ նմանակ կողմերի ծայրակետերը ներգծած շրջանագծերի կենտրոններին միացնելուց առաջացած եռանկյունները նման են, ապա օգտվեք նման եռանկյունների նմանակ կողմերին տարված բարձրությունների մասին թեորեմից:
163. Ցուցում: Ենթադրենք՝ $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ կողմերով եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնը O -ն է: Տարեք CH բարձրությունը և BC կողմին OM ուղղահայացը: Ցույց տվեք, որ AHC և OMB

եռանկյունները նման են և օգտվեք այդ եռանկյունների կողմերի համեմատականությունից:

164. $7\frac{1}{24}$ սմ: Ցուցում: Օգտվեք նախորդ խնդրից:
165. Ցուցում: Օգտվելով նույն կետից տարված շոշափողի հատվածների հավասարությունից՝ նախ ցույց տվեք, որ $P_{AMN} = AB + AC$: Ապա ապացուցեք, որ $\angle MON = \frac{\angle BOC}{2}$:
166. Ցուցում: Ցույց տվեք, որ COD եռանկյունն ուղղանկյուն եռանկյուն է և օգտվեք $h^2 = a_c \cdot b_c$ բանաձևից:
167. 80 սմ²:
168. $\frac{\sqrt{3}h}{3}$: Ցուցում: Ենթադրեք՝ այդ սեղանը $BC < AD$ հիմքերով սեղանն է, որում տարված է CH բարձրությունը: Այն հավասարաբար ունի սեղան է (տես խնդիր 112) և AH-ը հավասար է դրա միջին գծին:
169. Ցուցում: Դիտարկենք այն դեպքը, երբ CE և DF հատվածները չեն հատվում: Այդ դեպքում, օգտվելով ABDC քառանկյան ներգծյալ լինելուց և կից անկյունների գումարի մասին թեորեմից, ցույց տվեք, որ $\angle ABF = \angle DCA$: Ապա, օգտվելով AEFB քառանկյան ներգծյալ լինելուց, ցույց տվեք, որ $\angle DCA + \angle AEF = 180^\circ$:
170. Ցուցում: Օգտվեք ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավղի՝ $r = \frac{a+b-c}{2}$ բանաձևից:
171. Ցուցում: Օգտվեք 162 խնդրից և Պյութագորասի թեորեմից:
172. Ցուցում: Դիտարկենք այն դեպքը, երբ $AC > AB$: AH և AO ճառագայթների շրջանագծի հետ հատման կետերը համապատասխանաբար նշանակենք M-ով և N-ով: Օգտվելով տրամագծի վրա հենված ներգծյալ անկյան հատկությունից՝ ցույց տվեք, որ $MN \parallel BC$: Ապա օգտվեք 55 խնդրից:
173. Ցուցում: Նկատենք, որ AB տրամագծով շրջանագիծն անցնում է A_1 և B_1 կետերով: Հետևաբար $\angle CA_1B_1 = 180^\circ - \angle BA_1B_1 = \angle CAB$:
174. Ցուցում: Ենթադրենք՝ ABC եռանկյան բարձրությունների հատման H կետի համաչափը AB կողմի նկատմամբ P կետն է: AHB և APB եռանկյունները համաչափ են, հետևաբար հավասար են: Ուրեմն $\angle APB = \angle AHB$: Մյուս կողմից՝ $\angle AHB = 180^\circ - \angle ACB$: Ստացվածից հետևում է, որ ACBP քառանկյան հանդիպակաց անկյունների գումարը 180° է: Հետևաբար դրան կարելի է արտագծել շրջանագիծ: Բայց այդ

շրջանագիծը համընկնում է ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծի հետ:

- 175.** Ցուցում: Ենթադրենք՝ ABC եռանկյան բարձրությունների հատման H կետի համաչափը AB կողմի միջնակետի նկատմամբ M կետն է: AHB և AMB եռանկյունները համաչափ են, հետևաբար հավասար են: Ուրեմն $\angle AMB = \angle AHB$: Մյուս կողմից՝ $\angle AHB = 180^\circ - \angle ACB$: Ստացվածից հետևում է, որ $ACBM$ քառանկյան հանդիպակաց անկյունների գումարը 180° է: Հետևաբար դրան կարելի է արտագծել շրջանագիծ: Բայց այդ շրջանագիծը համընկնում է ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծի հետ:
- 176.** Ցուցում: Տրված շրջանագծի կենտրոնով տարեք տրված ուղղին ուղղահայաց:
- 177.** Ցուցում: Եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնը եռանկյան կողմի շոշափման կետով այդ կողմին տարված ուղղահայացի վրա է:
- 178.** Ցուցում: Տարեք M կետով և տրամագծի ծայրակետերով անցնող ուղիղները: Օգտվեք տրամագծի վրա հենված անկյան և եռանկյան բարձրությունների մասին թեորեմներից:

ԳԼՈՒԽ II

- 179.** ա) այո, բ) ոչ, գ) այո:
- 180.** ա) այո, բ) այո, գ) այո:
- 181.** ա)–ն և դ)–ն:
- 182.** ա) $+$, բ) $-$, գ) $+$, դ) $-$:
- 183.** Այո:
- 184.** Ոչ:
- 185.** $\cos 140^\circ$, $\cos 100^\circ$, $\cos 50^\circ$, $\cos 9^\circ$:
- 186.** $\sin 9^\circ$, $\sin 160^\circ$, $\sin 40^\circ$, $\sin 100^\circ$:
- 187.** ա) 1, բ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, գ) $\frac{1}{2}$, դ) 0:
- 188.** ա) 0, բ) $\frac{1}{2}$, գ) -1 , դ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$:
- 190.** ա) $\cos \alpha = -0,8$; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$, բ) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg} \alpha = -1$:

193. Ցուցում: Օգտվեք բերման բանաձևերից:
198. 30° :
199. $6\sqrt{2}$ սմ:
201. 30° կամ 150° :
202. Ցուցում: Օգտվեք սինուսների թեորեմից:
204. Ցուցում: Օգտվեք սինուսների թեորեմից:
205. 12 սմ:
206. 15° , 30° , 135° կամ 30° , 45° , 105° :
207. Ցուցում: Առաջացած եռանկյունների համար կիրառեք սինուսների թեորեմը՝ հաշվի առնելով, որ հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առնաթեր անկյունները հավասար են:
209. Ցուցում: Օգտվելով սինուսների թեորեմից՝ ցույց տվեք, որ $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$:
210. $\frac{85}{8}$ դմ:
211. $2\sqrt{3}$ սմ:
212. $\sqrt{97}$ սմ:
213. $-0,1$:
214. 2 դմ կամ 4 դմ:
215. $\sqrt{10}$ սմ:
216. $3\sqrt{19}$ դմ:
217. $\sqrt{10}$ սմ:
218. $\sqrt{26}$ սմ:
219. Օգտվելով կոսինուսների թեորեմից՝ գտեք երրորդ կողմը, ապա օգտվեք Պյութագորասի թեորեմին հակադարձ թեորեմից:
220. $\frac{a\sqrt{13}}{3}$:
221. 6 սմ:
222. $-\frac{5}{16}$, $\frac{37}{40}$:
223. B-ից դուրս եկածը:
224. Ոչ:
225. ա) սուրանկյուն է, բ) սուրանկյուն է, գ) բութանկյուն է:

- 227.** Ուղղանկյուն եռանկյուն է:
- 228.** $\sqrt{22}$ սմ:
- 229.** $4\sqrt{3}$ սմ, 10 սմ:
- 230.** 10 դմ, 14 դմ:
- 231.** Ցուցում: Օգտվեք կետ 21-ի հետևանք 3-ից:
- 232.** 9,5 դմ:
- 233.** 30 սմ: Ցուցում: Օտվեք 231 խնդրից:
- 234.** Ցուցում: Օգտվելով 231 խնդրից՝ միջնագծերի քառակուսիներն արտահայտեք եռանկյան կողմերի քառակուսիներով:
- 235. ա)** $a \approx 9,17$ սմ, $\angle B \approx 22,67^\circ$, $\angle C \approx 112,33^\circ$, **բ)** $c \approx 7,32$ սմ, $\angle A \approx 43,12^\circ$, $\angle B \approx 106,88^\circ$, **գ)** $b \approx 10,58$ սմ, $\angle A \approx 40,89^\circ$, $\angle C \approx 79,11^\circ$:
- 236. ա)** $a \approx 6,69$ սմ, $\angle B \approx 17,88^\circ$, $\angle C \approx 142,12^\circ$, **բ)** $b \approx 13,6$ սմ, $\angle A \approx 26,78^\circ$, $\angle C \approx 23,22^\circ$:
- 237. ա)** $\angle B = 75^\circ$, $a \approx 8,07$ սմ, $c \approx 6,59$ սմ, **բ)** $\angle A = 105^\circ$, $b \approx 4,14$ սմ, $c \approx 5,86$ սմ, **գ)** $\angle C = 30^\circ$, $b = 12$ սմ, $a \approx 20,79$ սմ:
- 238. ա)** $\angle B = 130^\circ$, $a \approx 11,75$ սմ, $c \approx 3,17$ սմ, **բ)** $\angle C = 30^\circ$, $a = 39,39$ սմ, $b \approx 30,64$ սմ:
- 239. ա)** $\angle A = 90^\circ$, $\angle B \approx 22,62^\circ$, $\angle C \approx 67,38^\circ$, **բ)** $\angle A \approx 38,21^\circ$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C \approx 21,79^\circ$, **գ)** $\angle A \approx 36,71^\circ$, $\angle B \approx 94,94^\circ$, $\angle C \approx 48,35^\circ$:
- 240. ա)** $\angle A \approx 121,86^\circ$, $\angle B \approx 18,57^\circ$, $\angle C \approx 39,57^\circ$, **բ)** $\angle A \approx 123,75^\circ$, $\angle B \approx 29,93^\circ$, $\angle C \approx 26,32^\circ$:
- 241. ա)** $\angle B \approx 44,43^\circ$, $\angle C \approx 105,57^\circ$, $c \approx 19,27$ սմ, **բ)** $\angle B \approx 135,57^\circ$, $\angle C \approx 14,43^\circ$, $c \approx 4,98$ սմ:
- 242.** $2\sqrt{13}$ սմ, $2\sqrt{37}$ սմ:
- 243.** $\sqrt{30}$ սմ:
- 244.** $6\sqrt{7}$ սմ: Ցուցում: Օգտվելով սինուսների թեորեմից՝ գտեք BC-ն, ապա օգտվելով կոսինուսների թեորեմից՝ գտեք AM-ը:
- 245.** ≈ 310 մ:
- 246.** ≈ 41 մ:
- 247.** $\approx 25,5$ լուսատարի:
- 248.** $28\sqrt{2}$ սմ²:

251. 10,625 սմ:

252. $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ սմ:

253. $\frac{25}{6}$ դմ:

254. Ցուցում: Օգտվեք սինուսների թեորեմից կամ $S = \frac{abc}{4R}$ բանաձևից:

255. $\frac{2}{15}$:

256. $\frac{1}{3}$:

257. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ սմ²:

258. Ցուցում: Օգտվեք $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ բանաձևից:

259. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ սմ²:

260. 18 սմ²:

261. $70\sqrt{3}$ սմ²:

263. 45°, 135°, 45°, 135°:

264. 5 ս, 10 ս, 5 ս, 10 ս:

265. 6 սմ, 8 սմ, 6 սմ, 8 սմ:

266. Ցուցում: Օգտվեք $S = ab \sin \alpha$ բանաձևից:

267. Ցուցում: Օգտվեք $S = ab \sin \alpha$ բանաձևից:

268. 8 սմ:

269. 60 սմ²:

270. 5 դմ:

271. 3 դմ:

272. 30 սմ²:

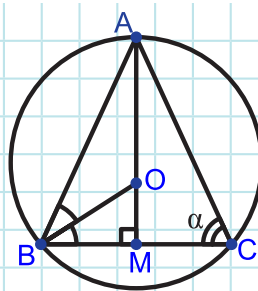
273. Ցուցում: Օգտվեք $S = pr$ բանաձևից և նման եռանկյունների մակերեսների հարաբերության մասին թեորեմից:

274. $\frac{8}{3}$ սմ:

275. $\sqrt{3}$ սմ:

276. $2\sqrt{66}$ սմ²;
278. 48 դմ²;
279. 21 սմ, 10 սմ, 17 սմ:
280. 8 դմ:
281. 54 սմ²; 7,5 սմ:
282. 84 սմ²;
283. 48 սմ:
284. 1050 սմ²;
285. 1224 սմ²;
286. 96 սմ²;
287. 6 դմ:
288. 252 սմ²;
289. 12 սմ:
290. 60°, 120°, 60°, 120°:
291. 15 սմ:
292. 120 դմ²;
293. 168 սմ²;
295. 28 սմ²;
296. 60°:
297. 30°:
298. 0,96:
299. Ցուցում: Օգտվեք $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \alpha$ բանաձևից:
300. 18 սմ²;
301. 4 սմ, 4 սմ, 4 սմ, 4 սմ, $\sqrt{2}$ սմ:
302. $6\sqrt{3}$:
303. $\vec{a}$ և $\vec{c}$ վեկտորների:
304. 4:
305. **գ)** 60°, **դ)** 120°, **ե)** 30°, **զ)** 90°:
306. 120°:
308. $\overrightarrow{AC}$ և $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD}$ և $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{DC}$:
309. 25:
310. -144:

311. Ցուցում: Հաշվի առեք, որ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$:
312. -18 :
313. $\vec{b}$ -ն և $\vec{c}$ -ն:
315. 0° :
316. $\cos A \approx 0,86$, $\cos B \approx 0,51$, $\cos C = 0$:
317. Ցուցում: Հաշվի առեք, որ $(\vec{i} + \vec{j}) \cdot (\vec{i} - \vec{j}) = |\vec{i}|^2 - |\vec{j}|^2$, իսկ $|\vec{i}|^2 = |\vec{j}|^2$:
318. Ցուցում: Ենթադրենք՝ տրված է ABCD շեղանկյունը: Նշանակեք՝ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ և $\overrightarrow{DB}$ ու $\overrightarrow{AC}$ վեկտորներն արտահայտեք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով: Ցույց տվեք, որ $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$:
319. ա) բ) դեպքում, բ) ա) և դ) դեպքերում, գ) գ) դեպքում:
320. ա) -1 , բ) $-\cos \alpha$, գ) 1 , դ) $\sin \alpha$:
321. ա) $\sqrt{2}$, բ) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$:
322. $2 + 2\sqrt{3}$ սմ: Ցուցում: Ենթադրենք՝ ABC եռանկյան C ուղիղ անկյան գագաթից տարված CD կիսորդը $\sqrt{6}$ սմ է, իսկ $\angle A = 30^\circ$: CBD և CAD եռանկյուններից, օգտվելով սինուսների թեորեմից, գտեք BD-ն և DA-ն:
323. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \sin 2\alpha$: Ցուցում: Ենթադրենք՝ այդ եռանկյունը BC հիմքով ABC եռանկյունն է (նկ. 133): A անկյունն արտահայտեք α -ով և սինուսների թեորեմի միջոցով գտեք R-ը, իսկ r-ը գտեք BMO ուղղանկյուն եռանկյունուց:



Նկար 133

324. 8 սմ: Ցուցում: Օգտվելով նրանից, որ AOB եռանկյունը հավասարաբարուն է, իսկ BO-ն կիսում է A անկյունը՝ գտեք $\angle ABO$ -ն և $\angle BDA$ -ն: Ապա ABD եռանկյան համար կիրառեք սինուսների թեորեմը:

325. 2 սմ:

326. $5\sqrt{41}$ սմ²:

327. Լուծում: Ենթադրենք՝ ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնը O -ն է, իսկ ներգծած շրջանագծի կենտրոնը՝ O_1 -ը: Դիտարկենք այն դեպքը, երբ $d \neq 0$ (նկ. 134): Ենթադրենք նաև, որ A և B անկյունների կիսորդները արտագծած շրջանագիծը հատում են A_1 և B_1 կետերում, իսկ OO_1 ուղիղը արտագծած շրջանագիծը հատում է M և N կետերում: Ըստ հատվող լարերի հատկության՝ կունենանք.

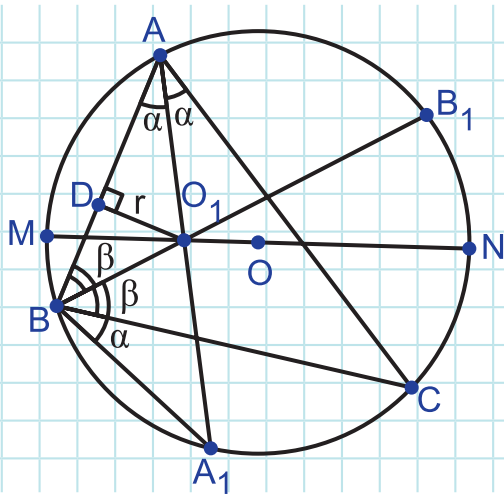
$$MO_1 \cdot O_1N = AO_1 \cdot O_1A_1 \text{ կամ } (R-d)(R+d) = AO_1 \cdot O_1A_1:$$

Որպես A_1C աղեղի վրա հենված ներգծյալ անկյուն՝ $\angle A_1BC = \alpha$: Հետևաբար $\angle O_1BA_1 = \alpha + \beta$: Որպես BAO_1 եռանկյան արտաքին անկյուն՝ $\angle BO_1A_1 = \alpha + \beta$: Ուրեմն $A_1O_1 = BA_1$: BA_1 -ը գտնենք

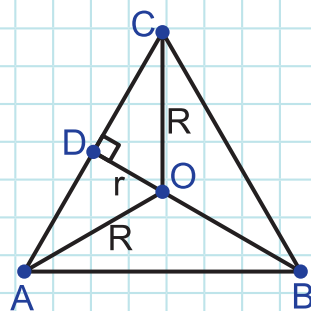
$$ABA_1 \text{ եռանկյունուց՝ կիրառելով սինուսների թեորեմը. } \frac{BA_1}{\sin \alpha} = 2R$$

կամ $BA_1 = 2R \sin \alpha$: ADO_1 ուղղանկյուն եռանկյունուց էլ ունենք, որ

$$AO_1 = \frac{r}{\sin \alpha}:$$



Նկար 134



Նկար 135

$$\begin{aligned} \text{Այսպիսով՝ } (R-d)(R+d) &= AO_1 \cdot O_1A_1 = \frac{r}{\sin \alpha} \cdot BA_1 = \frac{r}{\sin \alpha} \cdot 2R \sin \alpha = \\ &= 2Rr: \text{ Ուրեմն } R^2 - d^2 = 2Rr \text{ կամ } d^2 = R^2 - 2Rr: \end{aligned}$$

Եթե $d = 0$ (O -ն և O_1 -ը համընկնում են) (նկ. 135), ապա կստացվի, որ $AC = 2\sqrt{R^2 - r^2}$: Նույնը կստացվի նաև մյուս կողմերի համար,

այսինքն՝ կպարզվի, որ եռանկյունը հավասարակողմ է: Իսկ հավասարակողմ եռանկյան դեպքում $r = \frac{R}{2}$: Հետևաբար $R^2 - 2Rr = 0$:

Ուրեմն էլյերի բանաձևը ճիշտ է նաև այդ դեպքում:

328. 2 սմ, $4\sqrt{3}$ սմ:

329. 75 դմ:

330. $\frac{3}{5}$, 192 սմ²:

331. $2\sqrt{19}$ սմ, $\sqrt{37}$ սմ: Ցուցում: ADC և BCD եռանկյունների համար կիրառել կոսինուսների թեորեմը:

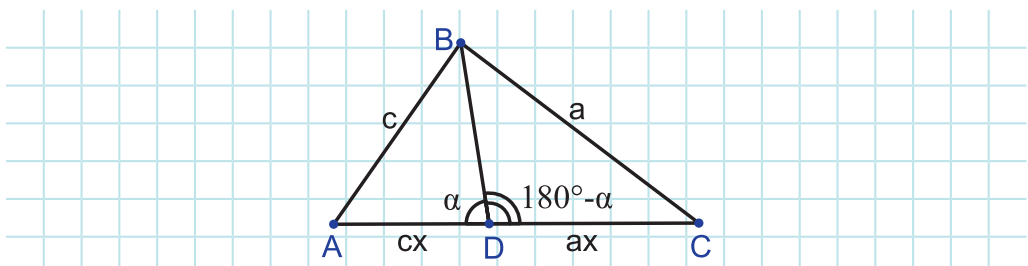
332. $2\sqrt{10}$ սմ: Ցուցում: Օգտվելք 231 խնդրի բանաձևից:

333. $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{2ab}$: Ցուցում: Հաշվի առնել, որ եթե C ուղիղ անկյունով ABC եռանկյան կիսորդները հատվում են O կետում, ապա $\angle AOB = 90^\circ + \frac{\angle C}{2} = 135^\circ$: Կիրառել կոսինուսների թեորեմը:

334. $2\sqrt{\frac{29}{5}}$ սմ: Ցուցում: Ենթադրենք՝ C ուղիղ անկյունով ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագիծը AB ներքնաձիգը շոշափում է M կետում: Օգտվելով նույն կետից տարված շոշափողների հավասարությունից՝ գտել AM-ը: Ապա գտել A անկյան կոսինուսն ու AMC եռանկյան համար կիրառել կոսինուսների թեորեմը:

335. 1 սմ: Ցուցում: Ենթադրենք՝ ներգծած շրջանագծի O կենտրոնով ABC եռանկյունում $AB = 1$ սմ, $BC = 2$ սմ, $\angle B = 60^\circ$: Կոսինուսների թեորեմով գտել AC-ն: Հաշվի առնելով, որ O-ն եռանկյան կիսորդների հատման կետն է՝ գտել AOC անկյունը: AOC եռանկյան համար կիրառել սինուսների թեորեմը:

336. Ցուցում: Նշանակելք $BC = a$, $AB = c$, $\angle BDA = \alpha$: Եթե AD-ն նշանակելք cx -ով, ըստ կիսորդի հատկության, DC-ն կլինի ax (նկ. 136):



Նկար 136

Հաշվի առնելով, որ $\angle BDC = 180^\circ - \alpha$ և կիրառելով կոսինուսների թեորեմը՝ կունենանք.

$$c^2 = BD^2 + c^2 x^2 - 2cx \cdot BD \cos \alpha, \quad a^2 = BD^2 + a^2 x^2 + 2ax \cdot BD \cos \alpha:$$

Սրանցից առաջինը բազմապատկելք a -ով, իսկ երկրորդը՝ c -ով և գումարելք իրար: Ստացվածից գտնելք BD^2 -ին:

337. 10 սմ:

338. Ցուցում: Ենթադրենք՝ եռանկյան էջերը a և b են, իսկ ներգծած շրջանագծի շառավիղը՝ r : Ներքնաձիգի՝ խնդրում նշված հատվածները նշանակենք m -ով և n -ով, իսկ եռանկյան մակերեսը՝ S -ով: Կունենանք. $2S = ab = (m+r)(n+r)$: Մնում է ձևափոխել ստացվածը՝ հաշվի առնելով, որ $p = m + n + r$, իսկ $pr = S$:

339. Ցուցում: Օգտվելք $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$ բանաձևից:

340. Ցուցում: Օգտվելք $S = \frac{1}{2} d^2 \sin \alpha$ բանաձևից:

341. $\frac{\sqrt{65}}{8}$ սմ: Ցուցում: Հերոնի բանաձևով գտնելք եռանկյան մակերեսը, ապա $R = \frac{abc}{4S}$ և $r = \frac{S}{p}$ բանաձևերով՝ R -ն ու r -ը: Հետո կիրառելք էյլերի բանաձևը:

342. 2 դմ: Ցուցում: Նախ գտնելք զուգահեռագծի մակերեսը, ապա մեծ կողմին տարված բարձրությունը:

343. 7 սմ: Ցուցում: Օգտվելով արտագծյալ քառանկյան հատկությունից՝ գտնելք AD -ն: Հերոնի բանաձևով գտնելք ABC և ADC եռանկյունների մակերեսները, ապա օգտվելք $S = pr$ բանաձևից:

344. ա) 30° , բ) 120° , գ) 180° , դ) 90° :

345. $\sqrt{37}$, $\sqrt{13}$:

346. -2 :

347. 0:

ԳԼՈՒԽ III

348. Ոչ:

351. 120° :

352. 12:

353. 18:

354. 14 սմ:

355. 45° :

356. $6\sqrt{3}$ դմ:

357. 60° :

360. 90° :

361. 70 սմ:

362. Ոչ:

363. Ոչ:

364. $\frac{360^\circ}{n}$: Ցուցում: Միացրեք կանոնավոր n -անկյան O կենտրոնը բազմանկյան բոլոր գագաթներին և ցույց տվեք, որ առաջացած եռանկյունները հավասար են:

365. Ցուցում: Օգտվեք 364 խնդրից:

366. $36\sqrt{3}$ սմ²:

367. Ցուցում: Օգտվեք 364 խնդրից:

368. $22,5^\circ$:

369. Ցուցում: Օգտվելով 364 խնդրից՝ ցույց տվեք, որ AOD անկյունը փոխած անկյուն է:

370. $\frac{180^\circ}{n}$:

371. Ցուցում: Օգտվեք 370 խնդրից:

372. 60 սմ:

373. 12 դմ:

374. $5\sqrt{2}$ սմ:

376. 4:

377. 6:

378. Ոչ:

379. Այո:

380. $14\sqrt{3}$ սմ:

381. $4\sqrt{2}$ դմ:

382. 54 սմ:
383. $3\sqrt{3}$ սմ:
384. 5 դմ:
385. 72 սմ:
386. 96 սմ:
387. $\sqrt{2}$:
388. $2\sqrt{2}$:
389. $\sqrt{3}$:
390. $\sqrt{3}$:
391. $\frac{16\sqrt{3}}{9}S$:
392. $72\sqrt{2}$ սմ²:
393. 4 սմ:
394. $50\sqrt{3}$ սմ²:
395. 4:
396. $\frac{4}{3}S$:
397. $\approx 24,49$ սմ:
398. $\approx 1,46$:
399. 26π սմ:
401. 3π սմ:
402. 12π դմ:
403. $\frac{76}{\pi}$ սմ:
404. $\approx 76,4$ սմ:
405. 8 մարդ:
406. $\approx 57,6$ սմ:
407. ≈ 10 սմ:
408. 2π սմ:
409. Ափով վազելով:
410. $8\sqrt{3}\pi$ սմ:
411. $\approx 61,26$ կմ/ժ:
412. $\approx 28,64^\circ$:

413. $\frac{5\pi}{9}$ սմ, $\frac{25\pi}{9}$ սմ, $\frac{20\pi}{3}$ սմ:

414. 35° :

415. 3π սմ:

416. Ցուցում: Ցույց տվեք, որ $\angle ACB = 60^\circ$ և օգտվեք 156 խնդրից:

417. 36π դմ²:

418. 5 սմ:

419. 9:

420. $\frac{147\pi}{2}$ սմ²:

421. 15 դմ:

422. $\left(\frac{3125\pi}{12} - 156,25\right)$ սմ²:

423. $(21\pi + 9)$ դմ²:

424. 72π սմ²:

425. $\approx 958,63$ կմ:

426. $\approx 43,7$ մ:

427. ≈ 1228 մ:

428. 16π սմ²:

429. 2:

430. $8\sqrt{\frac{\pi}{\pi-2}}$ սմ:

431. 32π դմ²:

432. $\frac{\sqrt{2}}{2}R$:

433. 20 սմ:

434. Մեկ մեծը:

436. $\frac{49}{9}\pi$ սմ²:

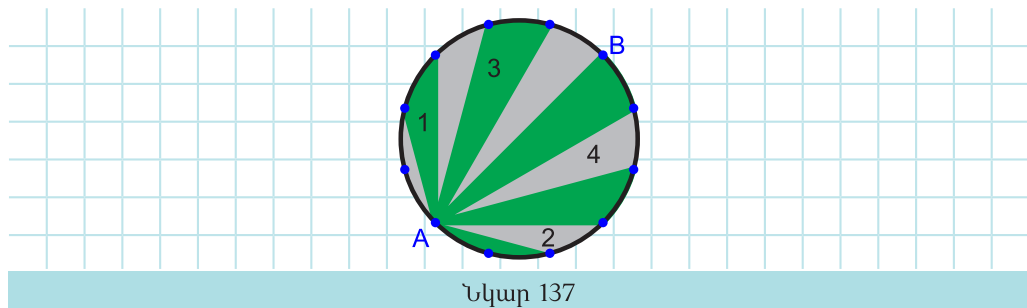
437. $\frac{64\pi - 48\sqrt{3}}{3}$ սմ²:

438. $(4\sqrt{3} - 2\pi)$ սմ²:

439. 6 սմ²: Ցուցում: Քանի որ եռանկյան անկյունների գումարը 180° է, ապա ներկված սեկտորների մակերեսների գումարը հավասար է նույն շառավղով կիսաշրջանի մակերեսին:

- 440.** $\approx 78,5$ մ: Ցուցում: Օղակի մակերեսը հավասար է $0,5$ մմ լայնությամբ և որոնելի երկարությամբ ուղղանկյան մակերեսին:
- 441.** $1,5$:
- 442.** $\frac{100\pi - 75\sqrt{3}}{3}$ սմ²: Ցուցում: Նկատենք, որ AED եռանկյունը հավասարակողմ է, իսկ կապույտ պատկերը կազմված է սեկտորից ու սեգմենտից:
- 443.** 40 սմ, 40 սմ:
- 444.** Ցուցում: Ենթադրենք՝ AC և BD լարերը հատվում են K կետում, իսկ շրջանագծի շառավիղը R է: Պարզ է, որ AOC եռանկյունը R սրունքով հավասարասրուն եռանկյուն է: Օգտվելով նրանից, որ $OK = \frac{AO}{2}$, ցույց տվեք, որ $\angle AOC = 120^\circ$: Հետևաբար $\angle ABC = 60^\circ$:
- 445.** $54\sqrt{3}$ սմ²: Ցուցում: ABC եռանկյունուց, կիրառելով կոսինուսների թեորեմը, գտեք վեցանկյան կողմի քառակուսին:
- 446.** 180 սմ²: Ցուցում: ABD եռանկյունում $AD = 2AB$, $\angle BAD = 60^\circ$: Կիրառելով եռանկյան մակերեսի $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ բանաձևը՝ գտեք վեցանկյան կողմի քառակուսին:
- 447. ա)** Ցուցում: Միացրեք A_1 -ը A_5 -ին և ցույց տվեք, որ $A_2A_5A_1$ և $A_5A_1A_6$ խաչադիր անկյունները հավասար են:
- բ)** Ցուցում: Նախ ցույց տվեք, որ A_1A_5 և A_2A_6 հատվածները ութանկյանն արտագծած շրջանագծի տրամագծերն են, ապա օգտվեք տրամագծի վրա հենված ներգծյալ անկյան հատկությունից:
- 448.** 24 սմ:
- 449.** 16 դմ:
- 450.** $\frac{2Ra}{\sqrt{a^2 + 4R^2}}$:
- 451.** $\frac{2Rb}{\sqrt{4R^2 - b^2}}$:
- 452.** 2 : Ցուցում: Օգտվեք $r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$ և $S = \pi R^2$ բանաձևերից:
- 453.** 9π սմ²:
- 454.** $\frac{3\sqrt{3} - \pi}{6} R^2$:

455. $\frac{1}{2}$: Ցուցում: Նկատենք, որ $1 = 2$, $3 = 4$, իսկ AB -ն տրամագիծ է (նկ. 137):



456. $\frac{1}{2}$:

457. 18 սմ^2 : Ցուցում: Միացրեք A և B կետերը, տարեք C անկյան կիսորդը: Կարմիր և դեղին սեգմենտների տեղերը փոխեք:

458. ա) $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)R^2$, բ) $\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)R^2$:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ

1. 20° :
2. 56° :
3. 8 սմ:
4. 240 սմ^2 :
5. 16 սմ:
6. 13 դմ:
7. 11 սմ^2 :
8. 3 սմ^2 :
9. 90° :
10. 36 դմ^2 :
11. 60 դմ^2 :
12. 96 սմ^2 :
13. 25 սմ^2 :
14. 12 սմ:
15. 2:
16. 8 սմ:
17. 96 սմ^2 :
18. 9 սմ:
19. 36 սմ^2 :
20. 24 սմ^2 :
21. 9 սմ:
22. 30 դմ^2 :
23. 15 սմ:
24. 10 սմ:
25. 10 սմ:
26. 6 սմ և 9 սմ:
27. 3 սմ:
28. 150 սմ^2 :
29. 1 սմ:
30. 96 սմ^2 :

31. 84 սմ:
32. 20 սմ:
33. 6 սմ:
34. 36° :
35. 4 սմ կամ 9 սմ:
36. 2,88 սմ:
37. 13 սմ:
38. 3 սմ:
39. 18 սմ^2 :
40. 4 դմ:
41. 2 սմ:
42. 4:
43. 8:
44. 0,96:
45. $-0,6$:
46. 8 սմ^2 :
47. 40 սմ^2 :
48. 80 դմ^2 :
49. 3 սմ:
50. 4 դմ:
51. 6 դմ:
52. 18 դմ:
53. 40° :
54. 70° :
55. 12 սմ:
56. 6 սմ, 12 սմ կամ 12 սմ, 6 սմ:
57. 12 սմ:
58. 13 սմ:
59. 6 դմ:
60. 5 սմ:
61. 30 սմ:
62. 8 սմ:

63. 10 դմ:
65. 10 սմ:
66. 5 դմ:
67. 10 սմ:
68. 6 սմ:
69. 13 դմ:
70. 4 սմ:
71. 10 սմ:
72. 7 սմ:
73. 24 սմ^2 :
74. 20 սմ:
75. 25 սմ:
76. 8 սմ:
77. 108 դմ^2 :
78. 30° :
79. 300 սմ^2 :
80. 2π սմ:
81. 4π սմ:
82. 14π սմ:
83. $\sqrt{3}$ դմ²:
84. 10 դմ:
85. 96 սմ^2 :
86. 24 սմ:
87. $24\sqrt{3}$ դմ²:
88. 2:
89. $2\sqrt{6}$ սմ:
90. 9π սմ²:
91. 4π սմ²:
92. 6:
93. 25π սմ²:
94. 16 սմ^2 :
95. 20π սմ²:

- 96. $(-1; 2)$:
- 97. $(6; 2)$:
- 98. 4:
- 99. $(8; 0)$:
- 100. 97:
- 101. 7:
- 102. 2:
- 103. $\sqrt{34}$, $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 34$:
- 104. $(x-5)^2 + (y-8)^2 = 52$:
- 105. $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$:
- 106. $y = -x + 3$:
- 107. Շեղանկյուն:
- 108. 3:
- 109. $\{-6; -1\}$:
- 110. ± 12 :
- 111. $9\vec{i} - 6\vec{j}$:
- 112. 10:
- 113. 12:
- 114. -15 :
- 115. 19:
- 116. 29:
- 117. 0:
- 118. 90° :
- 119. 45° :
- 120. 60° :
- 121. 64:

ԱՌԱՐԿԱՅԱՑԱՆԿ

Աղեղ

- աղեղի աստիճանային չափ – 16, 17

Անկյան

- կոսինուս – 58
- կոտանգենս – 58
- սինուս – 58
- տանգենս 58

Անկյուն

- կենտրոնային – 15
- ներգծյալ 17

Բազմանկյուն

- արտագծյալ – 36
- ներգծյալ – 37

Բազմանկյանը

- արտագծված շրջանագիծ – 37
- ներգծված շրջանագիծ – 36

Բանաձև

- աղեղի երկարության – 114
- արտագծյալ բազմանկյան մակերեսի – 85
- բերման – 59, 61
- եռանկյան մակերեսի – 77, 78, 81, 82
- զուգահեռագծի մակերեսի – 79
- էլլերի – 95
- կանոնավոր բազմանկյան անկյան – 99
- կանոնավոր բազմանկյան կողմի և արտագծած շրջանագծի շառավղի – 106
- կանոնավոր բազմանկյան կողմի և ներգծած շրջանագծի շառավղի – 107

- կանոնավոր բազմանկյանն արտագծած և ներգծած շրջանագծերի շառավիղների – 104
- Հերոնի – 82
- շրջանագծի երկարության – 113
- շրջանի մակերեսի – 115
- ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղի – 48
- ուղղանկյուն եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղի – 49
- սեգմենտի մակերեսի – 117
- սեկտորի մակերեսի – 117

Եռանկյան

- չորս նշանավոր կետերը – 33
- Եռանկյանը
- արտագծված շրջանագիծ – 37
 - ներգծված շրջանագիծ – 36
- Երկարություն
- աղեղի – 114
 - շրջանագծի – 113

Թեորեմ

- եռանկյան բարձրությունների կամ դրանց շարունակությունների հատման մասին – 32
- եռանկյան կիսորդի հատման մասին – 30
- եռանկյան կողմերի միջնուղղահայացների հատման մասին – 31
- եռանկյանը շրջանագիծ արտագծելու մասին – 37
- եռանկյանը շրջանագիծ ներգծելու մասին – 36
- կոսինուսների 65
- ներգծյալ անկյան մասին – 17
- սինուսների – 63

Լեմմա – 63

Կանոնավոր բազմանկյուն – 99

Կանոնավոր բազմանկյան

- արտագծված շրջանագիծ – 99
- կենտրոն – 101
- ներգծված շրջանագիծ – 100

Համակենտրոն շրջանագծեր – 10

Հայտանիշ

- շոշափողի – 8

Հատկություն

- արտագծյալ քառանկյան – 39
- եռանկյան կիսորդների – 30
- եռանկյան կողմերի միջնուղղահայացների – 31
- հատվող լարերի – 26
- ներգծյալ քառանկյան – 40
- նույն կետից շրջանագծին տարված շոշափողների հատվածների – 8
- շոշափողի – 7
- շոշափողի ու հատողի հատվածների – 26
- Հիմնական եռանկյունաչափական նույնություն – 59

Մակերեսի բանաձևեր

- եռանկյան – 77, 78, 81, 82
- կանոնավոր բազմանկյան – 85
- շրջանի – 115
- սեգմենտի – 117
- սեկտորի – 117
- քառանկյան – 79, 85, 86

Ներգծյալ

- անկյուն – 17
- բազմանկյուն – 37
- եռանկյուն – 37
- քառանկյուն – 37
- շրջանագիծ – 36

Շոշափողի հատվածներ – 8

Շրջան – 115

Շրջանագծի

– հատող – 6

– շոշափող – 8

Շրջանագծերի

– արտաքին շոշափում – 11

– ներքին շոշափում – 11

– փոխդասավորություն – 10

Շրջանագծին

– արտագծած բազմանկյուն – 36

– արտագծած եռանկյուն – 36

– արտագծած քառանկյուն – 36

– ներգծված բազմանկյուն – 37

– ներգծված եռանկյուն – 37

– ներգծված քառանկյուն – 37

Պայման

– քառանկյան շրջանագիծ ներգծելու – 41

– քառանկյանը շրջանագիծ արտագծելու – 43

Սահմանում

– աղեղի աստիճանային չափի – 16

– անկյան կոսինուսի – 58

– անկյան կոտանգենսի – 58

– անկյան սինուսի – 58

– անկյան տանգենսի – 58

– կանոնավոր բազմանկյան – 99

– կենտրոնային անկյան – 15

– համակենտրոն շրջանագծերի – 10

– միավոր կիսաշրջանագծի – 57

– ներգծյալ անկյան – 17

– շրջանագծի հատողի – 6

- շրջանագծի շոշափողի – 8
- վեկտորների կազմած անկյան – 88
- վեկտորների սկալյար արտադրյալի – 89

Վեկտորների

- կազմած անկյուն – 88
- սկալյար արտադրյալ – 89

Փոխդասավորություն

- ուղղի և շրջանագծի – 6, 8
- երկու շրջանագծերի – 10

Քառանկյուն

- արտագծյալ
- ներգծյալ

Քառանկյանը

- արտագծած շրջանագիծ – 37
- ներգծված շրջանագիծ – 36
- շրջանագիծ արտագծելու պայմանը – 41
- շրջանագիծ ներգծելու պայմանը – 43

ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ԷԼԵԿՏՐՈՆԱՅԻՆ ՌԵՍՈՒՐՍՆԵՐ

1. Աթանասյան Լ. Ս., Բուտուզով Վ. Ֆ., Կոդունց Ս. Բ., Պոզնյակ Է. Հ., Յուդինա Ի. Ի. Երկրաչափություն 8, դասագիրք, –Եր.: Զանգակ 97: 2017:
2. Աթանասյան Լ. Ս., Բուտուզով Վ. Ֆ., Կոդունց Ս. Բ., Պոզնյակ Է. Հ., Յուդինա Ի. Ի. Երկրաչափություն 9, դասագիրք, –Եր.: Զանգակ 97: 2018:
3. Шень А. Геометрия в задачах. – М.: МЦНМО, 2013.
4. Парахневич, В.А., Парахневич Е.В. Сборник задач по геометрии. VIII –X классы. – Мн.: Нар. Асвета, 1972.
5. Гордин Р. К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы. – М.: МЦНМО, 2006.
6. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. – М.: МЦНМО: 2006.
7. Делоне Б. Н. Задачник по геометрии. – М.; Л; ГИТТЛ: 1950.
8. Перельман Я.И. Веселые задачи. – М.: АСТ. 2003.
9. Александров И.И. Сборник геометрических задач на построение. – М.: МЦНМО: 2010.
10. Кукарцева Г.И. Сборник задач по геометрии в рисунках и тестах. – М.: Аквариум: 1999.
11. Աղեկյան Գ.Վ. Երկրաչափության խնդրագիրք ցուցումներով: – Եր.: Էդիտ Պրինտ: 2021:
12. Աղեկյան Գ.Վ. GeoGebra–Դինամիկ մաթեմատիկա բոլորի համար: – Եր.: Անտարես: 2012:
13. <https://mathnet.am>
14. <https://www.problems.ru>
15. <https://zadachi.mccme.ru>

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԳԼՈՒԽ I ՇՐՋԱՆԱԳԻԾ

§1. Շրջանագծի շոշափող	4
1. Ուղղի և շրջանագծի փոխդասավորությունը	4
2. Շրջանագծի շոշափող	7
3. Երկու շրջանագծերի փոխդասավորությունը	10
§2. Կենտրոնային և ներգծյալ անկյուններ	15
4. Շրջանագծի աղեղի աստիճանային չափը	15
5. Թեորեմ ներգծյալ անկյան մասին	17
6. Ներգծյալ անկյան մասին թեորեմի այլ հետևանքներ	19
§ 3. Անշուրթյուններ հատվող լարերի, հատողի և շոշափողի միջև	26
7. Հատվող լարերի հատկությունը:	26
8. Շրջանագծի հատողի և շոշափողի հատկությունը	26
§4. Եռանկյան չորս նշանավոր կետերը	30
9. Եռանկյան կիսորդների և կողմերի միջուղահայացների հատկությունները	30
10. Թեորեմ եռանկյան բարձրությունների հատման մասին	32
§ 5. Ներգծյալ և արտագծյալ շրջանագծեր	36
11. Եռանկյանը ներգծած շրջանագիծը	36
12. Եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը	37
13. Ներգծյալ և արտագծյալ քառանկյունների հատկությունները	39
14. Քառանկյանը շրջանագիծ ներգծելու և արտագծելու պայմանները	41
§ 6. Ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած և արտագծած շրջանագծերը	48
15. Ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած շրջանագիծը	48
16. Ուղղանկյուն եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը	49
Լրացուցիչ խնդիրներ	52

ԳԼՈՒԽ II

ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱԶԱՓԱԿԱՆ ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ: ԵՐԿՐԱԶԱՓԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿՆԵՐ

§7. Անկյան սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը.....	57
17. 0° -ից 180° անկյան սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը, կոտանգենսը.....	57
18. Հիմնական եռանկյունաչափական նույնությունը: Բերման բանաձևեր: Կետի կորդինատների հաշվման բանաձևերը.....	59
§8. Առնչություններ եռանկյան կողմերի և անկյունների միջև.....	63
19. Սինուսների թեորեմը	63
20. Կոսինուսների թեորեմը	65
21. Կոսինուսների թեորեմի որոշ հետևանքներ	66
§9. Եռանկյան լուծումը	71
22. Եռանկյան լուծումը	71
23. Չափողական աշխատանքներ.....	73
§10. Եռանկյան և գուգահեռագծի մակերեսները	77
24. Եռանկյան մակերեսը.....	77
25. Զուգահեռագծի մակերեսը.....	78
§11. Եռանկյան մակերեսի այլ բանաձևերը.....	81
26. Եռանկյան մակերեսը ներգծած շրջանագծի շառավղի միջոցով.....	81
27. Հերոնի բանաձևը	82
§12. Բազմանկյան մակերեսի այլ բանաձևեր.....	84
28. Բազմանկյան մակերեսը ներգծած շրջանագծի շառավղի միջոցով	84
29. Քառանկյան մակերեսը անկյունագծերի միջոցով	86
§13. Վեկտորների սկալյար արտադրյալը.....	88
30. Երկու վեկտորների կազմած անկյունը: Վեկտորների սկալյար արտադրյալը	88
31. Վեկտորների սկալյար արտադրյալը կորդինատներով	90
Լրացուցիչ խնդիրներ	94

ԳԼՈՒԽ III **ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ: ՇՐՋԱՆԱԳԻԾ, ՇՐՋԱՆ**

§14. Կանոնավոր բազմանկյուն.....	98
32. Կանոնավոր բազմանկյուն.....	98
33. Կանոնավոր բազմանկյանն արտագծված շրջանագիծը	99
34. Կանոնավոր բազմանկյանը ներգծված շրջանագիծը	100
§15. Կանոնավոր բազմանկյանն արտագծած և ներգծած	
շրջանագծերի շառավիղները.....	104
35. Կանոնավոր բազմանկյանն արտագծած և ներգծած շրջանագծերի շառավիղների կապը	104
36. Կանոնավոր բազմանկյան կողմի և արտագծած, ներգծած շրջանագծերի շառավիղների կապը	106
37. Կանոնավոր բազմանկյան մակերեսը	108
§16. Շրջանագիծ և շրջան	112
38. Շրջանագծի երկարությունը, աղեղի երկարությունը	112
39. Շրջանի մակերեսը, շրջանային սեկտորի և սեգմենտի մակերեսները	115
Լրացուցիչ խնդիրներ	124
ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ	128
ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ, ՅՈՒՅՈՒՄՆԵՐ, ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ	138
ԱՌԱՐԿԱՅԱՑԱՆԿ.....	163
ԼՐԱՅՈՒՅԻՉ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ԷԼԵԿՏՐՈՆԱՅԻՆ ՌԵՍՈՒՐՍՆԵՐ	168

Գագիկ Աղեկյան

ԵՐԿՐԱԶԱՓՈՒԹՅՈՒՆ 9

*Երաշխավորված է ՀՀ կրթության, գիտության,
մշակույթի և սպորտի նախարարության կողմից*

Գրքի ձևավորման համար օգտագործվել են
Վասիլի Կանդինսկու որոշ նկարներ:



Գրքի որոշ նկարներ վերցվել են <https://www.wikipedia.org-hy>

Հրատարակչության խմբագիր՝ Մարգարիտ Արիստակեսյան
Համակարգչային ձևավորումը՝ Հեղինե Փիլոյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Արտակ Հարությունյանի



ԷԴԻՓ ՊՐԻՆՏ
Երևան, Դ. Մալյան 43
հեռ.՝ (374 10) 520 848
www.editprint.am
info@editprint.am

Տառատեսակ՝ GHEA Hayk School:
Չափսը՝ 70x100 1/16, թուղթը՝ օֆսեթ:
Ծավալը՝ 10,75 մամուլ:
Տպաքանակը