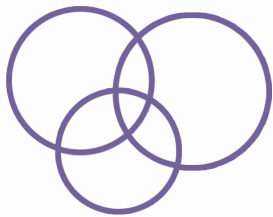
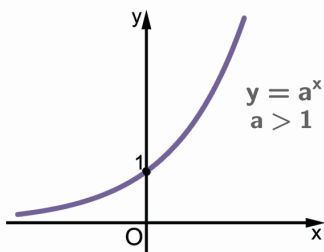
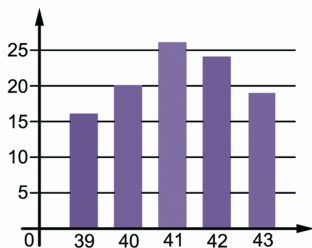


ԳԱԳԻԿ
ԱՂԵԿՅԱՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ ՏԱՐԻԵՐ



Հ Ե Ն Ք Ս Յ Ի Ն
Ծ Ր Վ Ք Ի Ր



11



Երևան - 2026

Աղեկյան Գագիկ

Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր / (11-րդ դասարանի դասագիրք) / Գ. Աղեկյան.- Եր.: Էդիթ Պրինտ, 2026.- 152 էջ:

© Էդիթ Պրինտ, 2026

© Գ. Աղեկյան, 2026

Միրելի փաստանկերորդ դասարանցի

Եթե կարդում եք այս տողերը, ապա Դուք «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի հիմունքներ» առարկան ուսումնասիրում եք ավագ դպրոցի «Հենքային» ծրագրով:

Ավագ դպրոցի «Խորացված» և «Հենքային» ծրագրերը խիստ տարբեր են, մասնավորապես, առաջին ծրագրի համար տարեկան նախատեսված է 170 ժամ, իսկ երկրորդ ծրագրի համար՝ տարեկան 68 ժամ:

«Հենքային» ծրագրով նախատեսված 68 ժամից 22 ժամը միջին դպրոցի որոշ թեմաները կրկնելու համար է: Դա լավ հնարավորություն է այդ թեմաների գիտելիքների բացերը լրացնելու, այդ թեմաների հետ կապված առաջադրանքները կատարելու հմտություններն ամրապնդելու համար:

Բացի դրանից, առաջադրանքները բարդ չեն, թեմաների տեսական մասերում այդ թեմայի առաջադրանքների լուծման բազմաթիվ օրինակներ են ներկայացված: Դրանք մեծացրել են թեմաների տեսական մասերի ծավալները, բայց դա Ձեզ չպետք է վախեցնի:

Հակառակը, հետևելով այդ օրինակներին, Դուք կկարողանաք կատարել համապատասխան տեսակի առաջադրանքները: Ստացված արդյունքները գնահատելուն կօգնի դասագրքի «Պատասխաններ» բաժինը, որտեղ կան համարյա բոլոր խնդիրների պատասխանները: Կան նաև բազմաթիվ խնդիրների լուծումներ: Դրանք կարող են օգտակար լինել նաև հարակից խնդիրների լուծման հետ կապված դժվարությունների դեպքում: **Այս ամենում համոզվելու համար բավական է արագ թերթել դասագիրքը:**

Ցանկության դեպքում Դուք հնարավորություն ունեք յուրացնելու այս ծրագիրը, լուծելու առաջադրանքների մեծ մասը: Այս ծրագրի յուրացումը ձեզ կօգնի նաև առօրյա կյանքում ու կենցաղում, կգարգացնի ձեր տրամաբանությունը, լավ հիմքեր կստեղծի դպրոցի ավարտական քննությունը հանձնելու համար:

Լավատես ու ակտիվ եղեք, և հաջողությունը չի ուշանա: Հիշեք, որ Դուք եք Ձեր առաջընթացի գլխավոր դերակատարը, դասագիրքն ու ուսուցիչը կօգնեն, եթե պատրաստ եք ընդունելու այդ օգնությունը:

Հաջողություն:

$$2x + 3 = 7 \quad \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ -2 \quad - \quad -1 \end{array} \quad \frac{2x + 4}{x + 1} \geq 0$$

$$x^2 + 2x - 8 > 0$$

$$\sqrt{x + 3} = x + 1$$

$$\sqrt{x - 1} < 2$$

$$|x - 7| > 2$$

$$|2x - 3| = 4$$

$$|3x + 1| \leq 5$$

ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Ուսումնասիրելով այս գլուխը՝

- Կվերհիշեք գծային հավասարումների ու անհավասարումների սահմանումներն ու լուծման եղանակները:
- Կվերհիշեք քառակուսային հավասարումների ու անհավասարումների սահմանումներն ու լուծման քայլաշարերը:
- Կվերհիշեք ռացիոնալ հավասարումների ու անհավասարումների սահմանումներն ու լուծման քայլաշարերը:
- Կվերհիշեք մոդուլ պարունակող հավասարումների ու անհավասարումների սահմանումներն ու լուծման քայլաշարերը:
- Կվերհիշեք իռացիոնալ հավասարումների ու անհավասարումների սահմանումներն ու լուծման քայլաշարերը:
- Կամրապնդեք հավասարումներ և անհավասարումներ լուծելու, ինչպես նաև հավասարում կազմելու միջոցով խնդիրներ լուծելու հմտությունները:

§1. Գծային հավասարումներ և անհավասարումներ

□ 1. Գծային հավասարումներ

Վերհիշենք հավասարում, հավասարման արմատ, համարժեք հավասարումներ հասկացությունները:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: Փոփոխական պարունակող հավասարությունը կոչվում է հավասարում:

$$\text{Օրինակ՝ } 2x + 5 = 0, \quad 3y - 1 = y + 2, \quad x^2 + 5x + 6 = 0, \quad \frac{x}{x-1} + \frac{2}{x+3} = 4$$

հավասարությունները մեկ փոփոխականով հավասարումներ են:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: Հավասարման լուծում կամ արմատ կոչվում է փոփոխականի այն արժեքը, որի դեպքում հավասարումը դառնում է ճիշտ հավասարություն:

Օրինակ՝ -2 -ը $x^2 + 5x + 6 = 0$ հավասարման արմատ է, քանի որ x -ի փոխարեն տեղադրելով -2 ՝ կստանանք $4 - 10 + 6 = 0$ ճիշտ հավասարությունը:

Իսկ 0 -ն այդ հավասարման արմատ չէ, քանի որ x -ի փոխարեն տեղադրելով 0 ՝ կստանանք $0 + 0 + 6 = 0$ սխալ հավասարությունը:

Լուծել հավասարումը նշանակում է գտնել դրա բոլոր արմատները կամ ապացուցել, որ այն արմատ չունի:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: Համարժեք հավասարումներ են կոչվում այն հավասարումները, որոնց արմատները նույն թվերն են կամ որոնք արմատ չունեն:

Նշենք, որ.

- 1) եթե հավասարման որևէ գումարելի մի մասից տեղափոխենք մյուս մասը և փոխենք գումարելու նշանը, ապա կստացվի տրված հավասարմանը համարժեք հավասարում,
- 2) եթե հավասարման երկու մասն էլ բազմապատկենք կամ բաժանենք զրոյից տարբեր միևնույն թվի վրա, ապա կստացվի տրված հավասարմանը համարժեք հավասարում:

Վերհիշենք գծային հավասարման սահմանումը և այն երեք հիմնական դեպքերը, որոնք հանդիպում են գծային հավասարումներ լուծելիս:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: $ax = b$ տեսքի հավասարումը, որտեղ x -ը փոփոխական է, իսկ a -ն և b -ն ինչ-որ թվեր են, կոչվում է գծային հավասարում:

a -ն և b -ն կոչվում են գծային հավասարման գործակիցներ:

Դիտարկենք որևէ գծային հավասարում, որի a գործակիցը 0 չէ, օրինակ՝ $3x = 6$ հավասարումը: Բաժանելով հավասարման երկու մասերը 3 -ի վրա՝ կստանանք տրվածին համարժեք $x = 2$ հավասարումը: Հետևաբար, տրված հավասարման միակ արմատը 2 -ն է:

Եթե գծային հավասարման a գործակիցը 0 է, իսկ b գործակիցը 0 չէ, օրինակ՝ $0x = 7$, ապա ակնհայտ է, որ այս հավասարումը լուծում չունի, քանի որ 0 -ն ինչ թվով էլ բազմապատկենք, կստանանք 0 , և ոչ թե 7 :

Եթե գծային հավասարման a և b գործակիցները 0 են՝ $0x = 0$, ապա ցանկացած թիվ այս հավասարման լուծում է, քանի որ 0 -ն ինչ թվով էլ բազմապատկենք, կստանանք 0 :

Այսպիսով՝ $ax = b$ գծային հավասարումը լուծելիս առաջանում են հետևյալ դեպքերը.

- 1) եթե $a \neq 0$, ապա հավասարումը ունի միակ լուծում՝ $x = \frac{b}{a}$,
- 2) եթե $a = 0$, $b \neq 0$, ապա հավասարումը լուծում չունի՝ $x \in \emptyset$,
- 3) եթե $a = 0$, $b = 0$, ապա ցանկացած թիվ հավասարման լուծում է՝ $x \in \mathbb{R}$:

Հաճախ հավասարումը տրված է լինում այլ տեսքով, բայց, օգտվելով տրվածին համարժեք հավասարում ստանալու վերևում նշված քայլերից, այն կարելի է բերել $ax = b$ տեսքի: Օրինակ՝ տրված է $3(x-1) = x+1$ հավասարումը: Բացելով փակագծերը՝ կունենանք $3x-3 = x+1$ հավասարումը: x գումարելին տեղափոխենք ձախ մաս, իսկ -3 գումարելին՝ աջ մաս՝ փոխելով դրանց նշանները. $3x-x = 1+3$: Միացնելով նման անդամները՝ կունենանք $2x = 4$ հավասարումը, որը $ax = b$ տեսքի հավասարում է:

□ 2. Գծային անհավասարումներ

Վերհիշենք անհավասարում, անհավասարման արմատ, համարժեք անհավասարումներ հասկացությունները:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: Փոփոխական պարունակող անհավասարությունը կոչվում է անհավասարում:

Օրինակ՝ $x+1>0$, $2y+4<y+2$, $x^2+3x+2\geq 0$, $\frac{(x-2)(x-5)}{x+1}\leq 0$ անհավասարությունները մեկ փոփոխականով անհավասարումներ են:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: Անհավասարման լուծում կոչվում է փոփոխականի այն արժեքը, որի դեպքում անհավասարումը դառնում է ճիշտ անհավասարություն:

Օրինակ՝ 2-ը $x+1>0$ անհավասարման արմատ է, քանի որ x -ի փոխարեն տեղադրելով 2, կստանանք $2+1>0$ ճիշտ անհավասարությունը, իսկ -2 -ն այդ անհավասարման արմատ չէ, քանի որ x -ի փոխարեն տեղադրելով -2 , կստանանք $-2+1>0$ սխալ անհավասարությունը:

Լուծել անհավասարումը նշանակում է գտնել դրա բոլոր լուծումները կամ ապացուցել, որ այն լուծում չունի:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: Համարժեք անհավասարումներ են կոչվում այն անհավասարումները, որոնց լուծումները նույն թվերն են կամ որոնք լուծում չունեն:

Նշենք, որ.

- 1) եթե անհավասարման որևէ գումարելի մի մասից տեղափոխենք մյուս մասը և փոխենք գումարելու նշանը, ապա կստացվի տրված անհավասարմանը համարժեք անհավասարում,
- 2) եթե անհավասարման երկու մասն էլ բազմապատկենք կամ բաժանենք միևնույն դրական թվի վրա, ապա կստացվի տրված անհավասարմանը համարժեք անհավասարում,
- 3) եթե անհավասարման երկու մասն էլ բազմապատկենք կամ բաժանենք միևնույն բացասական թվի վրա և անհավասարման նշանը փոխենք հակառակով, ապա կստացվի տրված անհավասարմանը համարժեք անհավասարում:

Վերհիշենք գծային անհավասարման սահմանումը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: $ax > b$, $ax \geq b$, $ax < b$ կամ $ax \leq b$ տեսքի անհավասարումը, որտեղ x -ը փոփոխական է, իսկ a -ն և b -ն ինչ-որ թվեր են, կոչվում է գծային անհավասարում:

a -ն և b -ն կոչվում են գծային անհավասարման գործակիցներ:

Դիտարկենք գծային անհավասարում, որի a գործակիցը դրական է, օրինակ՝ $2x \geq 6$ անհավասարումը:

Բաժանելով անհավասարման երկու մասերը 2-ի վրա՝ կստանանք տրվածին համարժեք $x \geq 3$ անհավասարումը: Հետևաբար տրված անհավասարման լուծումը $[3; +\infty)$ միջակայքն է:

Եթե գծային անհավասարման a գործակիցը բացասական է, ապա այն լուծելու համար նորից անհավասարման երկու մասերը կբաժանենք a -ի վրա, բայց նաև անհավասարման նշանը կփոխենք հակառակով:

Օրինակ՝ $-3x > 12$ անհավասարումը լուծելու համար անհավասարման երկու մասերը կբաժանենք -3 -ի վրա և անհավասարման նշանը կփոխենք հակառակով. $x < -4$: Հետևաբար տրված անհավասարման լուծումը $(-\infty; -4)$ միջակայքն է:

Դիտարկենք գծային անհավասարումներ, որոնց a գործակիցը 0 է.

1) $0 \cdot x < 1$,

2) $0 \cdot x \leq -3$:

Առաջին անհավասարման ձախ մասը x -ի ցանկացած արժեքի դեպքում 0 է, և քանի որ 0-ն փոքր է 1-ից, ապա ցանկացած թիվ այդ անհավասարման լուծում է: Ուրեմն անհավասարման լուծումն է $(-\infty; +\infty)$ միջակայքը:

Երկրորդ անհավասարման ձախ մասը x -ի ցանկացած արժեքի դեպքում նույնպես 0 է, բայց քանի որ 0-ն փոքր կամ հավասար չէ -3 -ին, ապա այդ անհավասարումը լուծում չունի՝ $x \in \emptyset$:



Հարցեր և խնդիրներ

1. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $2x = 4$,

ե) $4x + 4 = x + 5$,

$$բ) -7x = 42,$$

$$գ) 2(1,5 - 2x) = 5,$$

$$գ) -10x = 24,$$

$$է) 8x - (7x + 8) = 9,$$

$$դ) 2x + 9 = 12 - x,$$

$$ը) x + 4 - (2x - 1) = 6x :$$

2. Լուծե՛ք հավասարումը.

$$ա) \frac{1}{2}x = 3,$$

$$ե) \frac{3x}{5} = \frac{6+x}{3},$$

$$բ) \frac{5}{4}y = \frac{1}{2},$$

$$գ) \frac{12}{6} = \frac{2-3y}{4},$$

$$գ) -\frac{2}{7}x = -1,$$

$$է) \frac{7}{3} = \frac{2-3x}{4},$$

$$դ) \frac{11}{7} = \frac{2-a}{5},$$

$$ը) \frac{p}{3} + \frac{2p-1}{6} = 1 - \frac{p}{3} :$$

3. Լուծե՛ք հավասարումը.

$$ա) 2x + 5 = 2(x + 1),$$

$$ե) 3y - (y - 9) = 2y + 9,$$

$$բ) 3(2y - 4) = 2(3y - 6),$$

$$գ) 3y + (y - 2) = 2(2y - 1),$$

$$գ) 7(x + 2) - 30 = 7x,$$

$$է) 6x = 1 - (4 - 6x),$$

$$դ) 6(1 + 5x) = 5(1 + 6x),$$

$$ը) 6y - (y - 1) = 4 + 5y :$$

4. Երբ տրված թիվը բազմապատկեցին 4-ով և ստացված թվից հանեցին 5, արդյունքում ստացան 27: Գտե՛ք տրված թիվը:
5. Երեք հաջորդական ամբողջ թվերի գումարը 108 է: Գտե՛ք այդ թվերը:
6. Երկու հաջորդական զույգ թվերի գումարը 106 է: Գտե՛ք այդ թվերը:
7. Բասկետբոլի խաղահրապարակի պարագիծը 96 մ է, իսկ երկարությունը 14 մ-ով մեծ է լայնությունից: Գտե՛ք խաղահրապարակի երկարությունը:
8. Հեծանիվը և սաղավարտը միասին արժեն 78000 դրամ: Ի՞նչ արժե դրանցից յուրաքանչյուրը, եթե հեծանիվն արժե 5 անգամ ավելի, քան սաղավարտը:
9. Հողատարածքը և դրա վրա կառուցված տունը միասին արժեն 60000000 դրամ: Ի՞նչ արժե տունը, եթե այն 3 անգամ թանկ է հողատարածքից:
10. Մայրիկն ուզում էր ստանալ 20%-անոց աղի լուծույթ: Նա վերցրեց

100 գ ջուր և դրան ավելացրեց 20 գ աղ: Ստացմով մայրիկն իր ուզած լուծույթը: Գտիր անհրաժեշտ աղի քանակը և օգնիր մայրիկին:

11. Աբովյան և Հրազդան քաղաքներում միասին ապրում է 90665 մարդ: Քանի՞ մարդ է ապրում Աբովյանում, եթե Հրազդանում 2203 մարդ պակաս է ապրում, քան Աբովյանում:

12. Ուսանողն ուսման, հանրակացարանի և սննդի համար տարեկան ծախսում է 1320000 դրամ: Մննդի համար նա ծախսում է 3 անգամ ավելի, քան հանրակացարանի համար: Ինչքան է տարեկան ուսման վարձը, եթե այն 60000 դրամով ավելի է սննդի համար ծախսած գումարից:

13. Մեքենան, որի արագությունը 40 կմ/ժ-ով մեծ է գնացքի արագությունից, 3 ժամում անցավ այնքան ճանապարհի, որը գնացքը կանցնի 5 ժամում: Գտե՛ք մեքենայի արագությունը:

14. Ափամերձ երկու քաղաքների միջև հեռավորությունը մոտորանավակը գետի հոսանքի ուղղությամբ անցնում է 5 ժամում և վերադառնում է 6 ժամում: Գտե՛ք նավակի սեփական արագությունը, եթե գետի հոսանքի արագությունը 3 կմ/ժ է:

15. Լուծե՛ք անհավասարումը.

ա) $3x > 15$,

ե) $4x - 1 > x + 5$,

բ) $-7x < 28$,

զ) $3(3 - 2x) < 5$,

գ) $-3x \geq -24$,

է) $6x - (7x + 8) \geq -2$,

դ) $2x + 3 \leq 4 + x$,

ը) $x + 4 - (2x - 2) \leq 6x$:

16. Լուծե՛ք անհավասարումը.

ա) $\frac{1}{3}x > 2$,

ե) $\frac{3x}{2} > \frac{4+x}{3}$,

բ) $\frac{3}{4}y \leq \frac{1}{2}$,

զ) $\frac{2-3y}{3} > \frac{3}{4}$,

գ) $-\frac{2}{5}x < -5$,

է) $\frac{2-3x}{8} \leq \frac{3}{8}$,

դ) $\frac{4}{3} \geq \frac{2-a}{5}$,

ը) $\frac{p}{3} + \frac{2p-1}{6} \geq 1 - \frac{p}{3}$:

17. Լուծե՛ք անհավասարումը.

ա) $5x + 3 < 7x + 4$,

ե) $3(x - 2) - 2x \leq 4x + 1$,

$$բ) 4(x-1) < 2+7x,$$

$$գ) 5(x+2)+x > 3(x-1)+x,$$

$$գ) 4x-9 \geq 3(x-2),$$

$$է) 2x+7 \geq 2(x+1),$$

$$դ) x+4 > 2-3x,$$

$$ը) 3(2y-4) < 2(3y-6):$$

18. Լուծե՛ք անհավասարումը.

$$ա) 7(x+2)-15 \leq 7x,$$

$$դ) 6x \geq 1-(4-6x),$$

$$բ) 6(1+5x) < 5(1+6x),$$

$$ե) 3y+(y-2) > 2(2y-3),$$

$$գ) 3y-(y-9) \geq 2y+9,$$

$$զ) 6y-(y-4) < 1+5y:$$

§2. Քառակուսային հավասարումներ և անհավասարումներ

□ 3. Քառակուսային հավասարումներ

Վերհիշենք քառակուսային հավասարման սահմանումը և այն լուծելու քայլաշարը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: $ax^2 + bx + c = 0$ տեսքի հավասարումը, որտեղ x -ը փոփոխական է, իսկ a -ն, b -ն, c -ն ինչ-որ թվեր են, ընդ որում՝ $a \neq 0$, կոչվում է քառակուսային հավասարում:

a , b , c թվերը համապատասխանաբար կոչվում են քառակուսային հավասարման առաջին, երկրորդ և երրորդ գործակիցներ: Քառակուսային հավասարումներ են, օրինակ, $x^2 + 2x + 1 = 0$, $2x^2 = 8$, $3x^2 - 6x = 0$ հավասարումները:

Ինչպես հիշում եք, քառակուսային հավասարումը լուծելու համար նախ պետք է հաշվել $D = b^2 - 4ac$ արտահայտության արժեք, որը կոչվում է քառակուսային հավասարման **տարբերիչ** (դիսկրիմինանտ):

Քառակուսային հավասարման տարբերիչի արժեքից կախված՝ առանձնացնում են երեք դեպք.

ա) եթե $D < 0$, ապա քառակուսային հավասարումը արմատ չունի՝ $x \in \emptyset$,

բ) եթե $D = 0$, ապա քառակուսային հավասարումն ունի մեկ

արմատ՝ $x_0 = -\frac{b}{2a}$,

գ) եթե $D > 0$, ապա քառակուսային հավասարումն ունի երկու

արմատ՝ $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$:

Այս քայլաշարով կարելի է լուծել ցանկացած քառակուսային հավասարում, այսինքն՝ կարելի է գտնել այդպիսի հավասարման արմատները կամ համոզվել, որ այն արմատ չունի:

Բայց **թերի քառակուսային հավասարումները**, այսինքն՝ այն հավասարումները, որոնց երկրորդ և երրորդ գործակիցներից գոնե մեկը 0 է, կարելի է լուծել ավելի հարմար եղանակով՝ առանց տարբերիչ օգտագործելու:

Ներկայացնենք այդպիսի հավասարումների լուծման մի քանի օրինակ:

Օրինակ 1. $2x^2 - 32 = 0$: Այս հավասարումը լուծելու համար -32 գումարելին տեղափոխենք հավասարման աջ մաս՝ փոխելով դրա նշանը. $2x^2 = 32$, ապա հավասարման երկու մասն էլ բաժանենք 2-ի. $x^2 = 16$: Վերջինից էլ կունենանք՝ $x = \pm 4$:

Օրինակ 2. $5x^2 + 12 = 0$: Այս հավասարումը լուծելու համար 12 գումարելին տեղափոխենք հավասարման աջ մաս՝ փոխելով դրա նշանը. $5x^2 = -12$, ապա հավասարման երկու մասն էլ բաժանենք 5-ի. $x^2 = -\frac{12}{5}$: Վերջինից էլ կունենանք՝ $x \in \emptyset$:

Օրինակ 3. $3x^2 - 9x = 0$: Այս հավասարումը լուծելու համար ձախ մասը վերլուծենք արտադրիչների. $3x(x - 3) = 0$: Վերջինից կունենանք.

$$3x = 0 \text{ կամ } x - 3 = 0 \quad \left(\begin{array}{l} 3x = 0 \\ x - 3 = 0 \end{array} \right): \text{ Հետևաբար՝ } \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}:$$

□ 4. Քառակուսային անհավասարումներ

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ կամ $ax^2 + bx + c \leq 0$ տեսքի անհավասարումը, որտեղ x -ը փոփոխական է, իսկ a -ն, b -ն, c -ն ինչ-որ թվեր են, ընդ որում՝ $a \neq 0$, կոչվում է քառակուսային անհավասարում:

Քառակուսային անհավասարում լուծելու համար կօգտվենք գրաֆիկական եղանակից:

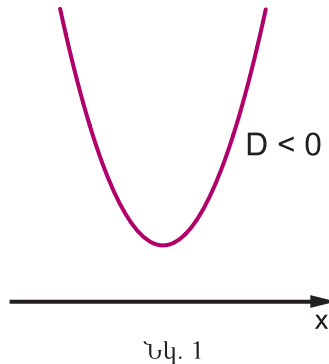
Դրա համար բավական է պատկերել համապատասխան քառակուսային ֆունկցիայի՝ $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) գրաֆիկը՝ կարևորելով ֆունկցիայի զրոները (համապատասխան քառակուսային հավասարման արմատները) և պարաբոլի ճյուղերի ուղղությունը:

Նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ $a > 0$ (պարաբոլի ճյուղերը ուղղված են վերև):

$ax^2 + bx + c = 0$ հավասարման տարբերիչի՝ D -ի արժեքից կախված՝ հնարավոր է երեք դեպք.

Դեպք 1. $D < 0$:

Այս դեպքում ֆունկցիայի գրաֆիկը չի հատում x -երի առանցքը (նկ. 1):



Ակնհայտ է դառնում, որ այս դեպքում x -ի ցանկացած արժեքի դեպքում ֆունկցիայի արժեքը դրական է:

Հետևաբար

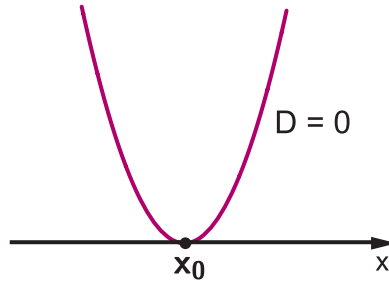
և՛ $ax^2 + bx + c > 0$, և՛ $ax^2 + bx + c \geq 0$ անհավասարման լուծումը բոլոր

իրական թվերի բազմությունն է՝ $x \in (-\infty; +\infty)$,

իսկ $ax^2 + bx + c < 0$ և $ax^2 + bx + c \leq 0$ անհավասարումները լուծում չունեն՝ $x \in \emptyset$:

Դեպք 2. $D = 0$:

Այս դեպքում ֆունկցիայի գրաֆիկը և x -երի առանցքը ունեն մեկ ընդհանուր կետ՝ պարարտի գագաթը (նկ. 2):



Նկ. 2

Ակնհայտ է դառնում, որ այս դեպքում, բացի պարարտի գագաթից՝ x_0 -ից, մնացած բոլոր x -երի համար ֆունկցիայի արժեքները դրական են:

Հետևաբար

$ax^2 + bx + c \geq 0$ անհավասարման լուծումը բոլոր իրական թվերի բազմությունն է՝ $x \in (-\infty; +\infty)$,

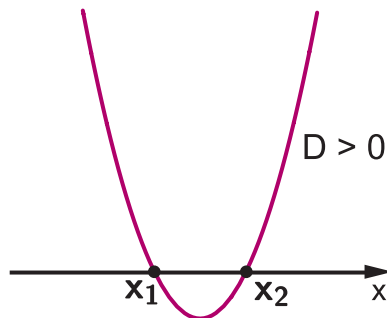
$ax^2 + bx + c > 0$ անհավասարման լուծումն է՝ $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$,

$ax^2 + bx + c < 0$ անհավասարումը լուծում չունի՝ $x \in \emptyset$,

$ax^2 + bx + c \leq 0$ անհավասարման լուծումը $x = x_0$ -ն է:

Դեպք 3. $D > 0$:

Այս դեպքում ֆունկցիայի գրաֆիկը x -երի առանցքը հատում է ֆունկցիայի զրոներում՝ x_1 և x_2 կետերում (նկ. 3):



Նկ. 3

Ակնհայտ է դառնում, որ այս դեպքում $(-\infty; x_1)$ և $(x_2; +\infty)$ միջակայքերի բոլոր կետերում ֆունկցիայի արժեքները դրական են, իսկ $(x_1; x_2)$ միջակայքի բոլոր կետերում ֆունկցիայի արժեքները բացասական են:

Հետևաբար

$ax^2 + bx + c > 0$ **անհավասարման լուծումն է՝**

$$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty),$$

$ax^2 + bx + c \geq 0$ **անհավասարման լուծումն է՝**

$$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty),$$

$ax^2 + bx + c < 0$ **անհավասարման լուծումն է՝**

$$x \in (x_1; x_2),$$

$ax^2 + bx + c \leq 0$ **անհավասարման լուծումն է՝**

$$x \in [x_1; x_2]:$$

Ամփոփելով վերևում շարադրված բոլոր դեպքերը՝ գալիս ենք քառակուսային անհավասարման լուծման հետևյալ քայլաշարին:

Եթե քառակուսային անհավասարումում $a > 0$, ապա.

1) պարզում ենք համապատասխան հավասարման արմատների քանակն ու արժեքները (եթե արմատ կամ արմատներ կան),

2) սխեմատիկ պատկերում ենք ստացված տվյալներին համապատասխանող, վերև ուղղված ձյուղերով պարաբոլ,

3) օգտվելով այդ սխեմատիկ պատկերից՝ գրում ենք անհավասարման լուծումը:

Եթե քառակուսային անհավասարումում $a < 0$, ապա անհավասարման երկու մասերը բազմապատկելով -1 -ով և անհավասարման նշանը փոխելով հակառակով՝ ստանում ենք տրվածին համարժեք քառակուսային անհավասարում, ապա կրկնում վերևի երեք քայլերը:

Օգտվելով այստեղ տեղադրված QR կոդով բացվող ինտերակտիվ մոդելից՝ կարող եք մուտքագրել և լուծել տարբեր քառակուսային անհավասարումներ:





Հարցեր և խնդիրներ

19. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $x^2 = 4$,

ե) $3m^2 - 27 = 0$,

բ) $x^2 = 36$,

զ) $-5b^2 + 180 = 0$,

գ) $x^2 = -25$,

է) $8x^2 + 4x = 0$,

դ) $4x^2 = 49$,

ը) $5a^2 + 10a = 0$:

20. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $2x^2 + 18 = 0$,

ե) $2x^2 + x + 4 = 0$,

բ) $2a^2 - 7a = 0$,

զ) $x^2 - 3x + 7 = 0$,

գ) $m^2 + 3m = 0$,

է) $x^2 + 6x + 10 = 0$,

դ) $5x^2 + 15x = 0$,

ը) $p^2 - 4p + 5 = 0$:

21. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $x^2 - 4x + 4 = 0$,

ե) $a^2 + 5a - 14 = 0$,

բ) $y^2 + 6y + 9 = 0$,

զ) $3x^2 - 7x + 4 = 0$,

գ) $x^2 - 10x + 25 = 0$,

է) $2y^2 - 9y + 10 = 0$,

դ) $4t^2 - 12t + 9 = 0$,

ը) $6x^2 + 7x + 2 = 0$:

22. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $2x^2 - 2x + 3 = 0$,

դ) $-x^2 + 2x + 4 = 0$,

բ) $y^2 + 6y + 6 = 0$,

է) $-3x^2 - 6x + 1 = 0$,

գ) $2x^2 - 3x - 4 = 0$,

զ) $t^2 - 14t + 49 = 0$:

23. Երկու թվերից մեկը մյուսից 3-ով մեծ է, իսկ դրանց արտադրյալը 180 է: Գտե՛ք այդ թվերը:

24. 18 թիվը ներկայացրեք երկու գումարելիների տեսքով այնպես, որ գումարելիների արտադրյալը լինի 65: Գտե՛ք գումարելիները:

25. Գտե՛ք երեք հաջորդական բնական թիվ, որոնց քառակուսիների

գումարը 869 է:

26. Ուղղանկյունաձև հողատարածքի մակերեսը 160 մ^2 է: Գտնք հողատարածքի լայնությունը, եթե այն 6 մետրով պակաս է հողատարածքի երկարությունից:
27. Աննան բանկում ավանդ դրեց 500000 դրամ: Մեկ տարի անց գումարն ավելացավ $p\%$ -ով, հաջորդ տարի առկա գումարը նորից ավելացավ $p\%$ -ով: Գտնք p -ն, եթե երկու տարի անց Աննայի հաշվին կար 583200 դրամ:
28. Ուղղանկյուն եռանկյան մակերեսը 60 սմ^2 է, իսկ էջերից մեկը մյուսից 7 սմ-ով երկար է: Գտնք եռանկյան էջերը:
29. Ուղղանկյուն եռանկյան մի էջը մյուս էջից փոքր է 3 սմ-ով, իսկ ներքնաձիգից՝ 6 սմ-ով: Գտնք այդ եռանկյան ներքնաձիգը:
30. Սպորտային ապրանքների խանութը մեկ մրցաշրջանում վաճառում է 90 դահուկային բաձկոն՝ յուրաքանչյուրը 200 դոլարով: Գնի յուրաքանչյուր 10 դոլարով նվազեցումը բաձկոնների վաճառքն ավելացնում է 8-ով: Խանութը բաձկոնների գինն իջեցրեց 10k դոլարով (k -ն բնական թիվ է) և վաճառված բաձկոններից ստացավ 19380 դոլար: Ինչ գնով վաճառվեցին բաձկոնները:
31. Գեղարքունիքի Մեծ Մասրիկ համայնքում կառուցվող արևային էլեկտրակայանի համար տեղադրվելու է 115000 արևային վահանակ: Ընդունելով, որ յուրաքանչյուր շարքում վահանակների քանակը 210-ով շատ է շարքերի քանակից, գտեք, թե քանի վահանակ կա մեկ շարքում:
32. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $x^2 < 9$,	ե) $x^2 > 4$,
բ) $x^2 \leq 16$,	զ) $x^2 \geq 36$,
գ) $x^2 < -2$,	է) $x^2 > -5$,
դ) $4x^2 \leq 25$,	ը) $x^2 \geq 7$:
33. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $2x^2 + 18x \geq 0$,	ե) $-x^2 + 5x - 6 > 0$,
բ) $-2x^2 + 7x > 0$,	զ) $x^2 - 5x - 36 \geq 0$,
գ) $x^2 + 3x > 0$,	է) $-x^2 + 6x - 7 < 0$,

$$\eta) -5x^2 + 15x \geq 0,$$

$$\varrho) x^2 - 11x + 28 \leq 0:$$

34. Լուծե՛ք հավասարումը.

$$\alpha) x^2 - 2x + 4 > 0,$$

$$\text{է) } x^2 + 5x - 2 > 0,$$

$$\text{բ) } x^2 - 10x + 25 \geq 0,$$

$$\text{զ) } 3x^2 - 2x + 4 \leq 0,$$

$$\text{գ) } x^2 + 6x + 9 < 0,$$

$$\text{է) } 2x^2 - 6x + 10 < 0,$$

$$\eta) 4x^2 - 12x + 9 \leq 0,$$

$$\varrho) 3x^2 + 5x + 8 > 0:$$

§3. Ռացիոնալ հավասարումներ և անհավասարումներ

□ 5. Ռացիոնալ հավասարումներ

Վերհիշենք ռացիոնալ հավասարման սահմանումը և այն լուծելու քայլաշարը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ տեսքի հավասարումը, որտեղ $P(x)$ -ը և $Q(x)$ -ը բազմանդամներ են, ընդ որում՝ $Q(x)$ -ը ոչ զրոյական բազմանդամ է, կոչվում է ռացիոնալ հավասարում:

$3x = 15$, $x^2 + 4x + 3 = 0$, $\frac{2x-1}{x+3} = 0$, $\frac{x+2}{x-1} = \frac{x}{x+1}$ հավասարումները ռացիոնալ հավասարումներ են: Առաջին երկու հավասարումները համապատասխանաբար գծային և քառակուսային հավասարումներ են, դրանք կարելի է ներկայացնել $\frac{3x-15}{1} = 0$, $\frac{x^2+4x+3}{1} = 0$ տեսքերով: Նախորդ կետերում դրանց մասին արդեն խոսել ենք:

Երրորդ հավասարումը հենց $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ տեսքի է:

Չորրորդ հավասարումը կարելի է ձևափոխել և բերել դրան համարժեք

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \text{ տեսքի հավասարման. } \frac{x+2}{x-1} - \frac{x}{x+1} = 0, \frac{(x+2)(x+1) - x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = 0,$$

$$\frac{4x+2}{x^2-1} = 0:$$

Երրորդ և չորրորդ հավասարումների նման հավասարումներն անվանում են **կոտորակառացիոնալ հավասարումներ**:

Կոտորակառացիոնալ հավասարման ԹԱԲ-ը, ի տարբերություն, գծային կամ քառակուսային հավասարման ԹԱԲ-ի, կարող է չլինել բոլոր իրական թվերի բազմությունը: Օրինակ՝ $\frac{2x-1}{x+3} = 0$ հավասարման

ԹԱԲ-ին չի պատկանում -3 -ը, իսկ $\frac{x+2}{x-1} = \frac{x}{x+1}$ հավասարման ԹԱԲ-ին չեն պատկանում 1 -ը և -1 -ը:

Ուրեմն $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ կոտորակառացիոնալ հավասարման լուծումները

$P(x) = 0$ հավասարման այն լուծումներն են, որոնցում $Q(x) \neq 0$:

Հետևաբար $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ հավասարումը համարժեք է $\begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$ համա-

կարգին:

Լուծենք մի քանի կոտորակառացիոնալ հավասարում:

Օրինակ 1. $\frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{x-2}:$

Այս հավասարումը լուծելու համար կարելի է այն բերել $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ տեսքի, ապա լուծել $\begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$ համակարգը: Բայց կարող ենք ելնել նրա-

նից, որ հավասար հայտարարով կոտորակները հավասար են միայն այն դեպքում, եթե դրանց հայտարարը 0 չէ, իսկ համարիչները հավասար են:

$$\text{Կունենանք. } \begin{cases} x \neq 2 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2:$$

Օրինակ 2. $\frac{3x-7}{x+5} = \frac{x-3}{2+x}:$

Այս հավասարումը ևս չենք բերի $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ տեսքի: Ելնելով նրանից,

որ երկու կոտորակ հավասար են միայն այն դեպքում, եթե դրանց հայտարարները 0 չեն, իսկ առաջինի հայտարարի և երկրորդի համարիչի

արտադրյալը հավասար է երկրորդի հայտարարի և առաջինի համարիչի արտադրյալին՝ կունենանք.

$$\frac{3x-7}{x+5} = \frac{x-3}{2+x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -5 \\ x \neq -2 \\ (3x-7)(x+2) = (x-3)(x+5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -5 \\ x \neq -2 \\ 2x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -5 \\ x \neq -2 \\ x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}; 1:$$

Օրինակ 3. $\frac{3y-2}{y} - \frac{1}{y-2} = \frac{3y+4}{y^2-2y}:$

Նախ հավասարումը բերենք $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ տեսքի, ապա լուծենք դրան

համարժեք $\begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$ համակարգը.

$$\frac{3y-2}{y} - \frac{1}{y-2} - \frac{3y+4}{y(y-2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{(3y-2)(y-2) - y - 3y - 4}{y(y-2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3y^2 - 12y}{y(y-2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 - 12y = 0 \\ y \neq 0, y \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, y = 4 \\ y \neq 0, y \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow y = 4:$$

□ 6. Ռացիոնալ անհավասարումներ

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ կամ $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$

տեսքի անհավասարումը, որտեղ $P(x)$ -ը և $Q(x)$ -ը բազմանդամներ են, ընդ որում՝ $Q(x)$ -ը ոչ զրոյական բազմանդամ է, կոչվում է ռացիոնալ անհավասարում:

$$2x > 4, \quad x^2 + 4x + 3 \leq 0, \quad x(x+3)(2x-8) > 0, \quad \frac{x-1}{x+3} \geq 0, \quad \frac{x(x-1)(x+3)}{(x-7)(x+2)} < 0$$

անհավասարումները ռացիոնալ անհավասարումներ են:

Առաջին երկու անհավասարումները համապատասխանաբար գծային և քառակուսային անհավասարումներ են, դրանք կարելի է ներկայացնել $\frac{2x-4}{1} > 0$, $\frac{x^2+4x+3}{1} \leq 0$ տեսքերով: Նախորդ կետերում դրանց մասին արդեն խոսել ենք:

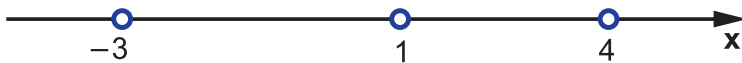
Չորրորդ և հինգերորդ անհավասարումների նման անհավասարումներն անվանում են **կոտորակառացիոնալ անհավասարումներ**:

Ռացիոնալ անհավասարում լուծելու համար կօգտվենք **միջակայքերի մեթոդից**:

Միջակայքերի մեթոդի կիրառումը ներկայացնենք օրինակներով:

Օրինակ 1. $(x-1)(x+3)(2x-8) > 0$:

Այս անհավասարումը լուծելու համար նախ գտնում ենք ձախ մասի զրոները ($x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 4$) և տեղադրում դրանք թվային առանցքի վրա: **Եթե ունենք խիստ անհավասարում, այդ կետերը կնշենք դատարկ շրջանակներով** (նկ. 4):



Նկ. 4

1, -3, 4 կետերը թվային առանցքը տրոհում են միջակայքերի:

Քանի որ ամենաաջ միջակայքում ($x > 4$) անհավասարման ձախ մասի բոլոր արտադրիչները դրական են, ապա անհավասարման ձախ մասը դրական է. այդ միջակայքում դնում ենք «+» նշանը: Քանի որ հաջորդ միջակայքին անցնելիս միայն մեկ արտադրիչ է փոխում նշանը, ապա

հաջորդ միջակայքի համար կունենանք նախորդի հակառակ նշանը: Շարժվելով աջից ձախ, այդ սկզբունքով նշում ենք անհավասարման ձախ մասի նշանը բոլոր միջակայքերի համար (նկ. 5):



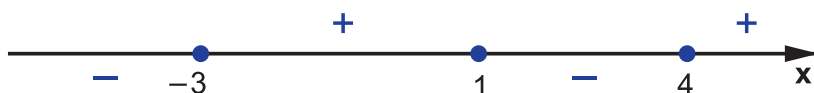
Նկ. 5

Ելնելով տրված անհավասարման նշանից (օրինակ՝ $>$ կամ $<$) և նկարում դրված «+» և «-» նշաններից՝ գրում ենք անհավասարման լուծումը.

$$x \in (-3; 1) \cup (4; +\infty):$$

Դիտողություն: Այն դեպքում, երբ բոլոր գծային արտադրիչները $(x - x_k)$ տեսքի են (ինչպես, օրինակ, 1-ում է), ամենաառ միջակայքում անհավասարման ձախ մասը դրական է: Եթե կենտ աստիճան ունեցող որևէ արտադրիչ $(x_k - x)$ տեսքի է, ապա, բազմապատկելով անհավասարման երկու մասերը -1 -ով և փոխելով անհավասարման նշանը հակառակով, կստանանք տրվածին համարժեք անհավասարում:

Եթե ունենայինք նույն ձախ մասով, բայց ոչ խիստ անհավասարումը՝ $(x-1)(x+3)(2x-8) \leq 0$, ապա նկար 5-ի փոխարեն կունենայինք նկար 6-ը, որը միայն մի բանով է տարբերվում նկար 5-ից՝ 1, -3, 4 կետերը նշված են լիքը շրջանակներով:



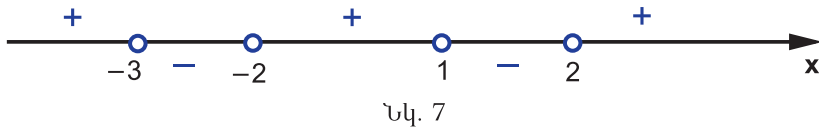
Նկ. 6

Նկար 6-ից պարզ է դառնում, որ $(x-1)(x+3)(2x-8) \leq 0$ անհավասարման լուծումն է՝ $x \in (-\infty; -3] \cup [1; 4]$:

Օրինակ 2. $\frac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+2)} < 0$:

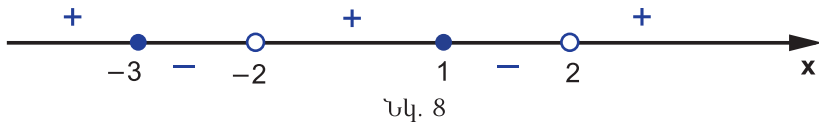
Այս անհավասարումը լուծելու համար նորից գտնում ենք ձախ մասի և համարիչի, և հայտարարի գրոները և տեղադրում դրանք թվային առանցքի վրա: Քանի որ ունենք խիստ անհավասարում, այդ կետերը նշում ենք դատարկ շրջանակներով:

Առաջացած միջակայքերի նշանների հարցը կարգավորվում է այնպես, ինչպես նախորդ օրինակում: Այդպիսով կունենանք նկար 7-ի վիճակը:



Հետևաբար անհավասարման լուծումն է՝ $x \in (-3; -2) \cup (1; 2)$:

Եթե ունենայիք նույն ձախ մասով, բայց ոչ խիստ անհավասարում՝ $\frac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+2)} \leq 0$, ապա նկար 7-ի փոխարեն կունենայիք նկար 8-ը, որում համարիչի գրոները, ի տարբերություն նկար 7-ի, նշված են լիքը շրջանակներով:



Հետևաբար նույն ձախ մասով ոչ խիստ անհավասարման լուծումն է՝ $x \in [-3; -2) \cup [1; 2)$:

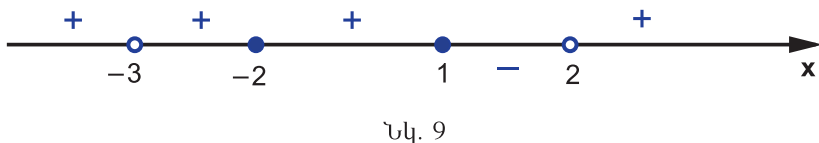
Ուրեմն հիշենք, որ խիտ անհավասարման դեպքում բոլոր տրոհման կետերը նշում ենք դատարկ շրջանակներով, իսկ ոչ խիստ անհավասարման դեպքում լիքը շրջանակներով նշվում են միայն համարիչի գրոները:

Դիտողություն: Եթե արտադրիչն ունի կենտ աստիճան, ապա աջից ձախ շարժվելիս այդ արտադրիչի գրոյի վրայով անցնելուց հաջորդ միջակայքում դրվում է նախորդի հակառակ նշանը, իսկ եթե ունի զույգ աստիճան, ապա այդ արտադրիչի գրոյի վրայով անցնելուց հաջորդ միջակայքում դրվում է նախորդ միջակայքի նշանը:

Վերևի օրինակներում բոլոր արտադրիչները ունեն կենտ աստիճան, այդ պատճառով պլյուս, մինուս նշանները հերթագայում են:

Օրինակ 3. $\frac{(x+2)^2(x-1)^3}{(x-2)(x+3)^2} \leq 0$:

Անելով նախորդ օրինակների լուծման համար արված քայլերին համանման քայլեր և հաշվի առնելով վերևի դիտողությունը՝ կունենանք նկար 9-ում ներկայացված վիճակը:

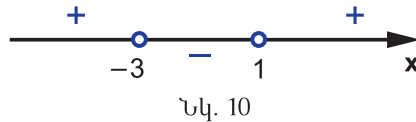


Հետևաբար անհավասարման լուծումն է՝ $x \in \{-2\} \cup [1; 2)$:

Օրինակ 4. $\frac{4x+7}{x+3} > 2$:

Այսպիսի անհավասարումը նախ՝ բերում ենք $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ տեսքի, ապա՝ միջակայքերի մեթոդով լուծում ստացված անհավասարումը.

$$\frac{4x+4}{x+3} > 2 \Leftrightarrow \frac{4x+4}{x+3} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{2x-2}{x+3} > 0:$$



Այսպիսով՝ $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$:



Հարցեր և խնդիրներ

35. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $\frac{6}{x} = 2x - 1$,

ե) $\frac{x^2}{x-2} = \frac{-4}{2-x}$,

բ) $\frac{2x-5}{x+5} = 4$,

զ) $\frac{x^2}{x^2-4} = \frac{5x-6}{x^2-4}$,

գ) $\frac{12}{7-x} - x = 0$,

է) $\frac{1}{x-1} = \frac{2}{x+1}$,

դ) $\frac{x^2}{x+3} = \frac{9}{x+3}$,

ը) $\frac{3}{x-2} = \frac{2}{x-3}$:

36. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $\frac{5x+1}{x+1} = \frac{x+2}{x}$,

ե) $\frac{y}{y-5} = \frac{y-2}{y-6}$,

բ) $\frac{x-2}{x+2} = \frac{x+3}{x-4}$,

զ) $\frac{12}{x-1} - \frac{8}{x+1} = 1$,

գ) $\frac{2y+3}{2y-1} = \frac{y-5}{y+3}$,

է) $\frac{4}{x-3} + \frac{4}{x+3} = -1$,

$$\eta) \frac{6-x}{x-4} = \frac{5}{x-4} - 3,$$

$$\varrho) \frac{3y-2}{y} - \frac{1}{y-2} = \frac{3y+4}{y^2-2y}:$$

37. Սովորական կոտորակի հայտարարը համարիչից մեծ է 3-ով: Եթե այդ կոտորակի համարիչին ավելացվի 7, իսկ հայտարարին՝ 5, ապա կոտորակը կմեծանա $\frac{1}{2}$ -ով: Գտե՛ք այդ կոտորակը:
38. Երկու ընկեր միաժամանակ դուրս եկան Երևանից և պայմանավորվեցին հանդիպել Վանաձորում: Նրանցից մեկը պետք է գնար Երևան, Գյումրի, Վանաձոր երթուղով, որի երկարությունը 178 կմ է, իսկ մյուսը՝ Երևան, Ապարան, Վանաձոր երթուղով, որի երկարությունը 118 կմ է: Գտե՛ք նրանց արագությունները, եթե հայտնի է, որ նրանք միաժամանակ հասան Վանաձոր և առաջինի արագությունը 30 կմ/ժ-ով ավելի էր երկրորդի արագությունից:
39. Նավակը, որի սեփական արագությունը 15 կմ/ժ է, հոսանքի ուղղությամբ անցավ 35 կմ, իսկ հոսանքին հակառակ՝ 25 կմ: Գտե՛ք հոսանքի արագությունը, եթե հոսանքի ուղղությամբ և հոսանքին հակառակ ծախսած ժամանակները հավասար են:
40. Բանվորներից մեկը նույն աշխատանքը կարող է անել 5 ժ շուտ, քան մյուսը: Այդ նույն աշխատանքը նրանք միասին կարող են անել 6 ժ-ում: Քանի՞ ժամում այդ աշխատանքը կանի նրանցից յուրաքանչյուրը:
41. Երկու բրիգադ աշխատանքն արեցին 12 օրում: Քանի՞ օրում կարող է այդ աշխատանքն անել բրիգադներից յուրաքանչյուրը, եթե ամբողջ աշխատանքն անելու համար նրանցից մեկին անհրաժեշտ է 10 օր ավելի, քան մյուսին:
42. Համակարգչի ներբեռնման արագությունը 2 ՄԲ/վրկ-ով ավելի է, քան վերբեռնման արագությունը: Համակարգիչը 50 ՄԲ ֆայլը ներբեռնում է 5 վայրկյանով ավելի արագ, քան վերբեռնում է 80 ՄԲ ֆայլը: Գտե՛ք ներբեռնման և վերբեռնման արագությունները:
43. Արամը ներբեռնեց 540 ՄԲ ֆայլը և ուղարկեց ընկերոջը: Ներբեռնման և վերբեռնման վրա նա ծախսեց 2 ր 30 վ: Գտե՛ք ներբեռնման և վերբեռնման արագությունները, եթե ներբեռնման արագությունը 3 ՄԲ/վրկ-ով ավելի է վերբեռնման արագությունից:

44. Լուծե՛ք անհավասարումը.

ա) $(x-1)(x+2)(x-3) < 0$,

ե) $\frac{(x-1)(x+3)}{x-2} > 0$,

բ) $(x+1)(x-1)(x+2) > 0$,

զ) $\frac{(x+2)(x-3)}{x+1} < 0$,

գ) $(x-4)(x+1)(x+2) \geq 0$,

է) $\frac{(2x-4)(x-5)}{x+2} \geq 0$,

դ) $(x-3)(x+1)(x+2) \leq 0$,

ը) $\frac{(x+2)(3x-9)}{x-1} \leq 0$:

45. Լուծե՛ք անհավասարումը.

ա) $\frac{(2x+1)(x-5)}{2x+4} \geq 0$,

ե) $\frac{(x-1)^2(x+3)}{x-6} > 0$,

բ) $\frac{(x-5)(x+3)}{x+6} \leq 0$,

զ) $\frac{(x-1)^3(x+3)^2}{x+2} < 0$,

գ) $\frac{x(x-1)(x+3)}{(x-7)(x+2)} > 0$,

է) $\frac{(x-4)^2(x-2)^5}{x-1} \geq 0$,

դ) $\frac{(x+4)(x-1)(x+3)}{(x-7)(x+2)} < 0$,

ը) $\frac{(x-5)^2(x-2)}{(x+3)^3} < 0$:

46. Լուծե՛ք անհավասարումը.

ա) $\frac{2x+3}{x+5} \geq 1$,

դ) $\frac{4x-3}{x+5} \geq 5$,

բ) $\frac{2x+5}{x-1} \leq 3$,

ե) $\frac{7x+3}{x+3} > 6$,

գ) $\frac{5x+1}{2x-4} < 2$,

զ) $\frac{3x+3}{x+5} \leq 1$:

§4. Մոդուլ պարունակող հավասարումներ և անհավասարումներ

7. Մոդուլ պարունակող հավասարումներ

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: Մոդուլ պարունակող հավասարում կոչվում է այն հավասարումը, որում մոդուլի նշանի մեջ անհայտ կա:

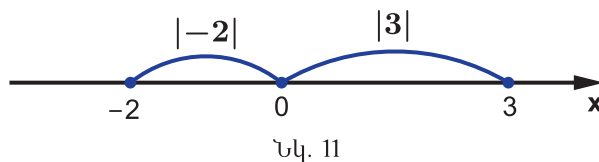
Մոդուլ պարունակող հավասարումների լուծման եղանակները վերհիշելուց առաջ վերհիշենք a թվի մոդուլի սահմանումը.

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases} :$$

Սա նշանակում է, որ ոչ բացասական թվի մոդուլը այդ թիվն է, իսկ բացասական թվի մոդուլը դրա հակադիր թիվն է:

Վերհիշենք նաև թվի մոդուլի մեկնաբանությունը՝ կապված թվային առանցքի հետ:

Թվի մոդուլը դրա հեռավորությունն է թվային առանցքի վրա զրոյից (սկ. 11):



Այս մեկնաբանությունն ակնհայտ է դարձնում, որ ցանկացած x թվի համար $|x| \geq 0$:

Սկզբում դիտարկենք $|f(x)| = a$ տեսքի հավասարումը, որտեղ a -ն տրված թիվ է:

Քանի որ ցանկացած թվի մոդուլը ոչ բացասական է, ապա բացասական a -ի դեպքում հավասարումը լուծում չունի:

Օրինակ 1. $|x| = -1$:

Քանի որ հավասարման աջ մասը բացասական է, ապա այն լուծում չունի՝ $x \in \emptyset$:

Օրինակ 2. $|3x - 8| = -2$:

Այս հավասարումը նույնպես լուծում չունի՝ $x \in \emptyset$, քանի որ հավասարման աջ մասը բացասական է:

Եթե a -ն դրական է, ապա $|f(x)| = a$ հավասարումը համարժեք է
$$\begin{cases} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{cases}$$
 համախմբին, քանի որ թվային առանցքի վրա կա երկու կետ՝ a -ն և $-a$, որոնց հեռավորությունները զրոյից a է: Նկատենք, որ սա ճիշտ է նաև, երբ a -ն զրո է:

Օրինակ 3. $|x| = 11$:

Հավասարման աջ մասը դրական է, ուրեմն այն համարժեք է
$$\begin{cases} x = 11 \\ x = -11 \end{cases}$$
 համախմբին կամ ուղղակի կգրենք $x = \pm 11$:

Օրինակ 4. $|4x + 6| = 10$:

$|4x + 6| = 10$ հավասարումն էլ համարժեք է
$$\begin{cases} 4x + 6 = 10 \\ 4x + 6 = -10 \end{cases}$$
 համախմբին:
Վերջինից էլ կունենանք՝
$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$$
:

$|f(x) - b| = a$ տեսքի հավասարումն էլ է լուծվում նույն սկզբունքով:

Օրինակ 5. $|6x + 1| - 3 = -4$:

$|6x + 1| - 3 = -4$ հավասարումը լուծում չունի՝ $x \in \emptyset$, քանի որ հավասարման աջ մասը բացասական է:

Օրինակ 6. $|6x + 1| - 2 = 4$:

Իսկ $|6x + 1| - 2 = 4$ հավասարումը համարժեք է
$$\begin{cases} |6x + 1| - 2 = 4 \\ |6x + 1| - 2 = -4 \end{cases}$$
 համախմբին: Վերջինից էլ կունենանք՝
$$\begin{cases} |6x + 1| = 6 \\ |6x + 1| = -2 \end{cases}$$
: Դրանցից երկրորդը

լուծում չունի, իսկ առաջինը համարժեք է
$$\begin{cases} 6x + 1 = 6 \\ 6x + 1 = -6 \end{cases}$$
 համախմբին:

Ուրեմն
$$\begin{cases} x = \frac{5}{6} \\ x = -\frac{7}{6} \end{cases}$$
:

Ներկայացնենք նաև $|f(x)| = |g(x)|$ տեսքի հավասարման լուծման քայլերը:

Քանի որ երկու թվերի մոդուլները հավասար են միայն այն դեպքում, երբ այդ թվերը հավասար են կամ դրանք հակադիր թվեր են, ապա այն համարժեք է
$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$
 համախմբին:

Լուծենք այդպիսի մի հավասարում:

Օրինակ 7. $|2x + 6| = |3x - 4|$:

$$|2x + 6| = |3x - 4| \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6 = 3x - 4 \\ 4x + 6 = -3x + 4 \end{cases} \text{ : Վերջինից էլ կունենանք } \begin{cases} x = -10 \\ x = -\frac{2}{7} \end{cases} :$$

Անցնենք $|f(x)| = g(x)$ տեսքի հավասարման լուծմանը:

Քանի որ ցանկացած x թվի համար $|f(x)| \geq 0$, ապա հավասարման լուծումները բավարարում են $g(x) \geq 0$ պայմանին: Իսկ եթե $g(x) \geq 0$,

ապա հավասարումը համարժեք է
$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$
 համախմբին: Ուրեմն

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \end{cases} :$$

Լուծենք այդպիսի մի հավասարում:

Օրինակ 8. $|5x - 3| = 6x + 1$:

$$|5x - 3| = 6x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 1 \geq 0 \\ \begin{cases} 5x - 3 = 6x + 1 \\ 5x - 3 = -6x - 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{6} \\ \begin{cases} x = -4 \\ x = \frac{2}{11} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{11} :$$

Նշենք նաև, որ $ax^2 + b|x| + c = 0$ տեսքի հավասարումները լուծելու համար, օգտվելով $x^2 = |x|^2$ նույնությունից, կարելի է $|x|$ -ը նշանակել y -ով և տրված հավասարումը բերել $ay^2 + by + c = 0$ քառակուսային հավասարմանը: Այն լուծելուց հետո պետք է վերադառնալ $y = |x|$ նշանակմանը:

□ 8. Մոդուլ պարունակող անհավասարումներ

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: Մոդուլ պարունակող անհավասարում կոչվում է այն անհավասարումը, որում մոդուլի նշանի մեջ անհայտ կա:

Սկզբում դիտարկենք $|f(x)| > a$, $|f(x)| \geq a$, $|f(x)| < a$, $|f(x)| \leq a$ **տեսքի անհավասարումները, որտեղ** a -ն **տրված թիվ է:**

Քանի որ ցանկացած թվի մոդուլը ոչ բացասական է, ապա բացասական a -ի դեպքում առաջին երկու անհավասարումների լուծումները համընկնում են այդ անհավասարումների ԹԱԲ-երի հետ: Նույն պատճառով վերջին երկու անհավասարումները լուծում չունեն՝ $x \in \emptyset$:

Օրինակ 1. $|x| > -1$:

Քանի որ ցանկացած ոչ բացասական թիվ մեծ է բացասական թվից, ապա $x \in (-\infty; +\infty)$:

Օրինակ 2. $|4x - 5| \geq -2$:

x -ի ցանկացած արժեքի դեպքում այս անհավասարման ձախ մասը ոչ բացասական է, իսկ աջ մասը՝ բացասական: Ուրեմն $x \in (-\infty; +\infty)$:

Օրինակ 3. $|x| < -3$:

Քանի որ ոչ մի ոչ բացասական թիվ փոքր չէ բացասական թվից, ապա $x \in \emptyset$:

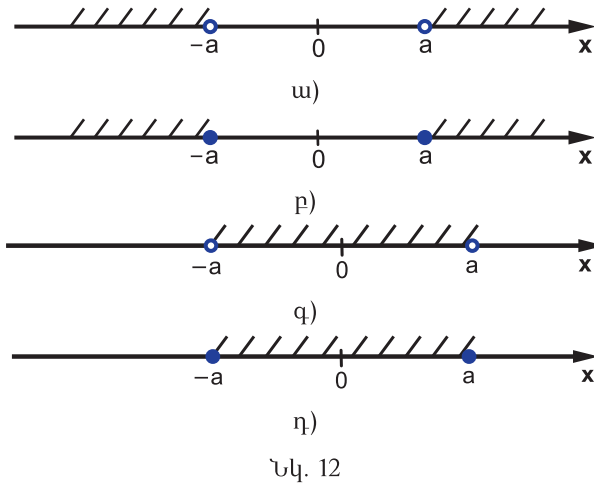
Օրինակ 4. $|3x - 12| \leq -3$:

x -ի ցանկացած արժեքի դեպքում այս անհավասարման ձախ մասը ոչ բացասական է, իսկ աջ մասը՝ բացասական: Ուրեմն $x \in \emptyset$:

Եթե այս տեսքի անհավասարումներում a -ն դրական է, ապա, ելնելով թվի մոդուլի թվային առանցքի հետ կապված մեկնաբանությունից, դժվար չէ համոզվել, որ.

$$\begin{aligned} \text{ա) } |f(x)| > a &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{cases}, & \text{գ) } |f(x)| < a &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < a \\ f(x) > -a \end{cases}, \\ \text{բ) } |f(x)| \geq a &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq a \\ f(x) \leq -a \end{cases}, & \text{դ) } |f(x)| \leq a &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq a \\ f(x) \geq -a \end{cases}, \end{aligned}$$

տե՛ս նկար 12-ի համապատասխանաբար ա)-ն, բ)-ն, գ)-ն, դ)-ն:



Լուծենք այդպիսի երկու անհավասարում:

Օրինակ 5. $|4x - 5| > 3$:

$$|4x - 5| > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 5 > 3 \\ 4x - 5 < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x > 8 \\ 4x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty):$$

Օրինակ 6. $|3x - 5| \leq 4$:

$$|3x - 5| \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5 \leq 4 \\ 3x - 5 \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \leq 9 \\ 3x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]:$$

Դիտողություն: Մենք սկզբում քննարկեցինք $a < 0$ դեպքը և, ելնելով անհավասարումների ձախ և աջ մասերի նշաններից, գրեցինք դրանց լուծումները:

$a > 0$ դեպքում անհավասարումները փոխարինվեցին դրանց համարժեք համախմբով կամ համակարգով: Բայց պարզվում է, որ $a \leq 0$ դեպքում էլ վերևում նշված համարժեքությունները ճիշտ են:

Իսկ դա նշանակում է, որ դրանք ճիշտ են նաև այն դեպքում, երբ անհավասարման աջ մասն էլ է փոփոխական պարունակում, այսինքն, երբ ունենք $|f(x)| > g(x)$, $|f(x)| \geq g(x)$, $|f(x)| < g(x)$, $|f(x)| \leq g(x)$ տեսքի անհավասարումներ:

Լուծենք այդպիսի երկու անհավասարում:

Օրինակ 7. $|4x - 5| \geq 3x + 1$:

$$|4x - 5| \geq 3x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 5 \geq 3x + 1 \\ 4x - 5 \leq -3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ 7x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x \leq \frac{4}{7} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{4}{7}\right] \cup [6; +\infty):$$

Օրինակ 8. $|3x + 1| \leq x + 3$:

$$|3x + 1| \leq x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 \leq x + 3 \\ 3x + 1 \geq -x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq 2 \\ 4x \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; 1]:$$



Հարցեր և խնդիրներ

47. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $|x| = 2$,

ե) $|x| = -3$,

բ) $|x| = 7$,

զ) $|x| = -0,2$,

գ) $|x| = 3,2$,

է) $|x| = \frac{1}{3}$,

դ) $|x| = 0$,

ը) $|x| = -1$:

48. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $|4x - 2| = 10$,

ե) $|6 - x^2| = 3$,

բ) $|3x - 1| = 5$,

զ) $|x^2 - 6x + 8| = 1$,

գ) $|2x + 3| = -9$,

է) $|x^2 - 5x + 4| = 2$,

դ) $|6x + 4| = 10$,

ը) $|x^2 - 4x + 3| = 1$:

49. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $x^2 + |x| - 2 = 0$,

է) $||x| - 1| = 2$,

բ) $x^2 - 5|x| - 6 = 0$,

զ) $||x - 2| - 3| = 1$,

գ) $x^2 + 7|x| - 60 = 0$,

է) $||x - 5| + 6| = 7$,

դ) $2x^2 - 11|x| - 21 = 0$,

ը) $|3 - |2x - 5|| = 3$:

50. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $|x + 1| = |2 - 3x|$,

դ) $|2x - 1| = 3x + 6$,

բ) $|5 - x| = |x + 5|$,

է) $|4x - 3| = 8 - 6x$,

գ) $|2x + 1| = |2 + x|$,

զ) $|4 - 3x| = 5x - 1$:

51. Լուծե՛ք անհավասարումը.

ա) $|x| < 3$,

է) $|x| < -2$,

բ) $|x| \leq 5$,

զ) $|x| < 0$,

գ) $|x| < 2,3$,

է) $|x| \leq 0$,

դ) $|x| \leq 6$,

ը) $|x| \leq -9$:

52. Լուծե՛ք անհավասարումը.

ա) $|x| > 4$,

է) $|x| > -2$,

բ) $|x| \geq 3$,

զ) $|x| \geq -3,7$,

գ) $|x| > 7$,

է) $|x| > 0$,

դ) $|x| \geq 8$,

ը) $|x| \geq 0$:

53. Լուծե՛ք անհավասարումը.

ա) $|4x - 2| < 6$,

է) $|3x + 1| > 2$,

$$բ) |2x - 9| \leq 3,$$

$$գ) |1 - 8x| \geq 17,$$

$$դ) |15x - 4| < 10,$$

$$ե) |7 - 2x| \geq 3,$$

$$զ) |6x + 4| \leq 10,$$

$$ը) |4x - 3| > 5:$$

54. Լուծե՛ք անհավասարումը.

$$ա) |2x - 2| < x + 8,$$

$$բ) |3x - 2| > x + 4,$$

$$բ) |10x - 1| \leq 7x + 1,$$

$$ե) |5x + 2| \geq 4x + 4,$$

$$գ) |3x + 3| < 2x + 5,$$

$$զ) |11 - 7x| > 3x - 1:$$

§5. Իռացիոնալ հավասարումներ և անհավասարումներ

□ 9. Իռացիոնալ հավասարումներ

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: Արմատանշանի տակ կամ կոտորակային աստիճանով փոփոխական պարունակող հավասարումը կոչվում է իռացիոնալ հավասարում:

Այս կետում կդիտարկենք իռացիոնալ հավասարումներ, որոնցում փոփոխականը քառակուսի արմատի (թվաբանական քառակուսի արմատի) նշանի տակ է:

Այդ հավասարումներին անցնելուց առաջ վերհիշենք ոչ բացասական a թվի թվաբանական քառակուսի արմատի սահմանումը.

Ոչ բացասական a թվի թվաբանական քառակուսի արմատ կոչվում է այն ոչ բացասական թիվը, որի քառակուսին հավասար է a -ի:

Սա ավելի հակիրճ կարող ենք ներկայացնել հետևյալ ձևով.

$$\text{Ոչ բացասական } a \text{ թվի համար } \sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b^2 = a \end{cases}:$$

Սահմանումից հետևում է, որ.

1. $\sqrt{a}$ արտահայտության ԹԱԲ-ը որոշվում է $a \geq 0$ պայմանով,
2. եթե $a \geq 0$, ապա $\sqrt{a} \geq 0$,
3. եթե $a \geq 0$, ապա $(\sqrt{a})^2 = a$:

Սկզբում դիտարկենք $\sqrt{f(x)} = b$ տեսքի հավասարումը, որտեղ b -ն տրված թիվ է:

Եթե $b < 0$, ապա, ըստ 2 հատկության, հավասարումը լուծում չունի:

Օրինակ 1. $\sqrt{x} = -3$:

Եթե $\sqrt{x}$ -ը իմաստ ունի, ապա այն ոչ բացասական է, հետևաբար այն չի կարող հավասար լինել -3 -ին: Ուրեմն $x \in \emptyset$:

Օրինակ 2. $\sqrt{2x-9} = -1$:

Եթե $\sqrt{2x-9}$ -ը իմաստ ունի, ապա այն ոչ բացասական է, հետևաբար այն չի կարող հավասար լինել -1 -ին: Ուրեմն $x \in \emptyset$:

Եթե $b \geq 0$, ապա, ըստ քառակուսի արմատի սահմանման, այդպիսի հավասարումը համարժեք է $x = b^2$ հավասարմանը:

Լուծենք այդպիսի երկու հավասարում:

Օրինակ 3. $\sqrt{x} = 5$:

$$\sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow x = 5^2 \Leftrightarrow x = 25:$$

Օրինակ 4. $\sqrt{2x-9} = 7$:

$$\sqrt{2x-9} = 7 \Leftrightarrow 2x-9 = 49 \Leftrightarrow 2x = 58 \Leftrightarrow x = 29:$$

Անցնենք $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ տեսքի հավասարմանը:

Այսպիսի հավասարման ԹԱԲ-ը որոշվում է $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ համակարգով:

ԹԱԲ-ում հավասարման ձախ և աջ մասերը ոչ բացասական են: Ուրեմն

հավասարումը համարժեք է $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ համակարգին:

Համակարգում առկա $f(x) = g(x)$ պայմանը համարժեք է դարձնում $f(x) \geq 0$ և $g(x) \geq 0$ անհավասարումները: Դա հաշվի առնելով՝ այդպիսի հավասարում լուծելիս կգրենք ԹԱԲ-ը որոշող պայմաններից միայն մեկը

(բնականաբար ավելի պարզը):

Լուծենք այդպիսի հավասարում:

Օրինակ 5. $\sqrt{x^2 - 2x - 2} = \sqrt{x - 2}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 2x - 2} = \sqrt{x - 2} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 2 = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 0, x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 : \end{aligned}$$

Հաջորդը կդիտարկենք $\sqrt{f(x)} = g(x)$ **հավասարումը:**

Այն x -երը, որոնց համար $g(x) < 0$, ըստ 2 հատկության, չեն կարող բավարարել հավասարմանը:

Այն x -երի համար, որոնցում $g(x) \geq 0$, ըստ քառակուսի արմատի սահմանման, հավասարումը համարժեք է $f(x) = g^2(x)$ հավասարմանը:

$$\text{Ուրեմն } \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases} :$$

Օրինակ 6. $\sqrt{2x - 11} = x - 2$:

$$\begin{aligned}\sqrt{2x - 11} = x - 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2x - 11 = (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 6x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = -1, x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7 : \end{aligned}$$

Լուծենք ևս երկու հավասարում:

Օրինակ 7. $\frac{2x^2 - 9x + 10}{\sqrt{2 - x}} = 0$:

Քանի որ կոտորակը հավասար է զրոյի միայն այն դեպքում, երբ դրա համարիչը զրո է, իսկ հայտարարն իմաստ ունի և զրո չէ, ապա.

$$\frac{2x^2 - 9x + 10}{\sqrt{2 - x}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 9x + 10 = 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, x = 2,5 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2,5 :$$

Օրինակ 8. $(2x^2 - 7x + 3)\sqrt{2x - 3} = 0$:

Քանի որ արտադրյալը հավասար է զրոյի միայն այն դեպքում, երբ դրա որևէ արտադրիչ զրո է, իսկ մյուս արտադրիչներն իմաստ ունեն, ապա.

$$(2x^2 - 7x + 3)\sqrt{x-2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 = 0 \\ x - 2 = 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, x = 3 \\ x = 2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3; x = 2 :$$

□ 10. Իռացիոնալ անհավասարումներ

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: Արմատանշանի տակ կամ կոտորակային աստիճանով փոփոխական պարունակող անհավասարումը կոչվում է իռացիոնալ անհավասարում:

Այս կետում կդիտարկենք իռացիոնալ անհավասարումներ, որոնցում փոփոխականը քառակուսի արմատի (թվաբանական քառակուսի արմատի) նշանի տակ է:

Սկզբում դիտարկենք $\sqrt{f(x)} > b$, $\sqrt{f(x)} \geq b$, $\sqrt{f(x)} < b$, $\sqrt{f(x)} \leq b$ **տեսքի անհավասարումները, որտեղ** b -ն **տրված թիվ է:**

Եթե $b < 0$, ապա, ըստ 2 հատկության, առաջին երկու անհավասարումների լուծումը համընկնում է այդ անհավասարումների ԹԱԲ-ի հետ: Նույն պատճառով վերջին երկու անհավասարումները լուծում չունեն՝ $x \in \emptyset$:

Օրինակ 1. $\sqrt{x} > -0,3$:

Այս անհավասարման ԹԱԲ-ի պայմանն է՝ $x \geq 0$: Ուրեմն անհավասարման լուծումն է $x \in [0; +\infty)$:

Օրինակ 2. $\sqrt{4x-5} \geq -1,2$:

Այս անհավասարման ԹԱԲ-ի պայմանն է՝ $4x-5 \geq 0$: Ուրեմն

$$4x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{4} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{5}{4}; +\infty \right):$$

Օրինակ 3. $\sqrt{x} < -1$:

Եթե $\sqrt{x}$ -ը իմաստ ունի, ապա այն ոչ բացասական է, հետևաբար այն չի կարող փոքր լինել -1 -ից: Ուրեմն $x \in \emptyset$:

Օրինակ 4. $\sqrt{x-9} \leq -2$:

Եթե $\sqrt{x-9}$ -ը իմաստ ունի, ապա այն ոչ բացասական է, հետևաբար այն չի կարող փոքր լինել -2 -ից: Ուրեմն $x \in \emptyset$:

Եթե $b \geq 0$, ապա.

$$\text{ա) } \sqrt{f(x)} > b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > b^2 \end{cases}, \quad \text{գ) } \sqrt{f(x)} < b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < b^2 \end{cases},$$

$$\text{բ) } \sqrt{f(x)} \geq b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \geq b^2 \end{cases}, \quad \text{դ) } \sqrt{f(x)} \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq b^2 \end{cases}:$$

ա) և բ) դեպքերում ԹԱԲ-ի պայմանը՝ $f(x) \geq 0$ -ը ավելորդ է, քանի որ եթե $f(x) > b^2$ կամ $f(x) \geq b^2$, ապա $f(x) \geq 0$:

Ուրեմն $\sqrt{f(x)} > b \Leftrightarrow f(x) > b^2$, իսկ $\sqrt{f(x)} \geq b \Leftrightarrow f(x) \geq b^2$:

Իսկ գ) և դ) դեպքերում ԹԱԲ-ի պայմանը հանել չի կարելի:
Լուծենք այդպիսի երկու անհավասարում:

Օրինակ 5. $\sqrt{2x-1} > 7$:

$$\sqrt{2x-1} > 7 \Leftrightarrow 2x-1 > 49 \Leftrightarrow x > 25 \Leftrightarrow x \in (25; +\infty):$$

Օրինակ 6. $\sqrt{3x+4} \leq 5$:

$$\sqrt{3x+4} \leq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4 \geq 0 \\ 3x+4 \leq 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq -4 \\ 3x \leq 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{4}{3} \\ x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{4}{3}; 7\right]:$$

Անցնենք $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$, $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}$, $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$, $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$
տեսքի անհավասարումներին:

Նախ նկատենք, որ եթե երրորդ և չորրորդ անհավասարումները կարդանք աջից ձախ՝ $\sqrt{g(x)} > \sqrt{f(x)}$, $\sqrt{g(x)} \geq \sqrt{f(x)}$, ապա դրանք համապատասխանաբար նույն տեսակի են, ինչ առաջին և երկրորդ անհավասարումները: Ուրեմն իմաստ ունի խոսել միայն առաջին և երկրորդ տեսքի անհավասարումների մասին:

Այսպիսի անհավասարումների ԹԱԲ-ը որոշվում է $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ համա-

կարգով: ԹԱԲ-ում հավասարման ձախ և աջ մասերը ոչ բացասական են: Ուրեմն

$$a) \sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}, \quad b) \sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} :$$

ա) դեպքում համակարգում առկա $f(x) > g(x)$ պայմանը ավելորդ է դարձնում $f(x) \geq 0$ պայմանը, քանի որ եթե $f(x) > g(x)$ և $g(x) \geq 0$, ապա $f(x) \geq 0$:

բ) դեպքում նույնպես համակարգի $f(x) \geq 0$ պայմանն ավելորդ է:

Դա հաշվի առնելով՝ այդպիսի անհավասարումներ լուծելիս կգրենք միայն անհավասարման այն կողմի ԹԱԲ-ը, որը «փոքրի թևում» է (դիտարկվող դեպքերում $g(x) \geq 0$ -ն):

Լուծենք այդպիսի անհավասարում:

Օրինակ 7. $\sqrt{x^2 - 2x - 3} < \sqrt{2x - 3}$:

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} < \sqrt{2x - 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 < 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x < 0 \end{cases} :$$

Լուծելով վերջին համակարգի անհավասարումները՝ կունենանք.

$$\begin{cases} x \in (-\infty - 1] \cup [3; +\infty) \\ x \in (0; 4) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [3; 4):$$

Ուշադրություն դարձրեք, որ անհավասարումը լուծելիս գրեցինք տրված անհավասարման ԹԱԲ-ը որոշող պայմաններից միայն այն կողմի ԹԱԲ-ը, որը «փոքրի թևում» է՝ $x^2 - 2x - 3 \geq 0$:

Լուծենք ևս մեկ անհավասարում:

Օրինակ 8. $\frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{2x - 4}} < 0$:

Նկատենք, որ անհավասարման ԹԱԲ-ում կոտորակի հայտարարը դրական է, հետևաբար կոտորակի նշանը համընկնում է համարիչի նշանի հետ: Ուրեմն

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{2x - 4}} < 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 > 0 \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (2; +\infty) \\ x \in (-2; 3) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2; 3): \end{aligned}$$



Հարցեր և խնդիրներ

55. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $\sqrt{x} = 2$,

ե) $\sqrt{x} = -4$,

բ) $\sqrt{x} = 6$,

զ) $\sqrt{7-4x} = 5$,

գ) $\sqrt{x} = 1,2$,

է) $\sqrt{-9x} = 6$,

դ) $\sqrt{x} = -3$,

ը) $\sqrt{2x-5} = 2$:

56. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $\sqrt{5x-1} = -2$,

ե) $\sqrt{3x+2} = \sqrt{5-x}$,

բ) $\sqrt{5x-x^2} = 2$,

զ) $\sqrt{4-2x} = \sqrt{x+1}$,

գ) $\sqrt{x^2-5x+2} = 4$,

է) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{1-3x}$,

դ) $\sqrt{2x^2-5x-3} = 1$,

ը) $\sqrt{1-5x} = \sqrt{2-3x}$:

57. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $\sqrt{2x+3} = x-6$,

դ) $\sqrt{10-3x} = x-2$,

բ) $\sqrt{2x+9} = x+3$,

ե) $\sqrt{9-10x} = 3-2x$,

գ) $\sqrt{4x-3} = 2x-3$,

զ) $\sqrt{x^2+4x+3} = x+1$:

58. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $\frac{x^2-2x-3}{\sqrt{3-x}} = 0$,

ե) $(x^2-x-20)\sqrt{x+3} = 0$,

բ) $\frac{x^2-x-6}{\sqrt{2-x}} = 0$,

զ) $(x^2-3x-4)\sqrt{5x-2} = 0$,

գ) $\frac{2x^2-5x-3}{\sqrt{x-2}} = 0$,

է) $(x^2-5x-6)\sqrt{x+1} = 0$,

$$\eta) \frac{3x^2 - 14x - 5}{\sqrt{x-4}} = 0,$$

$$\varrho) (x^2 - 8x + 15)\sqrt{x-4} = 0:$$

59. Լուծե՛ք անհավասարումը.

$$\text{ա) } \sqrt{x} > 3,$$

$$\text{է) } \sqrt{2x+1} > 3,$$

$$\text{բ) } \sqrt{x} \geq 5,$$

$$\text{զ) } \sqrt{5-3x} \geq 1,$$

$$\text{գ) } \sqrt{x} > -2,$$

$$\text{է) } \sqrt{9-3x} > -7,$$

$$\text{դ) } \sqrt{x} \geq -6,$$

$$\text{ը) } \sqrt{6-3x} \geq 3:$$

60. Լուծե՛ք անհավասարումը.

$$\text{ա) } \sqrt{x} \leq 4,$$

$$\text{է) } \sqrt{2x+1} < 5,$$

$$\text{բ) } \sqrt{x} < 5,$$

$$\text{զ) } \sqrt{4x-9} \leq 7,$$

$$\text{գ) } \sqrt{x} < -1,$$

$$\text{է) } \sqrt{3x+7} < -8,$$

$$\text{դ) } \sqrt{x} \leq 0,$$

$$\text{ը) } \sqrt{10x-4} \leq 5:$$

61. Լուծե՛ք անհավասարումը.

$$\text{ա) } \sqrt{5x+4} > 3,$$

$$\text{է) } \sqrt{3+5x} > \sqrt{1-x},$$

$$\text{բ) } \sqrt{8x-1} \leq 7,$$

$$\text{զ) } \sqrt{4-2x} \leq \sqrt{1+x},$$

$$\text{գ) } \sqrt{9-2x} > 5,$$

$$\text{է) } \sqrt{3x+4} \geq \sqrt{7x+1},$$

$$\text{դ) } \sqrt{15-3x} \leq 7,$$

$$\text{ը) } \sqrt{4-2x} < \sqrt{1+x}:$$

62. Լուծե՛ք անհավասարումը.

$$\text{ա) } \sqrt{4x^2 - 5x + 7} \geq \sqrt{1+2x},$$

$$\text{դ) } \frac{x^2 + 9x + 14}{\sqrt{x+5}} > 0,$$

$$\text{բ) } \sqrt{x+1} \leq \sqrt{3x+4},$$

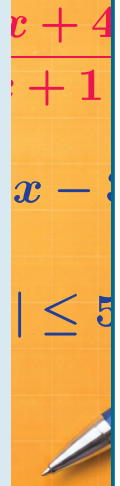
$$\text{է) } \frac{x^2 + 2x - 8}{\sqrt{2x+10}} < 0,$$

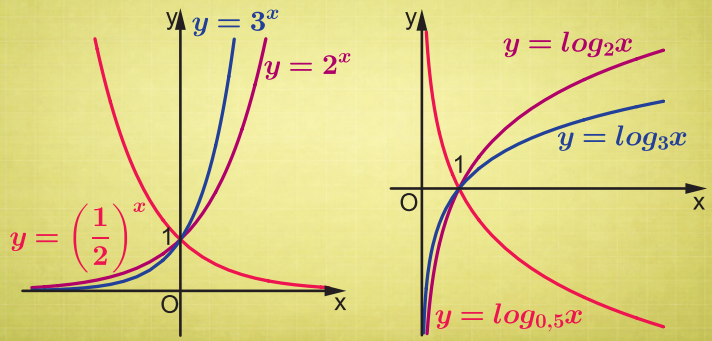
$$գ) \sqrt{3+4x} > \sqrt{1-2x},$$

$$զ) \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x-1}} > 0:$$

Ուսումնասիրելով այս գլուխը՝

- Վերհիշեցիք գծային հավասարումների ու անհավասարումների սահմանումներն ու լուծման եղանակները:
- Վերհիշեցիք քառակուսային հավասարումների ու անհավասարումների սահմանումներն ու լուծման քայլաշարերը:
- Վերհիշեցիք ռացիոնալ հավասարումների ու անհավասարումների սահմանումներն ու լուծման քայլաշարերը:
- Վերհիշեցիք մոդուլ պարունակող հավասարումների ու անհավասարումների սահմանումներն ու լուծման քայլաշարերը:
- Վերհիշեցիք իռացիոնալ հավասարումների ու անհավասարումների սահմանումներն ու լուծման քայլաշարերը:
- Ամրապնդեցիք հավասարումներ և անհավասարումներ լուծելու, ինչպես նաև հավասարում կազմելու միջոցով խնդիրներ լուծելու հմտությունները:





ՖՈՒՑԶԱՅԻՆ ԵՎ ԼՈԳԱՐԻԹՄԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ



Ուսումնասիրելով այս գլուխը՝

- Կձանոթանաք լոգարիթմ հասկացության և նրա հատկությունների հետ: Ձեռք կբերեք լոգարիթմական արտահայտություններ ձևափոխելու հմտություններ:
- Կսովորեք ցուցչային և լոգարիթմական ֆունկցիաների սահմանումները և հատկությունները:
- Կձանոթանաք ցուցչային հավասարումների և անհավասարումների տարբեր տեսակների հետ, կսովորեք լուծել այդպիսի հավասարումներ և անհավասարումներ:
- Կձանոթանաք լոգարիթմական հավասարումների և անհավասարումների տարբեր տեսակների հետ, կսովորեք լուծել այդպիսի հավասարումներ և անհավասարումներ:

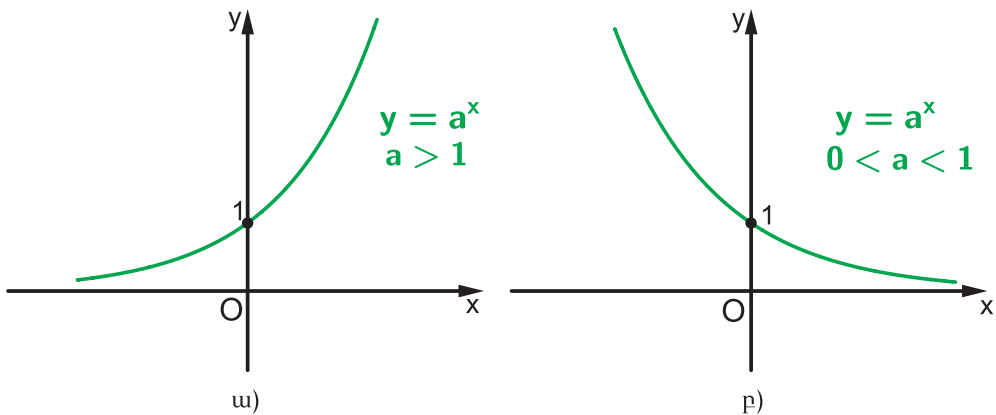
§6. Ցուցային և լոգարիթմական ֆունկցիաներ

□ 11. Ցուցային ֆունկցիա

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: $y = a^x$ ֆունկցիան, որտեղ a -ն մեկից տարբեր դրական թիվ է ($a > 0, a \neq 1$), կոչվում է ցուցային ֆունկցիա:

Թվարկենք ցուցային ֆունկցիայի հատկությունները և կառուցենք գրաֆիկը.

1. ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ $D(y) = (-\infty; +\infty)$,
2. ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը՝ $E(y) = (0; +\infty)$,
3. ֆունկցիան չունի զրոներ, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ,
4. ֆունկցիայի գրաֆիկը հատում է y -ների առանցքը $(0; 1)$ կետում,
5. ֆունկցիան աճող է, երբ $a > 1$ և նվազող է, երբ $0 < a < 1$ (նկ. 13 ա) և բ)):



Նկ. 13



Ինտերակտիվ մոդել
Ցուցային ֆունկցիա

□ 12. Լոգարիթմի սահմանումը, լոգարիթմական ֆունկցիա

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: b դրական թվի a ($a > 0, a \neq 1$) հիմքով լոգարիթմ կոչվում է այն c թիվը, որի համար $a^c = b$:

b թվի a հիմքով լոգարիթմը նշանակում են $\log_a b$ (կարդացվում է՝ լոգարիթմ a հիմքով b): Ուրեմն, սահմանման մեջ նշված պայմանների դեպքում, $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$:

Լոգարիթմի սահմանումից հետևում է, օրինակ, որ

$$\log_2 8 = 3, \text{ քանի որ } 2^3 = 8,$$

$$\log_3 9 = 2, \text{ քանի որ } 3^2 = 9,$$

$$\log_7 1 = 0, \text{ քանի որ } 7^0 = 1,$$

$$\log_9 3 = \frac{1}{2}, \text{ քանի որ } 9^{\frac{1}{2}} = 3,$$

$$\log_4 \frac{1}{16} = -2, \text{ քանի որ } 4^{-2} = \frac{1}{16}:$$

Սահմանումից հետևում է, որ $a^{\log_a b} = b$ ($a > 0, a \neq 1, b > 0$), որը կոչվում է **հիմնական լոգարիթմական նույնություն**:

Իրոք, քանի որ $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$, ապա երկրորդում c -ն փոխարինելով $\log_a b$ -ով՝ կունենանք՝ $a^{\log_a b} = b$:

Հիմնական լոգարիթմական նույնությունից հետևում է, օրինակ, որ $2^{\log_2 8} = 8$, $7^{\log_7 5} = 5$, $\sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}} 11} = 11$:

Ընդունված է 10 հիմքով և e հիմքով (e -ն իռացիոնալ թիվ է, $e \approx 2,71828$) լոգարիթմները գրել այլ ձևով. $\log_{10} b \equiv \lg b$, $\log_e b \equiv \ln b$:

e թիվը սահմանել ու դրա մոտավոր արժեքը առաջինը հաշվել է շվեյցարացի մաթեմատիկոս Յակոբ Բեռնուլիին՝ տոկոսային եկամուտի սահմանային մեծության մասին խնդիրը լուծելիս:

Հետագայում այդ թվի նշանակման համար Լեոնարդ Էյլերը օգտագործեց e տառը, մանրամասն ուսումնասիրեց դրա հատկությունները և

հաշվեց դրա արժեքը 18 տասնորդական նիշի ճշտությամբ: Այդ պատճառով հաճախ e թիվն անվանում են նաև էյլերի թիվ:

Ֆակոր Բեռնուլիի, Լեոնարդ էյլերի, e թվի մասին ավելին իմանալու համար օգտվեք այստեղ տեղադրված QR կոդերից:



Չնայած լոգարիթմի սահմանումից ելնելով՝ կարող ենք ասել, որ $\log_a b$ -ն $a^x = b$ հավասարման արմատն է, բայց պատմականորեն լոգարիթմը ներմուծվել է այլ նպատակով: Այդ հասկացությունը ներմուծել է շոտլանդացի մաթեմատիկոս Ջոն Նեպիերը (John Napier): Նեպիերը լոգարիթմներն օգտագործել է որպես մի գործիք, որոնք բազմապատկումը և բաժանումը վերածում են ավելի պարզ գործողությունների՝ գումարման և հանման:

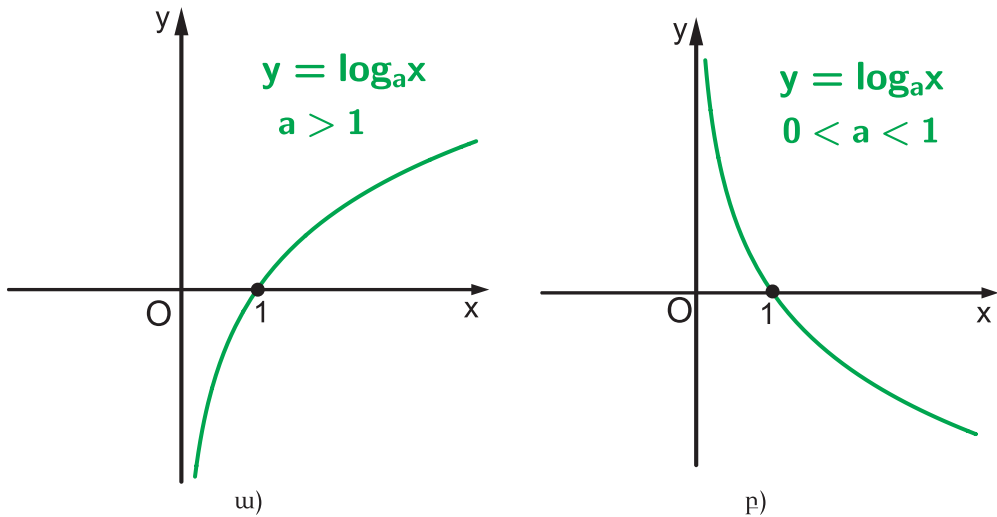


Դա այն ժամանակ կարևոր էր մեծ թվերի հետ կատարվող գործողությունները հեշտացնելու համար:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: $y = \log_a x$ ֆունկցիան, որտեղ a -ն մեկից տարբեր դրական թիվ է ($a > 0, a \neq 1$), կոչվում է լոգարիթմական ֆունկցիա:

Թվարկենք լոգարիթմական ֆունկցիայի հատկությունները և կառուցենք գրաֆիկը.

1. ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ $D(y) = (0; +\infty)$,
2. ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը՝ $E(y) = (-\infty; +\infty)$,
3. ֆունկցիան ունի մեկ զրո՝ $x = 1$ -ը,
4. ֆունկցիան չունի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ,
5. ֆունկցիան աճող է, երբ $a > 1$, և նվազող է, երբ $0 < a < 1$ (նկ. 14 ա) և բ):



Նկ. 14



Ինտերակտիվ մոդել
Լոգարիթմական ֆունկցիա

13. Լոգարիթմի հիմնական հատկությունները

Ներկայացնենք լոգարիթմի մի քանի հատկություն:

Ցանկացած $a > 0$, $a \neq 1$ հիմքի և ցանկացած $b > 0$, $c > 0$ թվերի համար.

$$1. \log_a bc = \log_a b + \log_a c,$$

$$2. \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c,$$

$$3. \log_a b^m = m \log_a b \quad (m \in \mathbb{R}),$$

$$4. \log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b \quad (k \in \mathbb{R}),$$

$$5. \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (b \neq 1),$$

$$6. \log_a b \cdot \log_c d = \log_a d \cdot \log_c b \quad (c \neq 1, d > 0):$$

Ապացուցենք սրանցից առաջինն ու երրորդը:

$$1. \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c, \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0):$$

Նշված պայմանների դեպքում, ըստ հիմնական լոգարիթմական նույնության՝ $b = a^{\log_a b}$, $c = a^{\log_a c}$: Հետևաբար

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a (a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c}) = \log_a a^{\log_a b + \log_a c} :$$

Վերջինս էլ, ըստ լոգարիթմի սահմանման,

$$\log_a a^{\log_a b + \log_a c} = \log_a b + \log_a c :$$

3. $\log_a b^m = m \log_a b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $m \in \mathbb{R}$):

Նշված պայմանների դեպքում, ըստ հիմնական լոգարիթմական նույնության՝ $b = a^{\log_a b} \Leftrightarrow b^m = (a^{\log_a b})^m = a^{m \cdot \log_a b}$: Հետևաբար

$$\log_a b^m = \log_a a^{m \cdot \log_a b} = m \cdot \log_a b :$$

Լոգարիթմի հատկությունները կիրառենք տրված արտահայտությունների արժեքները հաշվելու համար:

Օրինակ 1. $\log_2 24 + \log_2 \frac{2}{3}$:

$$\log_2 24 + \log_2 \frac{2}{3} = \log_2 24 \cdot \frac{2}{3} = \log_2 16 = 4 :$$

Օրինակ 2. $\log_5 100 - \log_5 4$:

$$\log_5 100 - \log_5 4 = \log_5 \frac{100}{4} = \log_5 25 = 2 :$$

Օրինակ 3. $\log_{\sqrt{3}} 27$:

$$\log_{\sqrt{3}} 27 = \log_{\frac{1}{3^2}} 3^3 = \frac{3}{\frac{1}{2}} \log_3 3 = 6 \cdot 1 = 6 :$$

Օրինակ 4. $6^{2+\log_6 7}$:

$$6^{2+\log_6 7} = 6^2 \cdot 6^{\log_6 7} = 36 \cdot 7 = 252 :$$

Օրինակ 5. $4^{2-\log_4 3}$:

$$4^{2-\log_4 3} = 4^2 : 4^{\log_4 3} = 16 : 3 = \frac{16}{3} :$$

Օրինակ 6. $\log_5 27 \cdot \log_3 25$:

$$\log_5 27 \cdot \log_3 25 = \log_5 25 \cdot \log_3 27 = 2 \cdot 3 = 6 :$$

Օրինակ 7. $\log_7 9 \cdot \log_5 49 \cdot \log_3 25$:

$$\log_7 9 \cdot \log_5 49 \cdot \log_3 25 = \log_7 49 \cdot \log_5 25 \cdot \log_3 9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 :$$

Օրինակ 8. Գտնենք $\log_a a^4 b^3$ արտահայտության արժեքը, եթե հայտնի է, որ $\log_b a = \frac{1}{2}$:

Ունենք. $\log_a a^4 b^3 = \log_a a^4 + \log_a b^3 = 4 + 3 \log_a b$: Իսկ $\log_b a = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_a b = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$: Ուրեմն $\log_a a^4 b^3 = 4 + 3 \log_a b = 4 + 3 \cdot 2 = 10$:



Հարցեր և խնդիրներ

63. Օգտվելով ցուցային ֆունկցիայի հատկություններից՝ սխեմատիկ պատկերե՛ք ֆունկցիայի գրաֆիկը: Նշե՛ք ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և արժեքների բազմությունը.

ա) $y = 2^x$,

գ) $y = 5^x$,

բ) $y = 0,3^x$,

դ) $y = 0,7^x$:

64. Սխեմատիկորեն պատկերելով ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ գտե՛ք x -ի այն արժեքները, որոնց դեպքում ֆունկցիայի արժեքը մեծ է 1-ից.

ա) $y = 4^x$,

գ) $y = 6^x$,

բ) $y = 0,4^x$,

դ) $y = 0,2^x$:

65. Գտե՛ք a -ի այն արժեքները, որոնց դեպքում ֆունկցիան ամբողջ թվաին առանցքի վրա 1) աճում է, 2) նվազում է.

ա) $y = a^x$,

գ) $y = (2a + 3)^x$,

բ) $y = (a + 3)^x$,

դ) $y = \sqrt{a}^x$:

66. Գտն՞ք տրված արտահայտության արժեքը, նշված պայմանի դեպքում.

ա) $2^{2x} + 2^{-2x}$, եթե $2^x + 2^{-x} = 3$, գ) $7^{2x} + 7^{-2x}$, եթե $7^x - 7^{-x} = 5$,

բ) $6^{2x} + 6^{-2x}$, եթե $6^x + 6^{-x} = 4$, դ) $9^{2x} + 9^{-2x}$, եթե $9^x - 9^{-x} = 7$:

67. Ելնելով լոգարիթմի սահմանումից՝ գտն՞ք արտահայտության արժեքը.

ա) $\log_2 8$, ե) $\log_3 27$,

բ) $\log_3 9$, գ) $\log_6 36$,

զ) $\log_5 125$, է) $\log_4 64$,

դ) $\lg 1000$, ը) $\log_3 \frac{1}{9}$:

68. Ո՞ր երկու հաջորդական ամբողջ թվերի միջև է արտահայտության արժեքը.

ա) $\log_2 7$, դ) $\log_4 57$,

բ) $\log_3 30$, ե) $\log_2 12$,

զ) $\lg 40$, գ) $\log_3 \frac{1}{20}$:

69. Օգտվելով լոգարիթմական ֆունկցիայի հատկություններից՝ սխեմատիկ պատկերե՛ք ֆունկցիայի գրաֆիկը: Նշե՛ք ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և արժեքների բազմությունը.

ա) $y = \log_5 x$, գ) $y = \log_8 (2x - 4)$,

բ) $y = \log_{0,5} (x + 1)$, դ) $y = \log_{0,6} (x - 3)$:

70. Սխեմատիկ պատկերելով ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ գտն՞ք x -ի այն արժեքները, որոնց դեպքում ֆունկցիայի արժեքը մեծ է 0-ից.

ա) $y = \log_4 x$, գ) $y = \log_{12} x$,

բ) $y = \log_{0,9} x$, դ) $y = \log_{0,1} x$:

71. Որոշե՛ք արտահայտության նշանը.

ա) $\log_2 3,2$, դ) $\log_{0,4} 5$,

բ) $\log_3 0,8$, ե) $\log_{0,2} 0,9$,

զ) $\lg 5$, գ) $\log_{0,6} 0,2$:

72. Դասավորե՛ք աճման կարգով.

- ա) $2^{-0,21}$, $2^{1,3}$, $2^{-1,7}$, $2^{0,8}$, գ) $\log_2 5$, $\log_2 3$, $\log_2 9$, $\log_2 7$,
բ) $0,6^{-0,16}$, $0,6^{-1,1}$, $0,6^{1,4}$, $0,6^{0,7}$, դ) $\log_{0,7} 2$, $\log_{0,7} 1$, $\log_{0,7} 5$, $\log_{0,7} 4$:

73. Լիլիթը 800000 դրամ ավանդ դրեց բանկում՝ տարեկան 10% տոկոսադրույքով, բարդ տոկոսի հաշվարկով (ամեն տարվա վերջում տարեկազբում եղած գումարն ավելանում է 10%-ով): Ինչքա՞ն եկամուտ կունենա Լիլիթը երեք տարի անց:

74. Ռադիումի կիսատրոհման պարբերությունը 1600 տարի է, ինչը նշանակում է, որ դրա զանգվածը 1600 տարի հետո 2 անգամ փոքրանում է: Ինչքա՞ն ռադիում կմնա 10 գ ռադիումից 50 տարի հետ:

75. Ըստ պաշտոնական տվյալների՝ 2000 թվականին Հայաստանում ապրել է 3226900 մարդ, իսկ 2024 թվականին՝ 3039700 մարդ: Միջինում տարեկան քանի՞ տոկոսով է նվազել Հայաստանի բնակչությունը: Ինչքա՞ն կլինի Հայաստանի բնակչությունը 2050 թվականին, եթե նվազման ցուցանիշը պահպանվի:

76. Ըստ 1989 թվականի մարդահամարի՝ Հայաստանում ապրում էր 3083616 հայ: Քանի՞ հայ էր ապրում Հայաստանում 1926 թվականին, եթե ամեն տարի հայերի քանակը միջինում ավելացել է 2,3%-ով:

77. Արամը գնեց ինչ-որ ընկերության 50 բաժնետոմս՝ ամեն մեկը 20000 դրամով: Առաջին տարում շուկայում բաժնետոմսերի գինը նվազեց 9%-ով, իսկ երկրորդ տարուց սկսած՝ ամեն տարի բաժնետոմսի արժեքը շուկայում բարձրանում էր 6 տոկոսով: Հինգ տարին լրանալուց հետո Արամը վաճառեց բոլոր բաժնետոմսերը: Որքա՞ն գումար շահեց նա հինգ տարի հետո:



Խմբային աշխատանք

Դասարանի աշակերտներին բաժանեք երկու խմբի: Խմբով թող քննարկեն հետևյալ հարցերը և ներկայացնեն իրենց եզրակացություններն ու հիմնավորումները.

Բանկը երկարաժամկետ (3 և ավելի տարի) ավանդի դեպքում յուրաքանչյուր տարվա համար գումարն ավելացնում է ավանդի 11%-ի չափով՝ ժամկետի ավարտին:

Իսկ մեկ տարի ժամկետով ավանդի դեպքում գումարն ավելացնում

է ավանդի 9%-ի չափով՝ ժամկետի ավարտին:

Գործում է նաև պայման, ըստ որի՝ ժամկետից շուտ պայմանագիրը խզելու դեպքում տոկոսադրույքը հաշվարկվում է 7%-ի չափով:

500000 դրամ ավանդ դնելու դժր տարբերակն է ավելի շահավետ և ինչքան՝ 3 տարով ավանդ դնելը, թե՛ 1 տարով երեք անգամ հաջորդաբար ավանդ դնելը:

Ո՞ր տարբերակը ավելի շահավետ կլինի և ինչքան, եթե հանկարծ ստիպված լինեք ավանդն ընդհատել երկու տարի հետո:



Խմբային աշխատանք

Դասարանի աշակերտներին բաժանեք երկու խմբի:

Խմբերից ամեն մեկը GeoGebra ծրագրով կառուցում է.

1) $y = a^x$ և $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները՝ a -ի մի քանի թույլ-

լատրելի արժեքի համար: Խմբով քննարկում և պատասխանում են հետևյալ հարցին. Ո՞րն է այդ գրաֆիկների համաչափության առանցքը:

2) $y = \log_a x$ և $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները՝ a -ի մի քա-

նի թույլատրելի արժեքի համար: Խմբով քննարկում և պատասխանում են հետևյալ հարցին. Ո՞րն է այդ գրաֆիկների համաչափության առանցքը:

3) $y = a^x$ և $y = \log_a x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները՝ a -ի մի քանի թույլատրելի արժեքի համար: Խմբով քննարկում և պատասխանում են հետևյալ հարցին. Ո՞րն է այդ գրաֆիկների համաչափության առանցքը:

78. Գտե՛ք արտահայտության արժեքը.

ա) $\lg 25 + \lg 4$,

ե) $\lg 8 + \lg 12,5$,

բ) $\log_6 12 + \log_6 3$,

զ) $\log_4 20 + \log_4 3,2$,

գ) $\log_8 4 + \log_8 16$,

է) $\log_5 4 + \log_5 0,25$,

դ) $\log_3 2 + \log_3 4,5$,

ը) $\log_{\frac{1}{6}} 9 + \log_{\frac{1}{6}} 4$:

79. Գտե՛ք արտահայտության արժեքը.

ա) $\log_5 50 - \log_5 2$,

է) $\lg 200 - \lg 2$,

բ) $\log_3 36 - \log_3 4$,

զ) $\log_4 20 - \log_4 5$,

գ) $\log_3 108 - \log_3 4$,

է) $\log_6 144 - \log_6 4$,

դ) $\log_2 120 - \log_2 30$,

ը) $\log_2 3 - \log_2 12$:

80. Գտե՛ք արտահայտության արժեքը.

ա) $\log_{100} 10$,

է) $\log_{\sqrt{5}} 0,2$,

բ) $\log_{\sqrt{3}} 9$,

զ) $\log_{27} \sqrt{3}$,

գ) $\log_9 \sqrt{3}$,

է) $\log_{0,5} \sqrt{2}$,

դ) $\log_{\sqrt{2}} 4$,

ը) $\log_{\sqrt{5}} 25$:

81. Գտե՛ք արտահայտության արժեքը.

ա) $2^{\log_2 7}$,

է) $4^{1+\log_4 5}$,

բ) $3^{\log_3 11}$,

զ) $3^{2+\log_3 4}$,

գ) $5^{\log_5 17}$,

է) $4^{1-\log_4 5}$,

դ) $7^{1+\log_7 13}$,

ը) $3^{2-\log_3 4}$:

82. Գտե՛ք արտահայտության արժեքը.

ա) $\log_6 25 \cdot \log_5 36$,

է) $\log_3 5 \cdot \log_5 11 \cdot \log_{11} 3$,

բ) $\log_5 27 \cdot \log_3 5$,

զ) $\log_2 6 \cdot \log_6 10 \cdot \lg 8$,

գ) $\log_7 27 \cdot \log_3 49$,

է) $\log_4 27 \cdot \log_5 16 \cdot \log_3 25$,

դ) $\log_{\sqrt{2}} 25 \cdot \log_5 2$,

ը) $\log_4 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_{25} 64$:

83. Գտե՛ք տրված արտահայտության արժեքը նշված պայմանի դեպքում.

ա) $\log_a a^2 b^3$, եթե $\log_a b = 2$,

զ) $\log_a a^2 b^3$, եթե $\log_b a = \frac{1}{3}$,

բ) $\log_a a^3 b^2$, եթե $\log_a b = 4$,

դ) $\log_a a^4 b$, եթե $\log_b a = \frac{1}{5}$:

§7. Ցուցային հավասարումներ և անհավասարումներ

□ 14. Ցուցային հավասարումներ

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: $a^{f(x)} = b$ տեսքի հավասարումը, որտեղ $a > 0$, $a \neq 1$, կոչվում է ցուցային հավասարում:

Սկզբում դիտարկենք $a^{f(x)} = b$ տեսքի հավասարումը, որտեղ $a > 0$, $a \neq 1$, իսկ b -ն տրված թիվ է:

Դիտարկենք երկու դեպք:

Դեպք 1. $b \leq 0$:

Այս դեպքում $a^{f(x)} = b$ հավասարումը լուծում չունի՝ $x \in \emptyset$, քանի որ դրական թվի ցանկացած աստիճան դրական թիվ է:

Դեպք 2. $b > 0$:

Այս դեպքում, ըստ լոգարիթմի սահմանման, $a^{f(x)} = b$ հավասարումը համարժեք է $f(x) = \log_a b$ -ին:

Օրինակ 1. $3^x = -7$:

Քանի որ հավասարման աջ մասը բացասական է, ապա այն լուծում չունի՝ $x \in \emptyset$:

Օրինակ 2. $2^{3x-9} = -1$:

Այս հավասարումը նույնպես լուծում չունի՝ $x \in \emptyset$, քանի որ հավասարման աջ մասը բացասական է:

Օրինակ 3. $9^x = 11$:

Հավասարման աջ մասը դրական է, ուրեմն $x = \log_9 11$:

Օրինակ 4. $2^{2x-4} = 8$:

Հավասարման աջ մասը դրական է, ուրեմն այն համարժեք է $2x - 5 = \log_2 8$ հավասարմանը: Վեջինից էլ կունենանք. $2x - 5 = 3 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = 4$:

Այլ տեսքի ցուցային հավասարումները այս կամ այն եղանակով բերվում են $a^{f(x)} = b$ տեսքի հավասարումների:

Ներկայացնենք այդպիսի հավասարումների լուծման մի քանի օրինակ:

Օրինակ 5. $\frac{2^{2x-1} \cdot 4^{x+1}}{8^{x-1}} = 64:$

Ձևափոխելով տրված հավասարումը՝ այն բերենք $a^{f(x)} = b$ տեսքի, ապա լուծենք ստացված հավասարումը.

$$\begin{aligned} \frac{2^{2x-1} \cdot 4^{x+1}}{8^{x-1}} = 64 &\Leftrightarrow \frac{2^{2x-1} \cdot 2^{2(x+1)}}{2^{3(x-1)}} = 2^6 \Leftrightarrow 2^{2x-1+2(x+1)-3(x-1)} = 2^6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^{x+4} = 2^6 \Leftrightarrow x+4=6 \Leftrightarrow x=2: \end{aligned}$$

Օրինակ 6. $7^x + 7^{x+2} = 350:$

$$7^x + 7^{x+2} = 350 \Leftrightarrow 7^x (1 + 7^2) = 350 \Leftrightarrow 7^x = \frac{350}{50} \Leftrightarrow 7^x = 7 \Leftrightarrow x = 1:$$

Օրինակ 7. $4^{x-5} + 5^{x-4} = 5^{x-3} - \frac{3}{2} \cdot 4^{x-3}:$

Ձևափոխելով տրված հավասարումը՝ այն բերենք $a^{f(x)} = b$ տեսքի, ապա լուծենք ստացված հավասարումը.

$$\begin{aligned} 4^{x-5} + 5^{x-4} &= 5^{x-3} - \frac{3}{2} \cdot 4^{x-3} \Leftrightarrow 4^{x-5} + \frac{3}{2} \cdot 4^{x-3} = 5^{x-3} - 5^{x-4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4^{x-5} \left(1 + \frac{3}{2} \cdot 4^2 \right) = 5^{x-5} (5^2 - 5) \Leftrightarrow 4^{x-5} \cdot 25 = 5^{x-5} \cdot 20 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{4}{5} \right)^{x-5} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow x-5=1 \Leftrightarrow x=6: \end{aligned}$$

Օրինակ 8. $5 \cdot 5^{2x-1} - 24 \cdot 5^x - 25 = 0:$

Քանի որ $5 \cdot 5^{2x-1} = 5^{2x} = (5^x)^2$, ապա տրված հավասարումը կարող ենք ներկայացնել $(5^x)^2 - 24 \cdot 5^x - 25 = 0$ տեսքով: Նշանակելով $5^x \equiv y$ ՝ կունենանք.

$$y^2 - 24y - 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 25 \\ y = -1 \end{cases}:$$

Վերադառնալով նշանակմանը՝ կունենանք.

$$\begin{cases} 5^x = 25 \\ 5^x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow x = 2:$$

□ 15. Ցուցային անհավասարումներ

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: $a^{f(x)} > b$, $a^{f(x)} \geq b$, $a^{f(x)} < b$ կամ $a^{f(x)} \leq b$ տեսքի անհավասարումը, որտեղ $a > 0$, $a \neq 1$ կոչվում է **ցուցային անհավասարում**:

Սկզբում դիտարկենք $a^{f(x)} > b$, $a^{f(x)} \geq b$, $a^{f(x)} < b$, $a^{f(x)} \leq b$ տեսքի անհավասարումները, որտեղ $a > 0$, $a \neq 1$, իսկ b -ն տրված թիվ է:

Դիտարկենք երկու դեպք:

Դեպք 1. Եթե $b \leq 0$, ապա $a^{f(x)} > b$ և $a^{f(x)} \geq b$ անհավասարումների լուծումները համընկնում են $f(x)$ -ի ԹԱԲ-ի հետ, քանի որ դրական թվի ցանկացած աստիճան դրական թիվ է:

Նույն պատճառով $a^{f(x)} < b$ և $a^{f(x)} \leq b$ անհավասարումները լուծում չունեն՝ $x \in \emptyset$:

Օրինակ 1. $5^x > -6$:

Քանի որ անհավասարման աջ մասը բացասական է, ապա դրա լուծումը x -ի թույլատրելի արժեքներն են՝ $x \in (-\infty; +\infty)$:

Օրինակ 2. $2^{\frac{x-1}{x+2}} \geq -3$:

Քանի որ անհավասարման աջ մասը բացասական է, ապա դրա լուծումը $\frac{x-1}{x+2}$ -ի թույլատրելի արժեքներն են՝ $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$:

Օրինակ 3. $3^{x^2-5x-12} < -1$:

Այս անհավասարումը լուծում չունի՝ $x \in \emptyset$, քանի որ անհավասարման աջ մասը բացասական է:

Դեպք 2. Եթե $b > 0$, ապա կարևոր է դառնում հիմքի՝ a -ի ինչպիսին լինելը, քանի որ $y = a^x$ ֆունկցիան աճող է, երբ $a > 1$, և նվազող է, երբ $0 < a < 1$:

Եթե $a > 1$, **ապա.**

$$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow f(x) > \log_a b,$$

$$a^{f(x)} \geq b \Leftrightarrow f(x) \geq \log_a b,$$

$$a^{f(x)} < b \Leftrightarrow f(x) < \log_a b,$$

$$a^{f(x)} \leq b \Leftrightarrow f(x) \leq \log_a b:$$

Ուշադրություն դարձրեք, որ տրված անհավասարման նշանը համընկնում է դրան համարժեք անհավասարման նշանի հետ:

Եթե $0 < a < 1$, **ապա**.

$$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow f(x) < \log_a b,$$

$$a^{f(x)} \geq b \Leftrightarrow f(x) \leq \log_a b,$$

$$a^{f(x)} < b \Leftrightarrow f(x) > \log_a b,$$

$$a^{f(x)} \leq b \Leftrightarrow f(x) \geq \log_a b:$$

Ուշադրություն դարձրեք, որ տրված անհավասարման նշանը և դրան համարժեք անհավասարման նշանը հակառակն են:

Օրինակ 4. $3^x > 9$:

$$3^x > 9 \Leftrightarrow x > \log_3 9 \Leftrightarrow x > 2 \Leftrightarrow x \in (2; +\infty):$$

Օրինակ 5. $2^{2x+2} \leq 8$:

$$2^{2x+2} \leq 8 \Leftrightarrow 2x+2 \leq \log_2 8 \Leftrightarrow 2x+2 \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]:$$

Օրինակ 6. $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 3$:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 3 \Leftrightarrow x \leq \log_{\frac{1}{3}} 3 \Leftrightarrow x \leq -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1]:$$

Օրինակ 7. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+3} < 25$:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x+3} < 25 \Leftrightarrow x+3 > \log_{\frac{1}{5}} 25 \Leftrightarrow x+3 > -2 \Leftrightarrow x > -5 \Leftrightarrow x \in (-5; +\infty):$$

Այլ տեսքի ցուցային անհավասարումները այս կամ այն եղանակով բերվում են վերևում դիտարկված անհավասարումներին կամ դրանց համակարգերին կամ էլ դրանց համախմբերին:

Ներկայացնենք այդպիսի անհավասարումների լուծման մի քանի օրինակ:

Օրինակ 8. $7^{x+1} - 7^{x-1} > 336$:

Նախ տրված հավասարումը բերենք $a^x > b$ տեսքի, ապա լուծենք ստացված անհավասարումը.

$$7^{x+1} - 7^{x-1} > 336 \Leftrightarrow 7^{x-1}(49-1) > 336 \Leftrightarrow 7^{x-1} > \frac{336}{48} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7^{x-1} > 7 \Leftrightarrow x-1 > 1 \Leftrightarrow x > 2 \Leftrightarrow x \in (2; +\infty):$$

Օրինակ 9. $5^{x+1} - 4^{x-1} \leq 5^{x-1} + 23 \cdot 4^{x-1}$:

Նախ տրված հավասարումը բերենք $a^x < b$ տեսքի, ապա լուծենք ստացված անհավասարումը.

$$5^{x+1} - 4^{x-1} \leq 5^{x-1} + 23 \cdot 4^{x-1} \Leftrightarrow 5^{x+1} - 5^{x-1} \leq 4^{x-1} + 23 \cdot 4^{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^{x-1}(25-1) \leq 24 \cdot 4^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1]:$$

Օրինակ 10. $5^{2x+1} > 5^x + 4$:

Նախ ձևափոխենք տրված անհավասարումը.

$$5^{2x+1} > 5^x + 4 \Leftrightarrow 5 \cdot 5^{2x} - 5^x - 4 > 0:$$

Նշանակելով $5^x \equiv y$ ՝ կունենանք. $5y^2 - y - 4 > 0$: Համապատասխան հավասարման արմատներն են $y_1 = -\frac{4}{5}$ և $y_2 = 1$: Հետևաբար անհա-

վասարումը համարժեք է $\begin{cases} y < -\frac{4}{5} \\ y > 1 \end{cases}$ համախմբին:

Վերադառնալով նշանակմանը՝ կունենանք.

$$\begin{cases} 5^x < -\frac{4}{5} \\ 5^x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; +\infty):$$



Հարցեր և խնդիրներ

84. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $2^x = 4$,

ե) $6^x = 1$,

բ) $2^x = 32$,

զ) $3^x = 5$,

գ) $3^x = 27$,

է) $2^x = -2$,

դ) $5^x = 25$,

ը) $4^x = 7$:

85. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $3^{2x-1} = 81$,

ե) $3^{x^2-5x-4} = 9$,

բ) $2^{2x+2} = 16$,

զ) $9^{2x+4} = 27 \cdot 3^{2x+2}$,

գ) $3^{\frac{x}{2}} = 9$,

է) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-9}$,

դ) $4^{x+3} = 16$,

ը) $8^{6-x} = 4^{x-1}$:

86. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$,

ե) $2^{x-1} - 3^x = 3^{x-1} - 2^{x+2}$,

բ) $3^{2x-1} + 5 \cdot 3^{2x+1} = 138$,

զ) $5^{x+1} - 4^{x-1} = 5^{x-1} + 23 \cdot 4^{x-1}$,

գ) $4^{x-1} + 3 \cdot 4^{x+1} = 196$,

է) $6^{x+1} + 5^{x+2} = 6^{x+2} - 5^{x+1}$,

դ) $5^{1-x} + 3 \cdot 5^{2-x} = 80$,

ը) $8^{x+1} + 3^{x+2} = 8^{x+2} - 4 \cdot 3^{x+1}$:

87. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $3^{2x} - 30 \cdot 3^x + 81 = 0$,

դ) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$,

բ) $4^{2x} - 15 \cdot 4^x - 16 = 0$,

է) $7^{2x} - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$,

գ) $4^x + 2^{x+1} - 8 = 0$,

զ) $5^{2x} + 4 \cdot 5^x - 12 = 0$:

88. Բանկը ընդունում է երկարաժամկետ ավանդ, որի փաստացի եկամտաբերությունը՝ արտահայտված բարդ տոկոսով, ամեն տարվա համար 9% է: Քանի տարի հետո բանկում ներդրված գումարը կեռապատկվի:

89. Զրամբարում ջրիմուռների կոնցենտրացիան օրական աճում է 25%-ով, սկզբնական կոնցենտրացիան 500 ջրիմուռ/մլ է: Քանի օրում այդ կոնցենտրացիան կհասնի 1000000 ջրիմուռ/մլ-ի (մոտավոր «ծաղկման» շեմ):

90. Նորակառույց թաղամասի բնակչությունը ամեն տարի ավելանում է 8%-ով: Քանի տարի հետո բնակիչների թիվը կկրկնապատկվի:

91. Լուծե՛ք անհավասարումը.

ա) $2^x > 8$,

ե) $6^x > 1$,

բ) $2^x \leq 16$,

զ) $0,5^x < 0,25$,

գ) $3^x \geq 27$,

է) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \frac{1}{9}$,

դ) $5^x < 25$,

ը) $\left(\frac{1}{4}\right)^x < \frac{1}{8}$:

92. Լուծե՛ք անհավասարումը.

ա) $4^x < 5$,

ե) $6^{2x+1} \geq -7$,

բ) $2^x > -2$,

զ) $2^{2x+2} < 16$,

գ) $4^x < -3$,

է) $3^{2x+1} \geq 27$,

դ) $7^{x+3} < -4$,

ը) $9^{2x+4} \leq 27 \cdot 3^{2x+2}$:

93. Լուծե՛ք անհավասարումը.

ա) $3^{x^2-5x-4} < 9$,

ե) $4^{x-1} + 3 \cdot 4^{x+1} \geq 196$,

բ) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} \geq \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-9}$,

զ) $5^{1-x} + 3 \cdot 5^{2-x} < 80$,

գ) $8^{6-x} > 4^{x-1}$,

է) $2^{x-1} - 3^x > 3^{x-1} - 2^{x+2}$,

դ) $3^{2x-1} + 5 \cdot 3^{2x+1} < 138$,

ը) $6^{x+1} + 5^{x+2} \leq 6^{x+2} - 5^{x+1}$:

94. Լուծե՛ք անհավասարումը.

ա) $8^{x+1} + 3^{x+2} > 8^{x+2} - 4 \cdot 3^{x+1}$,

գ) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 < 0$,

բ) $4^{2x} - 15 \cdot 4^x - 16 \leq 0$,

դ) $5^{2x} - 4 \cdot 5^x + 3 \geq 0$:

§8. Լոգարիթմական հավասարումներ և անհավասարումներ

□ 16. Լոգարիթմական հավասարումներ

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: Լոգարիթմի նշանում փոփոխական պարունակող հավասարումը կոչվում է լոգարիթմական հավասարում:

Սկզբում դիտարկենք $\log_a f(x) = b$ **տեսքի հավասարումը, որտեղ** $a > 0, a \neq 1$, **իսկ** b -**ն տրված թիվ է:**

Եթե $f(x) > 0$ (հավասարման ԹԱԲ-ի պայմանը), ապա, b -ի արժեքից անկախ, լոգարիթմի սահմանումից հետևում է, որ այդ հավասարումը համարժեք է $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^b \end{cases}$ համակարգին: Բայց քանի որ դրական a թվի ցանկացած աստիճան դրական թիվ է, ապա համակարգի առաջին պայմանը դառնում է ավելորդ, այսինքն՝ $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$:

Օրինակ 1. $\log_3 x = 4$:

$$\log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 = 81:$$

Օրինակ 2. $\log_{\sqrt{2}} (2x - 2) = 4$:

$$\log_{\sqrt{2}} (2x - 2) = 4 \Leftrightarrow 2x - 2 = \sqrt{2}^4 \Leftrightarrow 2x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 3:$$

Հաջորդը դիտարկենք $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ **տեսքի հավասարումը, որտեղ** $a > 0, a \neq 1$:

Այդ հավասարման ԹԱԲ-ը որոշվում է $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ համակարգով: Քանի

որ լոգարիթմական ֆունկցիան յուրաքանչյուր արժեք ընդունում է միայն մեկ անգամ (հիշենք, որ լոգարիթմական ֆունկցիան մոնոտոն է), ապա

այդ հավասարումը համարժեք է $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ համակարգին:

Համակարգում առկա $f(x)=g(x)$ պայմանի դեպքում $f(x)>0$ և $g(x)>0$ անհավասարումները համարժեք են: Դա հաշվի առնելով՝ այդպիսի հավասարում լուծելիս կգրենք ԹԱԲ-ը որոշող պայմաններից միայն մեկը (բնականաբար ավելի պարզը):

Օրինակ 3. $\lg(4x-7)=\lg(x-1)$:

$$\lg(4x-7)=\lg(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ 4x-7=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 3x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 3x=6 \end{cases} \Leftrightarrow x=2:$$

Հաջորդը դիտարկենք $a^{\log_a f(x)}=g(x)$ **տեսքի հավասարումը, որ-**
տեղ $a>0, a\neq 1$:

Այդ հավասարման ԹԱԲ-ի պայմանն է՝ $f(x)>0$: Իսկ եթե $f(x)>0$, ապա, ըստ հիմնական լոգարիթմական նույնության. $a^{\log_a f(x)}=f(x)$: Հետևաբար այդ հավասարումը համարժեք է $\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)=g(x) \end{cases}$ համակարգին:

Համակարգում առկա $f(x)=g(x)$ պայմանի դեպքում այդ համակարգը համարժեք է $\begin{cases} g(x)>0 \\ f(x)=g(x) \end{cases}$ համակարգին: Ուրեմն, հարմարությունից ելնելով, տրված հավասարումը կարելի է փոխարինել $\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)=g(x) \end{cases}$ կամ $\begin{cases} g(x)>0 \\ f(x)=g(x) \end{cases}$ համակարգերից որևէ մեկով:

Օրինակ 4. $5^{\log_5(x^2-4x)}=3x+8$:

$$5^{\log_5(x^2-4x)}=3x+8 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+8>0 \\ x^2-4x=3x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x>-8 \\ x^2-7x-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-\frac{8}{3} \\ x=-1 \\ x=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=8 \end{cases}:$$

Լուծենք ևս մեկ հավասարում:

Օրինակ 5. $\log_3^2(x+2)-2\log_3(x+2)-3=0$:

Նշանակելով՝ $\log_3(x+2)\equiv y$, կունենանք $y^2-2y-3=0$: Այս հավասարման արմատներն են՝ $y_1=-1$, $y_2=3$: Հետևաբար հավասարումը

համարժեք է $\begin{cases} y = -1 \\ y = 3 \end{cases}$ համախմբին:

Վերադառնալով նշանակմանը՝ կունենանք.

$$\begin{cases} \log_3(x+2) = -1 \\ \log_3(x+2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 3^{-1} \\ x+2 = 3^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} - 2 \\ x = 27 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ x = 25 \end{cases}$$

□ 17. Լոգարիթմական անհավասարումներ

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: Լոգարիթմի նշանում փոփոխական պարունակող անհավասարումը կոչվում է լոգարիթմական անհավասարում:

Սկզբում դիտարկենք $\log_a f(x) > b$, $\log_a f(x) \geq b$, $\log_a f(x) < b$, $\log_a f(x) \leq b$ **տեսքի անհավասարումները, որտեղ** $a > 0$, $a \neq 1$, **իսկ** b -ն **տրված թիվ է:**

Այդ անհավասարումների ԹԱԲ-ի պայմանն է՝ $f(x) > 0$:

Բայց, ի տարբերություն լոգարիթմական հավասարումների, լոգարիթմական անհավասարումներ լուծելիս կարևոր է դառնում հիմքի՝ a -ի ինչպիսին լինելը, քանի որ $y = \log_a x$ ֆունկցիան աճող է, երբ $a > 1$, և նվազող է, երբ $0 < a < 1$:

Այդ պատճառով դրանք կդիտարկենք առանձին.

Դեպք 1. $a > 1$ ($y = \log_a x$ **ֆունկցիան աճող է**):

Այս դեպքում.

$$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) > a^b \end{cases},$$

$$\log_a f(x) \geq b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \geq a^b \end{cases},$$

$$\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < a^b \end{cases},$$

$$\log_a f(x) \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \leq a^b \end{cases}:$$

Քանի որ դրական a թվի ցանկացած աստիճան դրական թիվ է, ապա առաջին երկու համակարգերի առաջին պայմանը՝ $f(x) > 0$ պայմանը, ավելորդ է, այսինքն՝

$$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow f(x) > a^b,$$

$$\log_a f(x) \geq b \Leftrightarrow f(x) \geq a^b:$$

Իսկ վերջին երկու համակարգերում, կողմնակի արմատները բացառելու համար, $f(x) > 0$ պայմանը կմնա:

Օրինակ 1. $\log_4(2x+2) \geq 2$:

$$\log_4(2x+2) \geq 2 \Leftrightarrow 2x+2 \geq 4^2 \Leftrightarrow 2x \geq 16-2 \Leftrightarrow x \geq 7 \Leftrightarrow x \in [7; +\infty):$$

Օրինակ 2. $\log_7(2x-3) < 1$:

$$\log_7(2x-3) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 > 0 \\ 2x-3 < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 3 \\ 2x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1,5; 5):$$

Դեպք 2. $0 < a < 1$ ($y = \log_a x$ ֆունկցիան նվազող է):

Այս դեպքում.

$$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < a^b \end{cases},$$

$$\log_a f(x) \geq b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \leq a^b \end{cases},$$

$$\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) > a^b \end{cases},$$

$$\log_a f(x) \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \geq a^b \end{cases}:$$

Քանի որ դրական a թվի ցանկացած աստիճան դրական թիվ է, ապա վերջին երկու համակարգերի առաջին պայմանը՝ $f(x) > 0$ պայմանը, ավելորդ է, այսինքն՝

$$\log_a f(x) < b \Leftrightarrow f(x) > a^b,$$

$$\log_a f(x) \leq b \Leftrightarrow f(x) \geq a^b:$$

Իսկ առաջին երկու համակարգերում, կողմնակի արմատները բացառելու համար, $f(x) > 0$ պայմանը կմնա:

Օրինակ 3. $\log_{\frac{1}{4}}(2x-3) < 1$:

$$\log_{\frac{1}{4}}(2x-3) < 1 \Leftrightarrow 2x-3 > \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2x > \frac{1}{4} + 3 \Leftrightarrow x > \frac{13}{8} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{13}{8}; +\infty\right):$$

Օրինակ 4. $\log_{\frac{1}{3}}(3x-3) \geq -2$:

$$\log_{\frac{1}{3}}(3x-3) \geq -2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-3 > 0 \\ 3x-3 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 3 \\ 3x \leq 9+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 4]:$$

Հաջորդը դիտարկենք $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$, $\log_a f(x) < \log_a g(x)$, $\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$ տեսքի անհավասարումները, որտեղ $a > 0$, $a \neq 1$:

Նախ նկատենք, որ անհավասարումներից վերջին երկուսը, եթե կարդանք աջից դեպի ձախ, ապա դրանք նույն տեսքի են, ինչ առաջին երկուսը: Այդ պատճառով կդիտարկենք միայն առաջին երկուսը:

Այս անհավասարումների ԹԱԲ-ը որոշվում է $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ համակարգով:

Շարունակելու համար դիտարկենք երկու դեպք:

Դեպք 1. $a > 1$ ($y = \log_a x$ ֆունկցիան աճող է):

Այս դեպքում.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases},$$

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}:$$

Քանի որ $f(x) > g(x)$ (կամ $f(x) \geq g(x)$) և $g(x) > 0$ պայմաններից հետևում է, որ $f(x) > 0$, ապա

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases},$$

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}:$$

Օրինակ 5. $\log_9(2x+7) > \log_9(x-3)$:

$$\begin{aligned} \log_9(2x+7) > \log_9(x-3) &\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ 2x+7 > x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x > -10 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3; +\infty): \end{aligned}$$

Դեպք 2. $0 < a < 1$ ($y = \log_a x$ **ֆունկցիան նվազող է**):

Այս դեպքում՝

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases},$$

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}:$$

Քանի որ $f(x) < g(x)$ (կամ $f(x) \leq g(x)$) և $f(x) > 0$ պայմաններից հետևում է, որ $g(x) > 0$, ապա

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases},$$

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}:$$

Նկատենք, որ թե՛ $a > 1$, և թե՛ $0 < a < 1$ դեպքում ստացվեց, որ.

Օրինակ 6. $\log_{0,7}(4x+1) \geq \log_{0,7}(2x+9)$:

$$\log_{0,7}(4x+1) \geq \log_{0,7}(2x+9) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+1 > 0 \\ 4x+1 \leq 2x+9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x > -1 \\ 2x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -0,25 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-0,25; 4]:$$



Հարցեր և խնդիրներ

95. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $\log_2 x = 3$,

ե) $\log_{\frac{1}{3}}(2-2x) = -3$,

բ) $\log_5 x = -1$,

զ) $\log_{\frac{1}{2}}(5x - x^2) = -2$,

գ) $\log_7(3x+28) = 2$,

է) $\log_3(x^2 - 3x) = 1$,

դ) $\log_{\sqrt{2}}(x+1) = 4$,

ը) $\log_2(7x^2 + 8x + 2) = 0$:

96. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $\log_4(7x+3) = \log_4(5x+5)$,

ե) $4^{\log_4(4x-6)} = 2x+2$,

բ) $\log_7(6x-1) = \log_7(4x+9)$,

զ) $3^{\log_3(5-2x)} = 3x-5$,

գ) $\log_3(x-1) = \log_3 5 + \log_3 2$,

է) $8^{\log_8(x+3)} = 2x+1$,

դ) $\lg(x^2 + 2x - 7)^2 = 2 \lg(x-1)$,

ը) $10^{\lg(x+1)} = 2x^2 + 1$:

97. Լուծե՛ք հավասարումը.

ա) $\log_5^2 x - \log_5 x = 2$,

զ) $\lg^2 x - 2 \lg x + 1 = 0$,

բ) $\log_2^2 x - 5 \log_2 x + 6 = 0$,

է) $\log_3^2(1-x) + \log_3(1-x) = 2$:

98. Լուծե՛ք անհավասարումը.

ա) $\log_2 x > 3$,

ե) $\log_9(1+x) > 0,5$,

բ) $\log_3 x > 2$,

զ) $\log_4(2x+2) \geq 2$,

գ) $\log_5 x \geq 1$,

է) $\log_3(4x - 5) > 3$,

դ) $\log_7 x \geq 0,5$,

ը) $\log_2(6x + 4) \geq 4$:

99. Լուծե՛ք անհավասարումը.

ա) $\log_3 x < 2$,

ե) $\log_3(7x - 5) < 2$,

բ) $\log_5 x \leq 0$,

զ) $\log_6(5x - 4) \leq 1$,

գ) $\log_2 x < 3$,

է) $\log_2(7x + 1) < 3$,

դ) $\log_4 x \leq 3$,

ը) $\log_5(3x - 4) \leq 2$:

100. Լուծե՛ք անհավասարումը.

ա) $\log_{\frac{1}{2}} x < 2$,

ե) $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) > -1$,

բ) $\log_{\frac{1}{3}} x \leq 3$,

զ) $\log_{\frac{1}{4}}(7x - 3) \geq 1$,

գ) $\log_{\frac{1}{5}} x < -1$,

է) $\log_{\frac{1}{3}}(4x + 1) > 0$,

դ) $\log_{\frac{1}{4}} x \leq 0$,

ը) $\log_{\frac{1}{5}}(3x - 4) \geq -1$:

101. Լուծե՛ք անհավասարումը.

ա) $\log_2(6x + 3) \leq \log_2(2x + 2)$,

զ) $\log_{0,6}(1 - 3x) \leq \log_{0,6}(2x + 7)$,

բ) $\log_5(6 - 2x) > \log_5(x + 3)$,

դ) $\log_{0,2}(5x + 2) > \log_{0,2}(x + 1)$:

Նախագծային աշխատանք

ՎԱՐԿԱՅԻՆ ՀԱՇՎԻՉԻ ՍՏԵՂԾՈՒՄ՝ GEOGEBRA-Ի ՄԻՋՈՑՈՎ

Աշխատանքի իրականացումը ենթադրում է հետևյալ փուլերը.

- անուիտետային վճարի բանաձևի որոնում, դրանում մասնակցող մեծությունների հստակեցում և ըմբռնում,
- GeoGebra-ի գործիքների, մասնավորապես, «Գրություն» և «Մուտքագրման պատուհան» գործիքների ուսումնասիրում,
- վարկային հաշվիչի նախագծում, կառուցում և ստուգում,
- արդյունքների ներկայացում:

Կատարման ժամկետը՝ 2 շաբաթ:

Ուսումնասիրելով այս գլուխը՝

- Ծանոթացաք լոգարիթմ հասկացությանը և լոգարիթմի հատկությունների հետ: Ձեռք բերեցիք լոգարիթմական արտահայտություններ ձևափոխելու հմտություններ:
- Սովորեցիք ցուցային և լոգարիթմական ֆունկցիաների սահմանումները և այդ ֆունկցիաների հատկությունները:
- Ծանոթացաք ցուցային հավասարումներին և անհավասարումների տարբեր տեսակների հետ, սովորեցիք լուծել այդպիսի հավասարումներ և անհավասարումներ:
- Ծանոթացաք լոգարիթմական հավասարումների և անհավասարումների տարբեր տեսակների հետ, սովորեցիք լուծել այդպիսի հավասարումներ և անհավասարումներ:

$$y = 3^x$$



ՏՎՅԱԼՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ՄԻԱՅՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐԻԵՐ

Ուսումնասիրելով այս գլուխը՝

- Կվերհիշեք վիճակագրական տվյալների ներկայացման եղանակները, կիմանաք դրանց առավելությունների ու թերությունների մասին, կամրապնդեք վիճակագրական տվյալներից հետևություններ, մեկնաբանություններ անելու հմտությունները:
- Կվերհիշեք բազմությունների հետ կատարվող գործողությունները: Կծանոթանաք Վեննի (Էյլեր-Վեննի) դիագրամներին, կսովորեք դրանք կիրառել խնդիրներ լուծելիս:
- Կծանոթանաք միացությունների տեսությանը, կիմանաք տեղափոխությունների, կարգավորությունների, զուգորդությունների սահմանումները:
- Կսովորեք տեղափոխությունների, կարգավորությունների, զուգորդությունների քանակները հաշվելու բանաձևերը, դրանք կկիրառեք խնդիրներ լուծելիս:

§9. Տվյալների վերլուծություն և մեկնաբանում

□ 18. Տվյալների վերլուծություն և մեկնաբանում

Կյանքի ամենատարբեր երևույթներին վերաբերող տվյալների հավաքագրմամբ, մշակմամբ, վերլուծությամբ զբաղվող գիտությունը վիճակագրությունն է:

Ճիշտ ձևով հավաքված և մշակված վիճակագրական տվյալները հնարավորություն են տալիս օբյեկտիվ պատկերացում կազմելու տնտեսության, կրթության, բժշկության և մեր կյանքի շատ այլ ոլորտների մասին:

Քանի որ վիճակագրությունը սովորաբար գործ ունի մեծածավալ տվյալների հետ, կարևոր է դառնում այդ տվյալները հարմար եղանակով ներկայացնելը:

Ներկայացման ամենատարածված եղանակներն են աղյուսակները, գրաֆիկները, տարբեր դիագրամները (գծապատկերները): Եղանակի ընտրությունը կախված է տվյալների տեսակից, քանակից, ներկայացման նպատակից և այլ գործոններից:

Կարևոր է հասկանալ, որ տվյալների ներկայացման ճիշտ եղանակ ընտրելը կարող է հեշտացնել տեղեկատվության ընկալումն ու վերլուծությունը, մինչդեռ եղանակի անհաջող ընտրությունը կարող է հանգեցնել նույնիսկ սխալ մեկնաբանման կամ կարևոր մանրամասների կորստի:

Տվյալների ներկայացման տարբեր եղանակներն ունեն և՛ առավելություններ, և՛ թերություններ:

Աղյուսակները թույլ են տալիս ներկայացնել մեծ քանակությամբ տվյալներ, հեշտացնում են տեղեկատվության որոնումը և համեմատումը, հնարավորություն են տալիս տեսակավորելու և զտելու տվյալները: Աղյուսակներ ստեղծելը և թարմացնելը հեշտ է:

Միտումներ կամ օրինաչափություններ բացահայտելու համար աղյուսակները միշտ չէ, որ արդյունավետ են: Դրանք տեսողական առումով պակաս գրավիչ են, քան դիագրամները:

Տվյալների բաղադրիչների քանակների ակնառու համեմատումը հեշտացնելու համար օգտվում են **սյունակային դիագրամներից**: Դրանցում բաղադրիչները պատկերվում են առանձին սյունակներով, որոնց բարձրություններն ուղիղ համեմատական են համապատասխան բաղադրիչի քանակին: Սյունակները դասավորվում են մեկ շարքով:

Սյունակային դիագրամներն առավել պարզ և ակնառու են: Բայց մեծ թվով բաղադրիչներ ցուցադրելիս դրանք կարող են անարդյունավետ դառնալ, քանի որ դա կարող է հանգեցնել խառնաշփոթի և հասկանալու դժվարության:

Ամբողջի և դրա մասերի միջև եղած կապը ցույց տալու համար ամենահարմարը **շրջանաձև դիագրամներն** են: Այդպիսի դիագրամների առավելություններից են համամասնությունները և բաժինները ցույց տալու պարզությունը, տեղեկության ավելի սեղմ ներկայացումը, լայն լսարանի համար հեշտ ընկալվելը:

Դրանք հատկապես օգտակար են, երբ անհրաժեշտ է ընդգծել առանձին բաղադրիչների ներդրումը: Բայց, բաղադրիչների մեծ քանակի դեպքում, սրանք նույնպես դառնում են դժվար ընկալելի և ոչ արդյունավետ:

Տվյալները ներկայացնում են նաև **գրաֆիկորեն**: Ավելի հաճախ այդ եղանակից օգտվում են, երբ պետք է ներկայացնել որևէ մեծության փոփոխությունը ժամանակի ընթացքում, օրինակ՝ միջին ջերմաստիճանը կամ դոլարի փոխարժեքն ըստ ամսվա օրերի:

Ներկայացնենք մի քանի օրինակ:

Մեկ շաբաթում տղամարդկանց կոշիկի խանութի վաճառքի տվյալները, ըստ կոշիկների համարների, այսպիսին են՝

39, 40, 39, 41, 43, 42, 39, 41, 43, 41, 39, 43, 39, 42, 43, 42, 40, 39, 40, 43, 40, 43, 40, 42, 39, 40, 41, 40, 42, 42, 40, 42, 43, 40, 43, 40, 39, 40, 40, 39, 40, 41, 41, 39, 41, 40, 43, 43, 39, 41, 40, 41, 39, 41, 41, 41, 39, 41, 43, 41, 42, 41, 42, 41, 43, 41, 41, 43, 42, 41, 43, 41, 41, 41, 42, 42, 39, 42, 42, 42, 42, 39, 42, 42, 41, 41, 42, 42, 39, 42, 42, 40, 42, 42, 43, 40, 43, 40, 41, 43, 40, 43, 40, 41, 43:

Խմբավորելով այդ տվյալները՝ դրանք կարելի է ներկայացնել այլ տեսքով՝ 39 համար – 16 գույգ, 40 համար – 20 գույգ, 41 համար – 26 գույգ, 42 համար – 24 գույգ, 43 համար – 19 գույգ:

Այս դեպքում արդեն տվյալները ներկայացված են իրենց **հաճախություններով** (այն թիվը՝ քանի անգամ, որ այդ տվյալը կրկնվում է): Գումարելով հաճախությունների թվերը՝ իմանում ենք, որ վաճառվել է 105 գույգ կոշիկ:

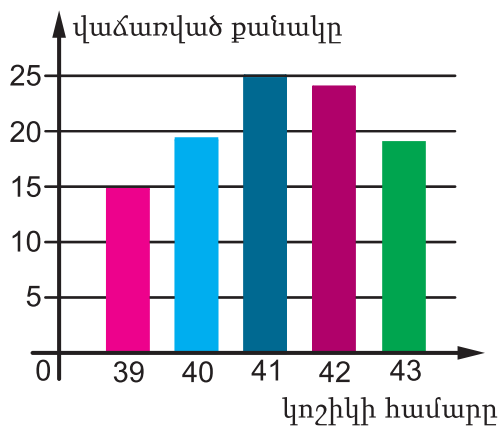
Կարևոր են նաև տվյալների **հարաբերական հաճախությունները**՝ արտահայտված տոկոսներով (օրինակ՝ 39 համարի հարաբերական հաճախությունը կլինի $\frac{16}{105} \cdot 100 \approx 15\%$, որը ցույց է տալիս, որ 39 համարի

կոշիկների վաճառքը ամբողջ վաճառքի մոտավորապես 15 տոկոսն է):

Ներկայացնենք տվյալները աղյուսակով.

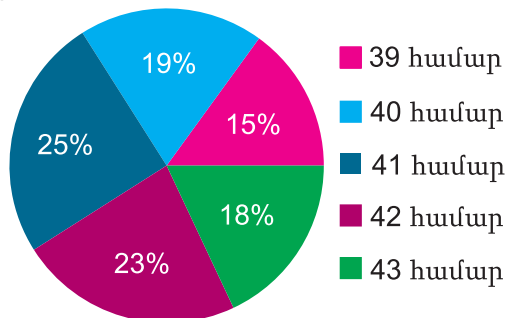
Կոշիկների համարներ	39	40	41	42	43
Վաճառքի հաճախություն	16	20	26	24	19
Հարաբերական հաճախություն (տոկոսներով)	≈ 15%	≈ 19%	≈ 25%	≈ 23%	≈ 18%

Նկար 15-ում նույն տվյալները ներկայացված են սյունակային դիագրամով: Հորիզոնական առանցքը կոշիկների համարների համար է, իսկ ուղղաձիգը՝ վաճառքի քանակի:



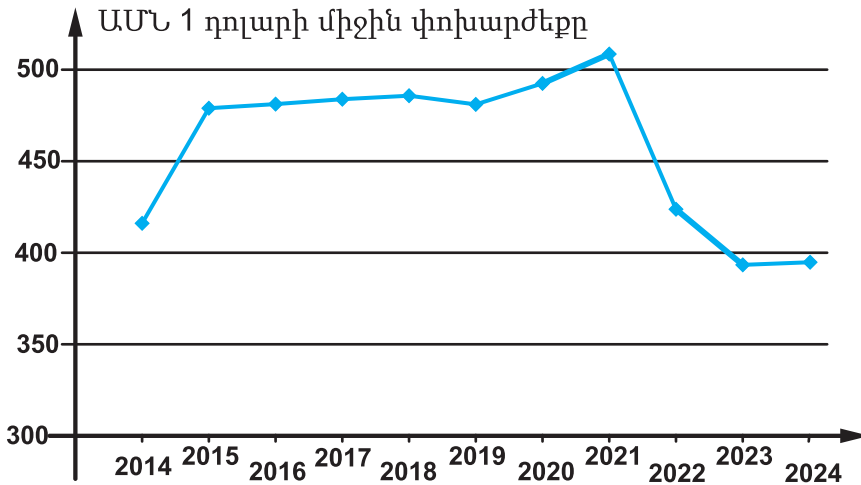
Նկար 15

Նկար 16-ում այդ տվյալները ներկայացված են շրջանաձև դիագրամով: Շրջանը բաժանված է 5 սեկտորի (5-ը տարբեր համարների թիվն է): Յուրաքանչյուր սեկտորում գրված է, թե տվյալ համարի վաճառքը ընդհանուր վաճառքի որ տոկոսն է (թվերը կլորացված են): Սեկտորների կենտրոնային անկյունները (ուրեմն նաև մակերեսները) ուղիղ համեմատական են դրանցում գրված տոկոսներին:



Նկար 16

Նկար 17-ում գրաֆիկորեն ներկայացված են 2014–2024 թվականների ԱՄՆ 1 դոլարի միջին փոխարժեքները Հայաստանում (ըստ վիճակագրական կոմիտեի տվյալների): Ուշադրություն դարձրեք, որ ուղղաձիգ առանցքը չի սկսվում զրոյից:



Նկ. 17

Նշենք, որ տվյալները դիագրամներով կամ գրաֆիկներով ներկայացնելիս սովորաբար ձգգրտության կորուստ է լինում:

❑ 19. Բազմություններ: Վեննի դիագրամներ

Բազմության և դրան առնչվող որոշ հասկացությունների Դուք ծանոթացել եք 7-րդ դասարանում:

Վերհիշենք բազմությունների միավորման, հատման սահմանումներ:

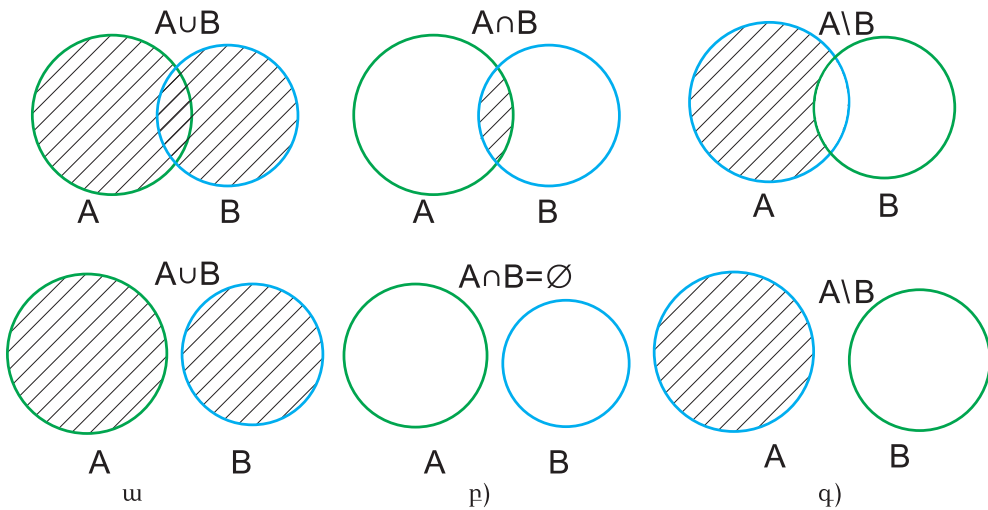
ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: A և B բազմությունների միավորումը՝ $A \cup B$ -ն, բոլոր այն տարրերի բազմությունն է, որոնք պատկանում են A և B բազմություններից գոնե մեկին:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: A և B բազմությունների հատումը՝ $A \cap B$ -ն, բոլոր այն տարրերի բազմությունն է, որոնք պատկանում են A , և B բազմությանը:

Սահմանենք նաև բազմությունների տարբերությունը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: A և B բազմությունների տարբերությունը՝ $A \setminus B$ -ն, բոլոր այն տարրերի բազմությունն է, որոնք պատկանում են A -ին, և չեն պատկանում B -ին:

Այս հասկացությունները կարելի է ներկայացնել գրաֆիկական եղանակով, ինչպես նկար 18-ում է:



Նկ. 18

Բազմությունների (խմբերի) միջև եղած հարաբերությունները ցուցադրող այդպիսի դիագրամները հայտնի են որպես **Վեննի (Էյլեր-Վեննի)** դիագրամներ:

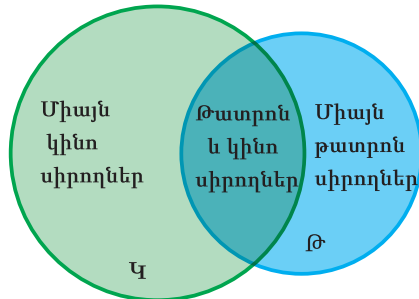
Այդ դիագրամներում տարբեր բազմություններ ներկայացվում են սովորաբար տարբեր շրջաններով:

Դիագրամի այս տեսակը ակնառու է դարձնում տարբեր բազմությունների (խմբերի, գաղափարների) ընդհանրություններն ու տարբերությունները: Դրանք հաճախ օգտագործվում են տվյալները համեմատելու, տարբեր հավաքածուների ընդհանուր գծերը բացահայտելու համար:

Ակնառու դարձնելով բազմությունների (խմբերի) միջև եղած կապերը՝ դրանք հնարավորություն են տալիս լուծելու տարատեսակ խնդիրներ:

Վեննի պարզ դիագրամը կազմված է երկու շրջանից, որոնցից ամեն մեկը ներկայացնում է որոշակի բազմություն (նկ. 19): Այդ շրջանների հատումը ցույց է տալիս այն տարրերը, որոնք պատկանում են երկու բազմություններին էլ: Իսկ յուրաքանչյուր շրջանի՝ հատումից դուրս գտնվող մասերը ցույց են տալիս միայն այդ բազմությանը պատկանող տարրերը:

($A \setminus B$ և $B \setminus A$ բազմությունների տարրերը):



Նկ. 19

Ներկայացնենք Վեննի դիագրամի օգնությամբ խնդիրներ լուծելու օրինակներ:

Օրինակ 1. Դասարանում կա 18 աշակերտ: Նրանցից 13-ը մասնակցելու են հայոց լեզվի քննությանը, 10-ը՝ անգլերենի քննությանը: 6 աշակերտ մասնակցելու են և՛ հայոց լեզվի, և՛ անգլերենի քննություններին: Քանի՞ աշակերտ չի մասնակցելու ո՛չ հայոց լեզվի, ո՛չ անգլերենի քննությանը:

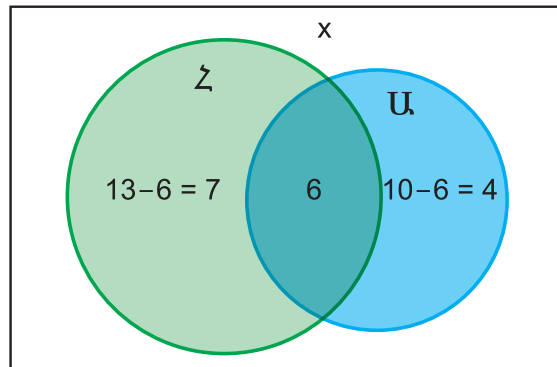
Խնդիրը լուծելու համար օգտվենք Վեննի դիագրամից:

Դրա համար նկարենք հատում ունեցող երկու շրջան՝ մեկը հայոց լեզվի (Հ), մյուսը անգլերենի (Ա) քննություն հանձնողների համար (նկ. 20):

Շրջանների հատման տիրույթում գրենք այն թիվը, որը ցույց է տալիս և՛ հայոց լեզվի, և՛ անգլերենի քննություն հանձնողների քանակը՝ 6-ը:

Քանի որ հայոց լեզվի քննություն հանձնողներից 6-ը քննություն են հանձնում նաև անգլերենից, ապա միայն հայոց լեզվի քննություն հանձնողները կլինեն՝ $13 - 6 = 7$:

7-ը գրենք հայոց լեզվի այն մասում, որը անգլերենի շրջանից դուրս է:



Նկ. 20

Քանի որ անգլերենի քննություն հանձնողներից 6-ը քննություն են հանձնում նաև հայոց լեզվից, ապա միայն անգլերենի քննություն հանձնողները կլինեն՝ $10 - 6 = 4$:

4-ը գրենք անգլերենի այն մասում, որը հայոց լեզվի շրջանից դուրս է:

Այդ երկու առարկաներից որևէ մեկից քննություն հանձնող աշակերտների թիվը հավասար է շրջանների տարբեր մասերում գրված թվերի գումարին՝ $7 + 6 + 4 = 17$:

Բոլոր աշակերտների թիվը՝ 18-ը հավասար է նախորդ քայլին ստացված 17-ի և այն աշակերտների քանակի գումարին, որոնք չեն հանձնելու ո՛չ հայոց լեզվի, ո՛չ անգլերենի քննություն. $x + 17 = 18$: Ուրեմն $x = 1$:

Օրինակ 2. Դասարանում կա 20 աշակերտ: Հայոց լեզվի խմբակ հաճախում է 12 աշակերտ, պատմության խմբակ՝ 10, ևս 6 աշակերտ ոչ մի խմբակ չի հաճախում: Քանի՞ աշակերտ է հաճախում երկու խմբակ:

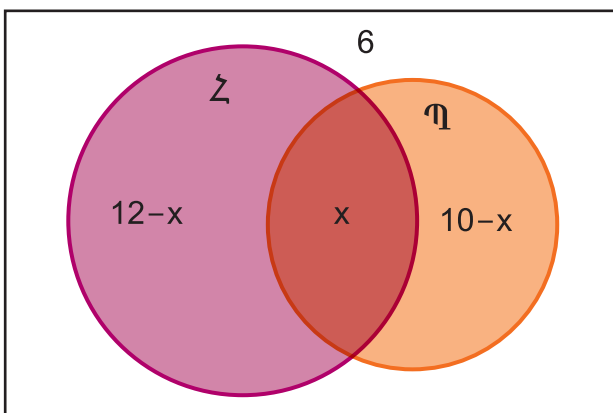
Խնդիրը լուծելու համար օգտվենք Վեննի դիագրամից:

Նկարենք հատում ունեցող երկու շրջան՝ մեկը հայոց լեզվի (Հ), մյուսը պատմության (Պ) խմբակ հաճախողների համար (նկ. 21):

Քանի որ այս դեպքում մեզ հայտնի չէ, թե երկու խմբակ քանի հոգի է հաճախում, շրջանների հատման տիրույթում գրենք x :

Քանի որ հայոց լեզվի խմբակ հաճախողներից x -ը հաճախում է նաև պատմության խմբակ, ապա միայն հայոց լեզվի խմբակ հաճախողները կլինեն՝ $12 - x$:

$12 - x$ -ը գրենք հայոց լեզվի այն մասում, որը պատմության շրջանից դուրս է:



Նկ. 21

Քանի որ պատմության խմբակ հաճախողներից x -ը հաճախում է նաև հայոց լեզվի խմբակ, ապա միայն պատմության խմբակի հաճախողները

կլինեն՝ $10 - x$:

$10 - x$ -ը գրենք պատմության այն մասում, որը հայոց լեզվի շրջանից դուրս է:

Այդ երկու խմբակներից որևէ մեկին հաճախող աշակերտների քանակը հավասար է շրջանների տարբեր մասերում գրված արտահայտությունների գումարին.

$$12 - x + x + 10 - x = 22 - x :$$

Մյուս կողմից այդ քանակը հավասար է բոլոր աշակերտների քանակի և որևէ խմբակի չմասնակցող աշակերտների քանակի տարբերությանը՝ $22 - x = 20 - 6$: Լուծելով այդ հավասարումը՝ կունենանք, որ $x = 8$:

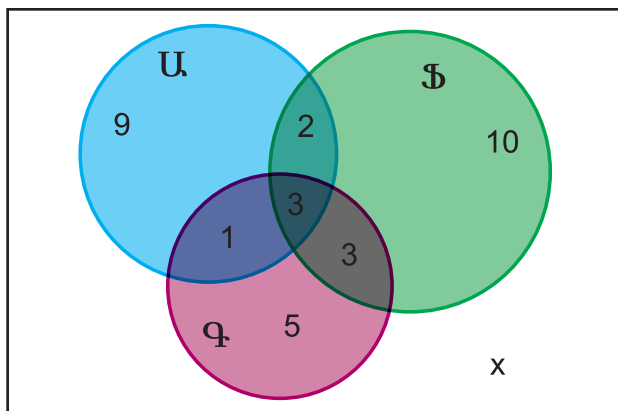
Օրինակ 3. 40 ուսանողից 15-ը սովորում են անգլերեն, 18-ը՝ ֆրանսերեն, 12-ը՝ գերմաներեն: 5-ը սովորում են անգլերեն և ֆրանսերեն, 4-ը՝ անգլերեն և գերմաներեն, 6-ը՝ ֆրանսերեն և գերմաներեն: 3-ը սովորում են բոլոր երեք լեզուները: Քանի ուսանող է սովորում միայն մեկ լեզու: Քանի ուսանող չի սովորում այդ լեզուներից ոչ մեկը:

Խնդիրը լուծելու համար օգտվենք Վեննի դիագրամից:

Դրա համար նկարենք հատում ունեցող երեք շրջան՝ մեկը անգլերեն (Ա), մյուսը՝ ֆրանսերեն (Ֆ), երրորդը՝ գերմաներեն (Գ) սովորողների համար (նկ. 22):

Երեք շրջանների հատման տիրույթում գրենք այն թիվը, որը ցույց է տալիս ն' անգլերեն, ն' ֆրանսերեն, ն' գերմաներեն սովորողների քանակը՝ 3-ը:

Քանի որ անգլերեն և ֆրանսերեն սովորում է 5 հոգի, որից 3-ն արդեն գրված է, ապա անգլերենի ու ֆրանսերենի հատման չլրացված մասում գրենք 2 ($5 - 3 = 2$):



Նկ. 22

Քանի որ անգլերեն և գերմաներեն սովորում է 4 հոգի, որից 3-ն արդեն գրված է, ապա անգլերենի ու գերմաներենի հատման չլրացված մասում գրենք 1 ($4-3=1$):

Քանի որ ֆրանսերեն և գերմաներեն սովորում է 6 հոգի, որից 3-ն արդեն գրված է, ապա ֆրանսերենի ու գերմաներենի հատման չլրացված մասում գրենք 3 ($6-3=3$):

Գտնենք միայն մեկ լեզու սովորողներին.

Միայն անգլերեն՝ $15-(2+1+3)=9$:

Միայն ֆրանսերեն՝ $18-(2+3+3)=10$:

Միայն գերմաներեն՝ $12-(1+3+3)=5$:

Գումարելով ստացված թվերը՝ կգտնենք միայն մեկ լեզու սովորող բոլոր ուսանողների թիվը. $9+10+5=24$:

Շրջանների վրա նշված բոլոր թվերի գումարը ցույց է տալիս այն ուսանողների քանակը, որոնք սովորում են այդ լեզուներից գոնե մեկը: Այդ թիվը հավասար է 33-ի: Ուրեմն այդ լեզուներից ոչ մեկը չի սովորում $40-33=7$ ուսանող:



Հարցեր և խնդիրներ

102. Բերեք առօրյա կյանքում Ձեզ հանդիպած աղյուսակների օրինակներ:
103. Բերեք մաթեմատիկայի, ֆիզիկայի, քիմիայի և աշխարհագրության դասերին Ձեզ հանդիպած աղյուսակների օրինակներ:
104. Ո՞ր դեպքում է ավելի հարմար տվյալները ներկայացնել պյունակային դիագրամով:
105. Ինչպե՞ս են կառուցում շրջանաձև դիագրամ: Ո՞ր դեպքում է ավելի հարմար տվյալները ներկայացնել շրջանաձև դիագրամով:
106. Տվյալների ներկայացման ո՞ր եղանակից են օգտվում, երբ պետք է ներկայացնել որևէ մեծության փոփոխությունը ժամանակի ընթացքում:
107. Աղյուսակում ներկայացված են նորածիններին ավելի հաճախ տրվող անունները՝ ըստ սեռի, 2024 թվականի հունվարից հունիս ամիսների համար (առաջին 7 տեղերը):

Աղջիկների անուններ			Տղաների անուններ		
1.	Նարե	292	1.	Դավիթ	545
2.	Լուսե	249	2.	Նարեկ	420
3.	Արփի	246	3.	Հայկ	285
4.	Մարիա	229	4.	Միքայել	261
5.	Մարի	159	5.	Մարկ	259
6.	Եվա	152	6.	Լեո	243
7.	Անահիտ	150	7.	Արեգ	239

ա) Տղաների և աղջիկների տվյալները առանձին-առանձին ներկայացրեք շրջանաձև դիագրամներով:

բ) Տղաների և աղջիկների տվյալները ներկայացրեք մեկ սյունակային դիագրամով:

108. Դպրոցի 11-րդ դասարանի 75 աշակերտ գրել է հայոց լեզվի 20 հարց պարունակող թեստ:

Ըստ յուրաքանչյուր աշակերտի ձիշտ պատասխանած հարցերի քանակի՝ տվյալներն այսպիսին են եղել՝

1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 19, 19, 20:

ա) Շրջանաձև, թե՛ սյունակային դիագրամով է ավելի հարմար ներկայացնել այս տվյալները:

բ) Տվյալները ներկայացրեք հարմար դիագրամով:

գ) Քանի՞ հարցի ձիշտ պատասխանող աշակերտներն են ամենաշատը:

դ) Քանի՞ աշակերտ է 6-ից քիչ հարցերի ձիշտ պատասխանել:

ե) Քանի՞ աշակերտ է 16-ից շատ հարցերի ձիշտ պատասխանել:

զ) Տվյալները ներկայացրեք շրջանաձև դիագրամով՝ ըստ հետևյալ բաժինների՝ 1-5 հարցի են ձիշտ պատասխանել, 6-10 հարցի

են ձիշտ պատասխանել, 11–15 հարցի են ձիշտ պատասխանել, 16–20 հարցի են ձիշտ պատասխանել:

109. Աղյուսակում ներկայացված է 2024 թվականին Հայաստանում գրանցված ծնունդների քանակը՝ ըստ ամիսների:

Ամիս	Ծնունդներ
Հունվար	2780
Փետրվար	2642
Մարտ	2931
Ապրիլ	2985
Մայիս	3160
Հունիս	3091
Հուլիս	3189
Օգոստոս	3304
Սեպտեմբեր	3127
Հոկտեմբեր	3069
Նոյեմբեր	3040
Դեկտեմբեր	3150

Այդ տվյալները ներկայացրեք սյունակային դիագրամով և պատասխանեք հետևյալ հարցերին.

- ա) Ո՞ր ամսին են գրանցվել ամենաշատ ծնունդներ:
- բ) Ո՞ր ամսին են գրանցվել ամենաքիչ ծնունդներ:
- գ) Ո՞ր ամիսներին են գրանցվել 3000-ից ավելի ծնունդներ:
- դ) Ո՞ր ամիսներին են նախորդ ամիսներից ավելի քիչ ծնունդներ գրանցվել:

110. Աղյուսակում ներկայացված են Հայաստանի Պրեմիեր լիգայի 2023–2024 թվականի տվյալները.

Թիմ	Խփած գոլեր	Բաց թողած գոլեր
Արարատ Արմենիա	73	34
Արարատ Երևան	39	50
Շիրակ	28	46
Փյունիկ	84	28
Վան	32	67
Ուրարտու	49	49
Վեստ Արմենիա	43	73
ԲԿՄԱ	32	67
Նոա	69	36
Ալաշկերտ	54	56

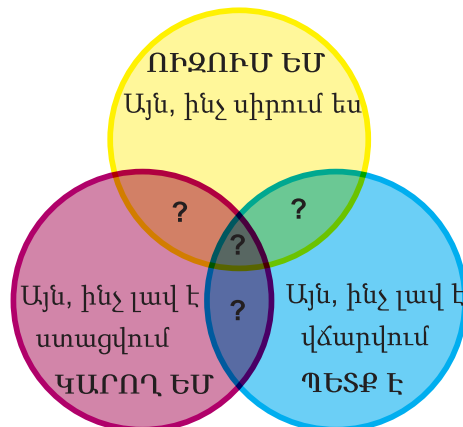
- ա) Թիմերի խփած և բաց թողած գույների քանակները ներկայացրեք մեկ սյունակային դիագրամով:
- բ) Ո՞ր թիմերն են ավելի շատ գույն խփել, քան բաց թողել:
- գ) Ո՞ր թիմերն են ավելի քիչ գույն խփել, քան բաց թողել:



Խմբային աշխատանք

Դասարանի աշակերտներին բաժանեք երկու խմբի: Խմբերը, նկար 23-ում ներկայացված դիագրամից ելնելով, թող քննարկեն և որոշեն, թե ինչ անուններ կտան դիագրամի հարցականով նշված մասերին:

Թող պատասխանեն նաև հետևյալ հարցին. «Կարո՞ղ է նման դիագրամն օգնել նրանց ապագա մասնագիտություն ընտրելիս»:



Նկ. 23

111. 40 աշակերտից 25-ը սպորտ են սիրում, 20-ը՝ երաժշտություն: 10-ը սիրում են և՛ սպորտ, և՛ երաժշտություն: Քանի՞ աշակերտ չի սիրում ո՛չ սպորտ, ո՛չ երաժշտություն:
112. 30 ուսանողից 10-ը անգլերեն են սովորում, 15-ը՝ ֆրանսերեն: 3-ը սովորում են երկու լեզուն էլ: Քանի՞ ուսանող է սովորում միայն մեկ լեզու: Քանի՞ ուսանող այդ լեզուներից ոչ մեկը չի սովորում:
113. 70 մարդուց 40-ը սուրճ են խմում, 35-ը՝ թեյ: 15-ը խմում են և՛ սուրճ, և՛ թեյ: Քանի՞ մարդ չի խմում ո՛չ սուրճ, ո՛չ թեյ:
114. 100 զբոսաշրջիկից 70-ը այցելել են Հայաստան, 55-ը՝ Վրաստան: 40-ը եղել են երկու երկրներում էլ: Քանի՞ զբոսաշրջիկ է եղել

այդ երկրներից միայն մեկում: Քանի՞ զբոսաշրջիկ չի այցելել այդ երկրներից ոչ մեկը:

115. 30 աշակերտներից 9-ը կիթառ են նվագում, 8-ը՝ դաշնամուր: 16-ը ոչինչ չեն նվագում: Քանի՞ աշակերտ է երկու գործիքն էլ նվագում:
116. Խմբակում կա 25 աշակերտ: 13-ը սիրում են պիցցա, 17-ը՝ բուրգեր: Քանի՞ աշակերտ է սիրում երկուսն էլ, եթե հայտնի է, որ յուրաքանչյուր աշակերտ սիրում է այդ ուտեստներից գոնե մեկը:
117. 25 հոգուց 12-ը սիրում են ֆանտա, 10-ը՝ կոլա: 5-ը սիրում են և՛ ֆանտա, և՛ կոլա: Քանի՞ հոգի չի սիրում այդ երկու ըմպելիքները:
118. 45 ուսանողից 25-ը մասնակցել են ֆուտբոլային մրցույթի, 22-ը՝ բասկետբոլի: 5-ը չեն մասնակցել ոչ մի մրցույթի: Քանի՞ ուսանող է մասնակցել երկու մրցույթներին էլ:
119. Դպրոցի աշակերտներից 120-ը սովորում են ռուսերեն, 100-ը՝ անգլերեն: 80-ը սովորում են երկու լեզուներն էլ, 60-ը այդ լեզուներից ոչ մեկը չի սովորում: Քանի՞ աշակերտ է սովորում այդ դպրոցում:
120. 25 մարդուց 18-ը շուն են պահում, 12-ը՝ կատու: 5-ը չեն պահում ո՛չ շուն, ո՛չ կատու: Քանի՞ մարդ է պահում և՛ շուն, և՛ կատու:
121. Հետազոտության արդյունքում պարզվել է, որ 100 մարդուց 70-ը ունեն մեքենա, 45-ը՝ ավտոտնակ: 45-ը ունեն և՛ մեքենա, և՛ ավտոտնակ: Քանի՞ մարդ ունի միայն մեքենա: Քանի՞ մարդ չունի ո՛չ մեքենա, ո՛չ ավտոտնակ:
122. 50 ընթերցողից 35-ը կարդում են արկածային գրքեր, 25-ը՝ դետեկտիվ: 5-ը չեն կարդում ո՛չ արկածային, ո՛չ դետեկտիվ գրքեր: Քանի՞սն են կարդում և՛ արկածային, և՛ դետեկտիվ գրքեր:
123. 100 հեռուստադիտողից 50-ը դիտում են նորություններ, 40-ը՝ մարզական հաղորդումներ: 15-ը դիտում են երկուսն էլ: Քանի՞ հեռուստադիտող չի դիտում այդ հաղորդումներից ոչ մեկը:
124. Դասարանի 30 աշակերտներից 18-ը հաճախում են պարի դասերի, 12-ը՝ դիզայնի դասերի: 5 աշակերտ հաճախում է և՛ պարի, և՛ դիզայնի դասերի: Քանի՞ աշակերտ է հաճախում միայն պարի դասերի: Քանի՞սը չի հաճախում ո՛չ պարի, ո՛չ դիզայնի դասերի:
125. Սուպերմարկետ այցելած 50 հաճախորդից 35-ը գնել են կաթ, 28-ը՝ հաց: Քանի՞ հաճախորդ է գնել և՛ կաթ, և՛ հաց, եթե հայտնի է, որ 10 հաճախորդ ո՛չ կաթ է գնել, ո՛չ հաց:
126. Դասարանի 40 աշակերտներից 22-ը օգտագործում են «Instagram»,

- 15-ը՝ «TikTok»: Երկու հավելվածն էլ օգտագործում է 4 աշակերտ: Քանի՞ աշակերտ չի օգտագործում այդ հավելվածներից ոչ մեկը:
- 127.** 100 բնակիչներից 60-ը խոսում են ռուսերեն, 40-ը՝ անգլերեն: 10-ը խոսում են և՛ ռուսերեն, և՛ անգլերեն: Քանի՞ բնակիչ չի խոսում ո՛չ ռուսերեն, ո՛չ անգլերեն:
- 128.** Քաղաքում անցկացված հետազոտության ժամանակ պարզվել է, որ 1000 մարդուց 200-ը տառապում են «A» հիվանդությամբ, 150-ը՝ «B» հիվանդությամբ, իսկ 50-ը՝ և՛ «A», և՛ «B» հիվանդություններով: Քանի՞ մարդ չի տառապում ոչ մի հիվանդությամբ:
- 129.** Հարցված 120 մարդուց 60-ը դիտում են «Հ1», 50-ը՝ «Արմենիա», 40-ը՝ «Շանթ» հեռուստաալիքները: 25-ը դիտում են «Հ1» և «Արմենիա» ալիքները, 20-ը՝ «Հ1» և «Շանթ», 15-ը՝ «Արմենիա» և «Շանթ», 10-ը դիտում են բոլոր երեքը: Քանի՞ մարդ չի դիտում այդ երեք ալիքներից և ոչ մեկը:
- 130.** Դպրոցի 100 աշակերտից 75-ը զբաղվում են սպորտով, 60-ը՝ երաժշտությամբ, 50-ը՝ նկարչությամբ: 40-ը զբաղվում են սպորտով և երաժշտությամբ, 30-ը՝ սպորտով և նկարչությամբ, 25-ը՝ երաժշտությամբ և նկարչությամբ: Քանի՞ աշակերտ է զբաղվում և՛ սպորտով, և՛ երաժշտությամբ, և՛ նկարչությամբ, եթե հայտնի է, որ յուրաքանչյուր աշակերտ զբաղվում է դրանցից գոնե մեկով:
- 131.** Հայաստան այցելած 85 զբոսաշրջիկներից 40 եղել են Գառնիում, 35-ը՝ Տաթևում, 48-ը Էջմիածնում: 18-ն այցելել են և՛ Տաթև, և՛ Էջմիածին, 16-ն այցելել են և՛ Տաթև, և՛ Գառնի, 19-ն այցելել են և՛ Գառնի, և՛ Էջմիածին: 11-ն այցելել են և՛ Գառնի, և՛ Տաթև, և՛ Էջմիածին: Քանի՞ զբոսաշրջիկ են այցելել այդ վայրերից միայն մեկը: Քանի՞ զբոսաշրջիկ չի այցելել այդ վայրերից և ոչ մեկը:

§10. Միացությունների տեսության տարրեր

□ 20. Կարգավորություններ

Նախ ներկայացնենք բնական թվի ֆակտորիալի հասկացությունը, որն անհրաժեշտ է այս և հաջորդ կետերի շարադրանքի համար:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: n բնական թվի ֆակտորիալ է կոչվում 1 -ից n թվերի արտադրյալը: Ընդունված է նաև, որ զրոյի ֆակտորիալը 1 է:

n բնական թվի ֆակտորիալը նշանակում են $n!$ -ով:

Այսպիսով. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$, $0! = 1$:

Օրինակ՝ $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$:

Ներկայացնենք որոշակի պայմաններում հնարավոր ընտրությունների քանակը հաշվելու երկու կանոն:

Գումարի կանոն: Եթե A և B անկախ օբյեկտներից A -ն հնարավոր է ընտրել n եղանակով, իսկ B օբյեկտը՝ m եղանակով, ապա «կամ A , կամ B օբյեկտների» ընտրությունը հնարավոր է $n + m$ եղանակով:

Օրինակ 1. Գրադարակի վրա դրված են Թումանյանի 6 և Իսահակյանի 5 հատորները: Քանի՞ եղանակով կարելի է ընտրել մեկ գիրք:

Թումանյանի հատորներից մեկ գիրք կարելի է ընտրել 6 եղանակով, Իսահակյանի հատորներից մեկ գիրք կարելի է ընտրել 5 եղանակով: Հետևաբար մեկ գիրք կամ Թումանյանի, կամ Իսահակյանի հատորներից կարելի է ընտրել $6 + 5 = 11$ եղանակով:

Գումարի կանոնը բազմությունների տերմիններով կձևակերպվի այսպես. n տարր ունեցող A բազմության և m տարր ունեցող B բազմության միավորումը՝ $A \cup B$ բազմությունն ունի $n + m$ տարր, եթե այդ բազմությունները չեն հատվում:

Արտադրյալի կանոն: Եթե A օբյեկտը կարող է ընտրվել n եղանակով, և A -ի ցանկացած ընտրության դեպքում B օբյեկտը կարող է ընտրվել m եղանակով, ապա (A, B) զույգը կարող է ընտրվել nm եղանակով:

Օրինակ 2. Գրադարակի վրա դրված են Թումանյանի 6 և Իսահակյանի 5 հատորները: Քանի՞ եղանակով կարելի է ընտրել մեկ գիրք Թումանյանի և մեկ գիրք Իսահակյանի հատորներից:

Թումանյանի հատորներից մեկ գիրք կարելի է ընտրել 6 եղանակով,

Իսահակյանի հատորներից մեկ գիրք կարելի է ընտրել 5 եղանակով: Հետևաբար մեկ գիրք Թումանյանի և մեկ գիրք Իսահակյանի հատորներից կարելի է ընտրել $6 \cdot 5 = 30$ եղանակով:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: n տարր ունեցող բազմության k տարրեր տարրերից կազմված կարգավորված հավաքածուները կոչվում են կարգավորություններ n -ից k -ական:

n -ից k -ական կարգավորությունների քանակը նշանակվում է A_n^k -ով (կարդացվում է՝ A n -ից k -ական, $0 \leq k \leq n$):

Նշենք, որ այդ հավաքածուները իրարից տարբերվում են գոնե մեկ տարրով կամ տարրերի կարգով:

Օրինակ 3. Քանի՞ երկնիշ թիվ կարելի է գրել 1, 2, 3, 4, 5 թվանշաններով՝ առանց կրկնելու թվանշանները:

Քանի որ տարրեր թվանշաններով գրված թվերը տարբեր են, տարբեր են նաև նույն թվանշաններով, բայց այլ հերթականությամբ գրված թվերը (օրինակ՝ 1 և 2 թվանշաններով կարելի է գրել և՛ 12, և՛ 21), ապա գործ ունենք կարգավորությունների հետ: Ուրեմն պետք է գտնել A_5^2 -ը:

Այդ կարգավորված զույգերի առաջին թվանշանը ընտրելու 5 հնարավորություն կա: Առաջին թվանշանն ընտրելուց հետո, քանի որ թվանշանները չպիտի կրկնվեն, երկրորդ թվանշանն ընտրելու 4 հնարավորություն կլինի:

Ըստ բազմապատկման կանոնի՝ նշված պայմաններում կարելի է գրել $5 \cdot 4 = 20$ երկնիշ թիվ՝ $A_5^2 = 20$:

Օրինակ 4. Քանի՞ եղանակով կարելի է 9 թեկնածուից ընտրել 2 մարդու հանձնաժողովի նախագահ և նախագահի տեղակալ նշանակելու համար:

Պատկերացնենք, որ այդ 9 անձը համարակալված են: Պարզ է, որ (1,2) և (5,9) զույգերը տարբեր են: Տարբեր են նաև (4,3) և (3,4) զույգերը, քանի որ մի դեպքում նախագահը 4-րդն է, տեղակալը՝ 3-րդը, իսկ մյուս դեպքում նախագահը 3-րդն է, տեղակալը՝ 4-րդը:

Ուրեմն գործ ունենք կարգավորությունների հետ և պետք է գտնենք A_9^2 -ը:

Առաջին մարդուն ընտրելու 9 հնարավորություն կա: Նրան ընտրելուց հետո երկրորդին ընտրելու 8 հնարավորություն կա: Հետևաբար $A_9^2 = 9 \cdot 8 = 72$:

Այս օրինակները ցույց են տալիս, որ օրինակ՝ $A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$: Իրոք,

այս դեպքում առաջին ընտրության համար կա 10 հնարավորություն, երկրորդի համար՝ 9 հնարավորություն, երրորդի համար՝ 8 հնարավորություն, չորրորդի համար՝ 7 հնարավորություն:

$$\text{Նկատենք նաև, որ } A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 1} = \frac{10!}{(10-4)!}:$$

Ուրեմն ընդհանուր դեպքում կունենանք.

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}:$$

□ 21. Տեղափոխություններ

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: n տարր ունեցող բազմության բոլոր տարրերից կազմված կարգավորված հավաքածուները կոչվում են տեղափոխություններ:

n տարր ունեցող բազմության տեղափոխությունների քանակը նշանակվում է P_n -ով:

Փաստորեն, տեղափոխությունները կարգավորությունների մասնավոր դեպքն են, երբ $k = n$:

$$\text{Հետևաբար } P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!:$$

Օրինակ 1. Քանի՞ եղանակով կարող են շաք լանգսել 8 զինվոր:

Փաստորեն պետք է գտնել 8 տարր ունեցող բազմության տեղափոխությունների քանակը: Այն հավասար է $P_8 = 8! = 40320$:

Օրինակ 2. Չկրկնվող թվանշաններով քանի՞ հնգանիշ թիվ կարելի է կազմել 2, 3, 4, 6, 8 թվանշաններով:

Այս օրինակում 5 թվանշաններից ամեն մեկը կարող է լինել հնարավոր 5 դիրքերից ցանկացածում: Հետևաբար պետք է գտնել 5 տարր ունեցող բազմության տեղափոխությունների քանակը: Իսկ դա հավասար է՝ $P_5 = 5! = 120$:

Օրինակ 3. Չկրկնվող թվանշաններով քանի՞ հնգանիշ թիվ կարելի է կազմել 0, 2, 3, 4, 5 թվանշաններով:

Ուշադրություն դարձրեք, որ չնայած թվանշանների քանակն այս և նախորդ օրինակում նույնն են, բայց 0-ի առկայությունը փոխել է վիճակը: Այս դեպքում կա առաջին թվանշանն ընտրելու 4 և ոչ թե 5 հնարավորություն (0-ն չի կարող լինել առաջին տեղում): Երկրորդ, երրորդ,

չորրորդ, հինգերորդ թվանշանների մասով այս և նախորդ խնդիրները չեն տարբերվում:

Նախորդ դեպքում որոնելի քանակը հավասար էր $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ($5! = P_5$), այս դեպքում կլինի $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$, որը կարելի է ներկայացնել նաև $4 \cdot 4! = 4 \cdot P_4$ տեսքով:

□ 22. Գուգորդություններ

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: n տարր ունեցող բազմության k տարրեր տարրերից կազմված ենթաբազմությունները կոչվում են գուգորդություններ n -ից k -ական:

n -ից k -ական գուգորդությունների քանակը նշանակվում է C_n^k -ով (կարդացվում է՝ C n -ից k -ական, $0 \leq k \leq n$):

Ուշադրություն դարձրեք այն հանգամանքին, որ բազմությունում (կամ ենթաբազմությունում) կարգ չկա: Օրինակ՝ $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$, $\{3, 1, 2\}$, $\{3, 2, 1\}$ բազմությունները նույնն են, բայց որպես կարգավորված հավաքածուներ դրանք տարբեր են:

Ուրեմն 1, 2, 3 տարրերից առաջանում է 6 կարգավորություն, բայց 1, 2, 3 տարրերից առաջանում է 1 գուգորդություն: Նկատեք նաև, որ $6 = P_3$:

Համանման դատողություններով կարելի է համոզվել, որ A_n^k -ն P_k

անգամ մեծ է C_n^k -ից (հիշեք, որ $P_k = k!$): Ուրեմն $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$:

Այսպիսով՝ $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$:

Օրինակ 1. Քանի՞ եղանակով կարելի է 10-հոգանոց խմբից ընտրել 3 հոգու՝ որևէ հանձնաժողով ստեղծելու համար:

Քանի որ ընտրված 3 հոգին ունեն նույն կարգավիճակը, ապա պետք է գտնել 10 տարր ունեցող բազմության 3-ական գուգորդությունների քանակը: Հետևաբար որոնելի քանակը հավասար է

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{3!} = 120:$$

Ուշադրություն դարձրեք, որ եթե 10 հոգուց ընտրված 3 հոգին ունենան ային տարբեր կարգավիճակներ (օրինակ՝ տարբեր պաշտոններ, կամ նրանց ուղարկելին տարբեր տեղեր), ապա հնարավոր եղանակների քանակը կլինեն A_{10}^3 :

Օրինակ 2. Վահագնը ուզում է իրենց այգու 12 տարբեր ծաղիկներից 5 ծաղիկ ընտրել՝ ընկերուհուն նվիրելու համար: Քանի տարբեր եղանակ կա այդ ընտրությունն անելու համար:

Ընտրված 5 ծաղիկներն այս դեպքում նույնպես ունեն նույն կարգավիճակը՝ նվիրվում են նույն մարդուն, հետևաբար պետք է գտնել 12 տարր ունեցող բազմության 5-ական գույգորդությունների քանակը:

Ուրեմն որոնելի քանակը հավասար է՝

$$C_{12}^5 = \frac{12!}{(12-5)!5!} = \frac{12!}{7!5!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792:$$

Նկատի ունեցեք, որ եթե 12 տարբեր ծաղիկներից 5 ծաղիկ ընտրվեր, բայց մեկական ծաղիկ նվիրվեր 5 տարբեր աղջիկների, ապա հնարավոր տարբերակների քանակը կլիներ A_{12}^5 :



Հարցեր և խնդիրներ

- 132.** Ուսանողն ուզում է ընտրել մեկ գիրք՝ կամ ֆանտաստիկայի բաժնից, որտեղ կա 12 գիրք, կամ գիտության բաժնից, որտեղ կա 9 գիրք: Քանի ընտրության տարբերակ ունի նա:
- 133.** Դավիթն ընկերոջ համար նվեր է ուզում գնել՝ երաժշտական ալբոմ կամ գիրք: Քանի ընտրության տարբերակ ունի Դավիթը, եթե խանութում կա 20 գիրք և 15 երաժշտական ալբոմ:
- 134.** Աշակերտին անհրաժեշտ է ընտրել մեկ լրացուցիչ դասընթաց: Նրան առաջարկվում է կամ օտար լեզու (ընտրելու համար կան 4 տարբեր լեզուներ), կամ ծրագրավորման լեզու (ընտրելու համար կան 3 տարբեր լեզուներ): Ընտրելու քանի տարբերակ ունի աշակերտը:
- 135.** 1-ից 20-ը ներառյալ բնական թվերից պետք է ընտրել մեկ թիվ այնպես, որ այն կանգնի լինի, կամ 13-ից մեծ կենսո թիվ լինի: Այդպիսի ընտրության քանի հնարավորություն կա:
- 136.** Զբոսայգում կան դեպի լիճ տանող 3 տարբեր ճանապարհներ, իսկ լճից դեպի ջրվեժ տանում են ևս 2 տարբեր արահետներ: Քանի տարբեր երթուղիներ կան մուտքից դեպի ջրվեժ՝ լճով անցնելու պայմանով:
- 137.** Սրճարանն առաջարկում է ընտրություն՝ 5 տեսակ սենդվիչի, 3 տեսակ աղանդերի և 4 տեսակ ըմպելիքի: Քանի տարբեր «լանչ-փաթեթներ» (սենդվիչ, աղանդեր, ըմպելիք) կարող է առաջարկել սրճարանը:

138. Անվտանգության համակարգի համար պետք է ստեղծել 6-նիշանոց գաղտնաբառ: Առաջին 3 նիշերը պետք է լինեն մեծատառեր (անգլերենի 26 տառերից), իսկ հաջորդ 3 նիշերը՝ թվանշաններ (0 – 9): Քանի տարբեր գաղտնաբառ կարելի է ստեղծել:

139. Տարբեր գույների երկու նավակներ շախմատի տախտակի վրա տեղադրված են այնպես, որ հարվածում են միմյանց: Քանի այդպիսի դիրք գոյություն ունի:

140. Պարզեցրե՛ք արտահայտությունը.

$$\begin{array}{ll} \text{ա) } \frac{8!}{6!}, & \text{դ) } \frac{n!}{(n-2)!}, \\ \text{բ) } \frac{10!}{7!}, & \text{ե) } \frac{(n+1)!}{(n-1)!}, \\ \text{գ) } \frac{12!}{10!}, & \text{զ) } \frac{n!}{(n-3)!}: \end{array}$$

141. Պարզեցրե՛ք արտահայտությունը.

$$\begin{array}{ll} \text{ա) } A_6^4, & \text{դ) } A_{15}^3, \\ \text{բ) } A_7^4, & \text{ե) } \frac{A_{16}^{13}}{14!}, \\ \text{գ) } A_{10}^3, & \text{զ) } \frac{A_{19}^{16}}{17!}: \end{array}$$

142. Քանի եռանիշ թիվ կարելի է կազմել 1, 2, 3, 4, 5, 6 թվանշաններով՝ առանց կրկնելու թվանշանները:

143. Քանի տարբեր քառանիշ գաղտնաբառ կարելի է ստեղծել 0-ից 9 թվանշաններով, եթե գաղտնաբառում կրկնվող թվանշաններ չպիտի լինեն:

144. Քանի տարբեր վեցանիշ գաղտնաբառ կարելի է կազմել լատիներեն այբուբենի 26 փոքրատառերով, եթե գաղտնաբառում կրկնվող տառեր չպիտի լինեն:

145. Ունենք 10 գիրք: Քանի եղանակով կարող ենք ընտրել 4 գիրք և դասավորել դարակում:

146. Միցությին մասնակցում է 15 մարզիկ: Քանի եղանակով կարող են որոշվել առաջին երեք ելույթ ունեցողները:

147. Իրարից տարբեր և հորիզոնական շերտերից կազմված քանի՞ եռագույն դրոշ կարելի է կարել 7 տարբեր գույների կտորներից:
148. Տիեզերագնացների ջոկատում կա նույն պատրաստվածության 10 տիեզերագնաց: Քանի՞ տարբեր եղանակով կարելի է նրանցից ընտրել 3 տիեզերագնաց՝ տիեզերանավի հրամանատար, ինժեներ և հետազոտող:
149. Քանի՞ տարբեր եղանակով կարելի է նշանակել Հայաստանի 10 մարզերի մարզպետներին՝ 15 մարզպետության թեկնածուներից: Այդ թիվը համեմատե՞ք Հայաստանի բնակչության թվի հետ:
150. 11-րդ դասարանում ուսումնասիրում են 12 տարբեր առարկաներ: Քանի՞ իրարից տարբեր դասացուցակներ կարող են կազմվել երկուշաբթի օրվա համար, եթե այդ օրը կան 8 տարբեր դասեր:
151. Ֆիրման իր աշխատողների համար գնել է տարբեր հանգստյան տների 4 ուղեգիր: Քանի՞ տարբեր եղանակով կարելի է այդ ուղեգրերը տալ 6 աշխատողներից 4-ին:
152. Մեկ օրվա դասացուցակը պարունակում է 5 դաս: Գտե՞ք այդպիսի դասացուցակների քանակը, եթե դրանք պետք է կազմվեն 11 առարկաներից՝ առանց կրկնելու առարկաները:
153. Քանի՞ տարբեր եղանակով կարելի է ընտրել 4 մարդ 4 տարբեր պաշտոնների համար, եթե այդ պաշտոնների համար կա 9 թեկնածու:
154. 300-ից մեծ քանի՞ եռանիշ թիվ կարելի է կազմել 1, 2, 3, 4, 5, 6 թվանշաններով՝ առանց կրկնելու թվանշանները:
155. 300-ից փոքր քանի՞ եռանիշ թիվ կարելի է կազմել 1, 2, 3, 4, 5, 6 թվանշաններով՝ առանց կրկնելու թվանշանները:
156. 1, 2, 4, 5, 6, 8 թվանշաններով 5-ի բաժանվող քանի՞ բառանիշ թիվ կարելի է կազմել (թվանշանները չեն կրկնվում):
157. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 թվանշաններով 5-ի բաժանվող քանի՞ հնգանիշ թիվ կարելի է կազմել (թվանշանները չեն կրկնվում):
158. Երգչախումբը պատրաստվում է համերգի՝ ծրագրում ունենալով 7 նոր երգ: Քանի՞ տարբեր եղանակով կարող է կազմվել համերգի առաջին մասի երգացանկը, եթե այն պետք է կազմված լինի 4 երգից:
159. Օլիմպիադային մասնակցում է 20 աշակերտ: Քանի՞ տարբեր եղանակով կարող են բաշխվել առաջին, երկրորդ, երրորդ և չորրորդ տեղերը:

160. Քանի բառարան է անհրաժեշտ, որ վեց տարբեր լեզուներից ամեն մեկից հնարավոր լինի անել ուղիղ թարգմանություն մնացած լեզուներից ցանկացածին:
161. Քանի տարբեր եղանակով կարող են 15 աշակերտ նստել 20 նստատեղ ունեցող դասասենյակում:
162. Քանի տարբեր շարայություն կարելի է կազմել 6 տարբեր մեքենաներից:
163. Հանդիպմանը մասնակցում է 5 երկիր: Քանի տարբեր եղանակով մեկ շարքում կարելի է դասավորել այդ երկրների դրոշները:
164. Քանի տարբեր եղանակով կարող են 7 տարբեր գրքեր դասավորվել դարակում:
165. Միցավագքին մասնակցում է 8 մարզիկ: Քանի տարբեր եղանակով կարող են նրանք ավարտել մրցույթը, եթե վերջնագիծը միաժամանակ հատող մարզիկներ չլինեն:
166. Չկրկնելով թվանշանները՝ քանի քառանիշ թիվ կարելի է կազմել 3, 4, 6, 9 թվանշաններով:
167. Չկրկնելով թվանշանները՝ քանի քառանիշ թիվ կարելի է կազմել 0, 1, 5, 9 թվանշաններով:
168. Քանի տարբեր եղանակով կարող են 12 աշակերտ նստել 12 նստատեղ ունեցող դասասենյակում:
169. Խմբում կա 8 մարդ: Քանի տարբեր եղանակով կարելի է նրանց ցուցակագրել:
170. Քանի տարբեր եղանակով կարող են 4 տղա և 3 աղջիկ նստել 7- տեղանոց շարքում, եթե տղաները և աղջիկները պետք է նստեն առանձին խմբերով:
171. 9 աշակերտ քանի եղանակով կարող է հերթ կանգնել ճաշարանում:
172. Ուղևորատար գնացքն ունի 7 վագոն: 7 ուղեկցողներին քանի տարբեր եղանակով կարելի է բաշխել ըստ վագոնների, եթե յուրաքանչյուր վագոնի նշանակվում է մեկ ուղեկցող:
173. Անվտանգության համակարգը մուտքի համար օգտագործում է 4 տարբեր երկրաչափական պատկեր (շրջան, քառակուսի, եռանկյուն, աստղ)՝ դասավորված 2×2 աղյուսակում: Քանի տարբեր «գաղտնագրեր» կան, եթե յուրաքանչյուր պատկեր պետք է օգտագործվի մեկ անգամ:

174. Խոհարարական մրցույթի մասնակիցը ստացել է 6 տարբեր բաղադրիչներ: Նա պետք է իր ճաշատեսակում օգտագործի բոլոր 6 բաղադրիչները՝ յուրաքանչյուրը մեկ անգամ: Քանի տարբեր «բաղադրատոմսեր» կարող է նա առաջարկել, եթե բաղադրիչների ավելացման հերթականությունն ազդում է համի վրա:
175. Ծարտարագետը պետք է միացնի 6 տարբեր գույների լարերը 6 տարբեր սեղմակների: Քանի տարբեր եղանակով կարող է դա անել, եթե յուրաքանչյուր լար պետք է միացվի մեկ սեղմակի:
176. Անվտանգության համակարգը օգտագործում է «գամբյուղի» սկզբունքը: 4 տարբեր գույների գնդակներ (կարմիր, կապույտ, կանաչ, դեղին) պետք է տեղադրվեն 4 հատուկ անցքերում՝ ձևավորելով գաղտնագիր: Նույն տարբերակները չկրկնելով՝ ամենաշատը քանի փորձից հնարավոր կլինի գտնել գաղտնագիրը:
177. 4 «զգացմունքային բջիջ» (տխրություն, ուրախություն, գայրույթ, հանգստություն) օգտագործելով՝ կոմպոզիտորը պետք է ստեղծի թվային երաժշտական կտավ: Դրանց հերթականությունը խիստ փոխում է ստեղծագործության ընկալումը: Քանի տարբեր երաժշտական թեմաներ կարող է ստեղծել կոմպոզիտորը, եթե յուրաքանչյուր «բջիջ» օգտագործվում է միայն մեկ անգամ:
178. Քանի անգամ է 9 տարր ունեցող բազմության 5-ական կարգավորությունների քանակը մեծ այդ բազմության 5-ական զուգորդությունների քանակից:
179. Սեղանին դրված են 7 տարբեր մրգեր: Քանի եղանակով կարելի է ընտրել 3 միրգ:
180. Քանի տարբեր եղանակով կարելի է 5 խաղալիք ընտրել 12 տարբեր խաղալիքներից:
181. Մի ֆերմայում կան 15 տարբեր կենդանիներ: Քանի տարբեր եղանակով կարելի է ընտրել 4 կենդանի՝ ցուցահանդեսի համար:
182. Քանի տարբեր եղանակով կարելի է 54 խաղաթղթերից ընտրել 3 տարբեր խաղաթղթեր:
183. Հանդիպմանը ներկա 20 մասնակիցներից յուրաքանչյուրը մյուսներին բարևեց ձեռքսեղմումով: Ընդամենը քանի ձեռքսեղմում տեղի ունեցավ:
184. Ջոկատում կա 18 գինվոր: Քանի տարբեր եղանակով կարելի է ընտրել նրանցից 3-ին ջոկատի տարածքը մաքրելու համար:
185. Կան տարբեր գույների 10 գնդակ: Գտնե՛ք այդ գնդակներից 3-ն

ընտրելու և 7-ն ընտրելու քանակների տարբերությունը:

186. Մի դասարանում կա 10 տղա և 10 աղջիկ: Քանի՞ տարբեր եղանակով կարելի է ընտրել 2 տղա և 3 աղջիկ:
187. Ֆուտբոլի առաջնությանը մասնակցում էր 15 թիմ: Յուրաքանչյուր թիմ մյուսների հետ ունեցավ մեկ հանդիպում: Քանի՞ հանդիպում տեղի ունեցավ:
188. 10 հարցից կազմված թեստում պետք է պատասխանել 8 հարցի: Քանի՞ տարբեր եղանակով կարող են ընտրվել այդ 8 հարցերը:
189. Բուրմունքներ ստեղծող մասնագետն ունի 4 տարբեր տեսակի եթերայուղեր: Նա ցանկանում է ստեղծել նոր բուրմունք՝ խառնելով դրանցից ընդամենը 2-ը: Քանի՞ տարբեր երկբաղադրիչ խառնուրդ կարող է ստանալ:
190. Դաշնակահարն իր խաղացանկում ունի 8 սոնատ: Մեծահասակների համար կազմակերպված համերգին նա ուզում է կատարել դրանցից ընդամենը 2-ը (հերթականությունը կարևոր չէ): Այդ անելու քանի՞ տարբեր հնարավորություններ ունի դաշնակահարը:
191. Միջազգային կոնֆերանսին մասնակցելու համար ֆիրման պետք է ընտրի իր 16 աշխատողներից 2-ին: Քանի՞ տարբեր եղանակով կարող են դա անել:
192. Գտնք ուռուցիկ 8-անկյուն բազմանկյան կողմերի և անկյունագծերի քանակների գումարը:
193. Քանի՞ տարբեր 4-հնչյունանոց ակորդ կարելի է վերցնել դաշնամուրի 7 ստեղների վրա:
194. Գտնք ուռուցիկ 15-անկյուն բազմանկյան անկյունագծերի քանակը:
195. Ուռուցիկ բազմանկյան կողմերի քանակը 2 անգամ փոքր է դրա անկյունագծերի քանակից: Քանի՞ գագաթ ունի այդ բազմանկյունը:
196. Քանի՞ տարբեր եռանկյուն կարելի է կառուցել, եթե դրանց գագաթները պետք է լինեն նույն շրջանագծի 8 կետերից որևէ 3-ը:
197. Քանի՞ ուղիղ կարելի է տանել 10 կետով, որոնցից ոչ մի երեքը նույն ուղղի վրա չեն:
198. Գտնք արտահայտության արժեքը.

$$\text{ա) } 2A_7^2 - C_8^3, \quad \text{գ) } \left(\frac{C_{11}^7}{10} - \frac{C_7^2}{5} \right) \cdot \frac{P_5}{A_6^4},$$

$$բ) A_5^3 - 6 \cdot C_5^2,$$

$$դ) \left(\frac{C_{10}^7}{3} - \frac{C_6^2}{6} \right) \cdot \frac{P_4}{A_5^4} :$$

199. Գտնք n -ը, եթե.

$$ա) A_{11}^n = 990,$$

$$գ) P_{n+1} - P_n = 100P_{n-1},$$

$$բ) 4A_n^2 = C_n^3,$$

$$դ) A_n^4 = 7A_n^3:$$



Խմբային աշխատանք

Դասարանի աշակերտներին բաժանեք երեք խմբի: Խմբով թող քննարկեն հետևյալ հարցը և ներկայացնեն իրենց հիմնավորումները.

Գաղտնաբառ կազմելիս տառեր (նաև մեծատառեր), թվեր և սիմվոլներ օգտագործելն ինչ առավելություն ունի միայն տառերով գաղտնաբառ կազմելու համեմատ:

Ուսումնասիրելով այս գլուխը՝

- Վերհիշեցիք վիճակագրական տվյալների ներկայացման եղանակները, իմացաք դրանց առավելությունների ու թերությունների մասին, ամրապնդեցիք վիճակագրական տվյալներից հետևություններ, մեկնաբանություններ անելու հմտությունները:
- Վերհիշեցիք բազմությունների հետ կատարվող գործողությունները: Ծանոթացաք Վեննի (Էյլեր-Վեննի) դիագրամներին, սովորեցիք դրանք կիրառել խնդիրներ լուծելիս:
- Ծանոթացաք միացությունների տեսությանը, իմացաք տեղափոխությունների, կարգավորությունների, զուգորդությունների սահմանումները:
- Սովորեցիք տեղափոխությունների, կարգավորությունների, զուգորդությունների քանակները հաշվելու բանաձևերը, դրանք կիրառեցիք խնդիրներ լուծելիս:





ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ուսումնասիրելով այս գլուխը՝

- Կվերիիշեք վիճակագրական տվյալների միջին, մոդ, մեդիան հասկացությունները և կծանոթանաք կետագրամներին:
- Կսովորեք կետագրամով ներկայացնել վիճակագրական տվյալները, գտնել դրանց միջինը, մոդը, մեդիանը:
- Կծանոթանաք ցրվածության դիագրամներին, կսովորեք լավագույն նկարագրող ուղիղ կառուցելու եղանակները:
- Կկառուցեք լավագույն նկարագրող ուղիղ և դրա միջոցով կանեք կանխատեսումներ:
- Կվերիիշեք հավանականությունների տեսության որոշ հասկացություններ, կծանոթանաք նոր հասկացությունների հետ:
- Կսովորեք անհամատեղելի պատահույթների գումարի, անկախ և կախյալ պատահույթների արտադրյալի հավանականությունների մասին թեորեմները, կկիրառեք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Կծանոթանաք հավանականային ծառածն դիագրամներին, կկիրառեք դրանք խնդիրներ լուծելիս:

§11. Լավագույն նկարագրող ուղիղ

□ 23. Կետագրամներ

Վիճակագրական տվյալների ներկայացման եղանակների մասին խոսել ենք կետ 18-ում:

Կետագրամը վիճակագրական տվյալների ներկայացման տեսակ է: Այն օգտագործում է դեկարտյան կոորդինատային համակարգը՝ երկու թվային փոփոխականների միջև կապի տեսողական ներկայացման համար: Ի տարբերություն գրաֆիկների՝ կետերը գծերով միացված չեն, ինչն այս տեսակի ներկայացումը դարձնում է ավելի հարմար հարաբերակցությունները, օրինաչափությունները և շեղումները հայտնաբերելու համար:

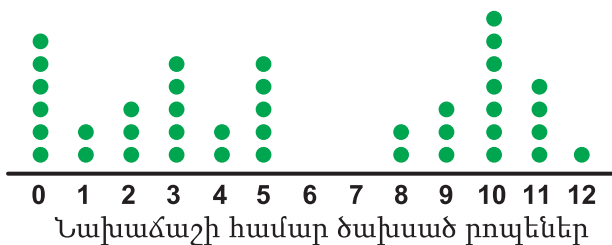
Նախաձաշելու համար ծախսած ժամանակի մասին հարցումից ստացվել են հետևյալ արդյունքները.

րոպեներ՝ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

մարդիկ՝ 6, 2, 3, 5, 2, 5, 0, 0, 2, 3, 7, 4, 1:

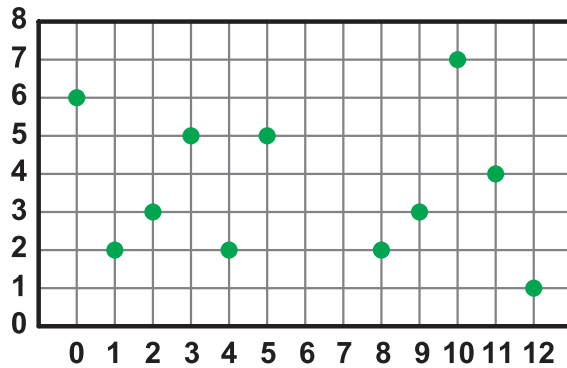
Պարզվում է, որ 6 հոգի 0 րոպե է ծախսում նախաձաշելու համար (հավանաբար չեն նախաձաշում), 2 հոգի ծախսում է 1 րոպե, 3 հոգի՝ 2 րոպե և այլն:

Այդ տվյալները ներկայացնենք կետագրամով (նկ. 24).



Նկ. 24

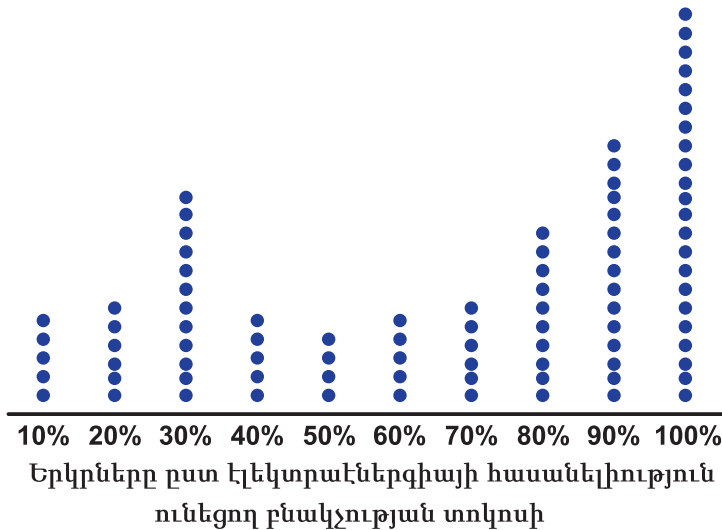
Կետագրամի մեկ այլ տարբերակ է, երբ յուրաքանչյուր տվյալ կոորդինատային հարթության վրա ներկայացվում է մեկ կետի տեսքով, և նշվում է կետի բարձրությունը: Նույն տվյալները ներկայացնենք այդ տարբերակով (նկ. 25).



Նկ. 25

Երբ վիճակագրական տվյալներում կրկնություններ չկան, կետագրամ կազմելու համար խմբավորում են դրանք՝ կլորացնելով այդ արժեքները:

Նկար 26-ի կետագրամում ներկայացված են որոշ երկրների բնակչության էլեկտրաէներգիայի հասանելիության տվյալները՝ կլորացնելով դրանք մինչև մոտակա 10-ապատիկ տոկոսը:



Նկ. 26

Վերհիշենք վիճակագրական տվյալների **միջին, մոդ, կիսորդ (մեդիան)** հասկացությունները:

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ թվային վիճակագրական տվյալների **միջինն** այդ տվյալների գումարի և դրանց քանակի հարաբերությունն է.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Վիճակագրական տվյալների **մոդը** դրա առավել հաճախ կրկնվող տվյալն է (կամ տվյալները):

Տվյալների համախումբը կարող է ունենալ մեկից ավելի մոդ կամ մոդ չունենալ:

Չնվազման կարգով գրված վիճակագրական տվյալների **կիսորդը (մեդիանը)** համախմբի կենտրոնի անդամն է, եթե տվյալների քանակը կենտ է, և կենտրոնի երկու անդամների միջինը, եթե տվյալների քանակը գույգ է:

Ներկայացնենք կետագրամի միջոցով տվյալների միջինը, մոդը, մեդիանը գտնելու քայլաշարերը:

Ամենահեշտը մոդը գտնելն է: Պետք է գտնել հորիզոնական առանցքի վրա այն արժեքը (արժեքները), որի վերևում ամենաշատ կետեր (շրջանակներ) կան: Օրինակ՝ նկար 24-ի կետագրամի համար դա 10 է:

Միջինը գտնելու համար հաշվում ենք շրջանակների քանակը: Նկար 24-ի կետագրամում կա 40 շրջանակ: Տվյալների գումարը գտնելու համար հորիզոնական արժեքները բազմապատկում ենք դրանցից վերև տեղադրված շրջանակների քանակով. $0 \cdot 6 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 10 \cdot 7 + 11 \cdot 4 + 12 \cdot 1 = 225$: Ուրեմն միջինը կլինի $\frac{225}{40} = 5,625$:

Եթե տվյալների (շրջանակների) քանակը՝ n -ը կենտ է, ապա մեդիանը գտնելու համար ձախից աջ շրջանակները հաշվելով գտնում ենք $\frac{n+1}{2}$ համարով շրջանակը ու վերցնում հորիզոնական առանցքի այն արժեքը, որի վերևում այդ շրջանակն է:

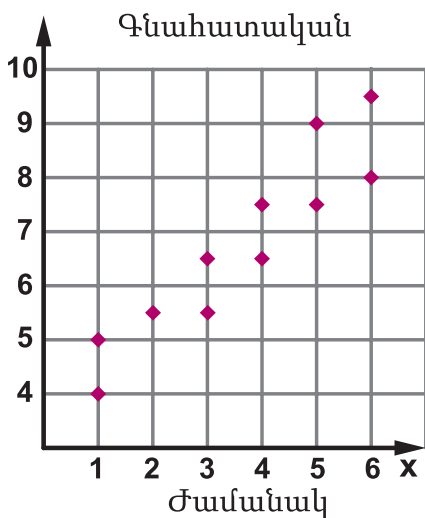
Եթե տվյալների (շրջանակների) քանակը՝ n -ը գույգ է, ապա մեդիանը գտնելու համար ձախից աջ շրջանակները հաշվելով գտնում ենք $\frac{n}{2}$ և $\frac{n}{2} + 1$ համարով շրջանակները: Մեդիանը կլինի հորիզոնական առանցքի այն արժեքների միջինը, որոնց վերևում այդ շրջանակներն են:

Նկար 24-ի կետագրամում կա 40 շրջանակ: Մեզ հետաքրքրում են 20 և 21-րդ շրջանակները: Ձախից աջ հաշվելով՝ տեսնում ենք, որ դրանք հորիզոնական 5 արժեքի վերևում են: Ուրեմն մեդիանը հավասար է $\frac{5+5}{2} = 5$:

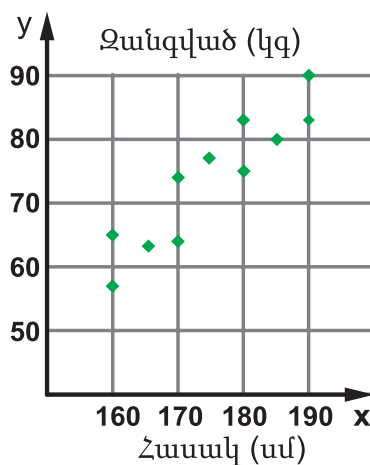
□ 24. Լավագույն նկարագրող ուղիղ, կանխատեսումներ

Վիճակագրական տվյալների գրաֆիկական ներկայացման եղանակներից մեկն էլ **ցրվածության դիագրամն** է:

Վիճակագրական տվյալները ներկայացվում են կոորդինատային հարթության վրա՝ ենթադրվող անկախ փոփոխականը x -երի առանցքի վրա, իսկ կախյալ փոփոխականը՝ y -ների վրա: Յուրաքանչյուր դիտարկում ներկայացված է մեկ կետով:



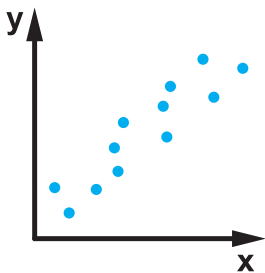
Նկ. 27



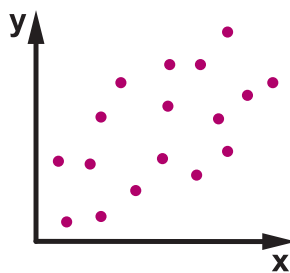
Նկ. 28

Օրինակ՝ նկար 27-ում ներկայացված է աշակերտների սովորելու համար ծախսած ժամանակի և գնահատականների, իսկ նկար 28-ում՝ մարդկանց հասակի և զանգվածի կախվածությունների դիագրամները:

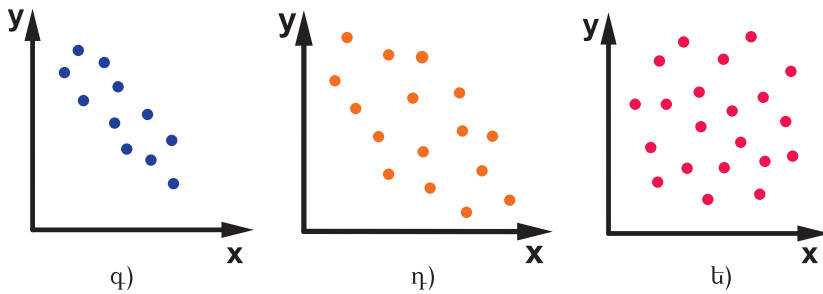
Ցրվածության դիագրամը հնարավորություն է տալիս պարզելու փոփոխականների միջև կապի առկայությունը կամ բացակայությունը, կապի առկայության դեպքում դրա ուժը և նշանը: Նկար 29-ում ներկայացված են փոփոխականների կապի տարբեր դրսևորումներ.



ա)



բ)



Նկ. 29

ա) և բ) դիագրամներում կա փոփոխականների փոխկախվածություն՝ **կոռելյացիա** (կա գերակշռող ուղղություն): Եթե անկախ փոփոխականի աճին զուգընթաց կախյալ փոփոխականն աճում է, ապա կոռելյացիայի գործակիցը դրական է: Այս դեպքում կոռելյացիայի գործակիցը դրական է, ա)-ում 0,5-ից մեծ է, բ)-ում 0,5-ից փոքր է: Ինչքան գործակիցը մոտ է 1-ին, այնքան գծային կապն ուժեղ է:

գ) և դ) դիագրամներում նույնպես կա կոռելյացիա: Եթե անկախ փոփոխականի աճին զուգընթաց կախյալ փոփոխականը նվազում է, ապա կոռելյացիայի գործակիցը բացասական է: Այս դեպքում կոռելյացիայի գործակիցը բացասական է, գ)-ում $-0,5$ -ից փոքր է, դ)-ում $-0,5$ -ից մեծ է: Ինչքան գործակիցը մոտ է -1 -ին, այնքան գծային կապն ուժեղ է:

ե) դիագրամում կոռելյացիայի գործակիցը 0 է՝ չկա գերակշռող ուղղություն: Ուրեմն այս դեպքում փոփոխականներից մեկի փոխվելը չի բերում մյուսի որոշակի փոփոխության:

Դիստողություն: Փոփոխականների կոռելյացիան, նույնիսկ ուժեղ կոռելյացիան, չի նշանակում, որ նրանք կապված են պատճառահետևանքային կապով:

Ռեգրեսիան փոփոխականների միջև կապերը վերլուծելու վիճակագրական մեթոդ է, որը թույլ է տալիս քանակապես գնահատել, թե ինչպես են մեկ կամ մի քանի անկախ փոփոխականների փոփոխություններն ազդում կախյալ փոփոխականի վրա:

Այն հնարավորություն է տալիս, առկա տվյալների վրա հենվելով, մոդելավորել փոփոխականների միջև եղած կապը՝ օգտագործելով հավասարումներ, ինչպիսին է գծային հավասարումը գծային ռեգրեսիայի դեպքում:

Ստացված հավասարումով որոշվող ուղիղը կոչվում է **լավագույն նկարագրող ուղիղ**: Այդ ուղիղը (դրա հավասարումը) հնարավորություն է տալիս անկախ փոփոխականի նոր՝ տվյալներում չեղած արժեքի հա-

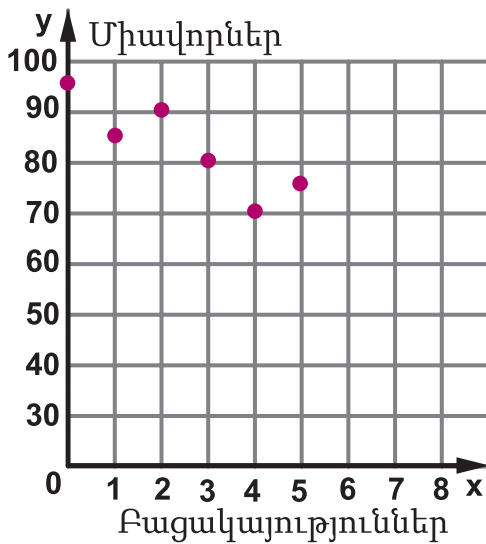
մար կանխատեսել կախյալ փոփոխականի արժեքը:

Լավագույն նկարագրող ուղիղը կառուցելու ամենապարզ, բայց ավելի ցածր ճշտություն ապահովող մեթոդը **աչքաչափի մեթոդն** է:

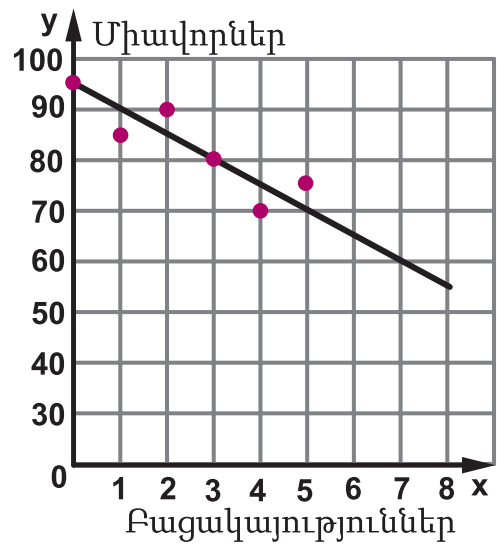
Այդ մեթոդի դեպքում լավագույն նկարագրող ուղիղը գծվում է աչքաչափով, այնպես, որ ուղիղն անցնի կետերի խմբի կենտրոնական մասով և ուղղի տարբեր կողմերում լինեն մոտավորապես նույն թվով կետեր:

Որքան ուժեղ է կոռելյացիան երկու փոփոխականների միջև ցրվածության դիագրամում, այնքան ավելի հեշտ է գծել լավագույն նկարագրող ուղիղը:

Օրինակ: Նկար 30 ա)–ի դիագրամը ներկայացնում է սովորողների բացակայությունների և ավարտական քննության միավորների կապը: Աչքաչափով գծեք լավագույն նկարագրող ուղիղը և կանխատեսեք վեց անգամ բացակայած սովորողի ավարտական քննության միավորը:



ա)



բ)

Նկար 30

Կետերի խմբի կենտրոնական մասով տանենք ուղիղ, այնպես, որ ուղղի տարբեր կողմերում լինեն մոտավորապես նույն թվով կետեր (նկ. 30 բ):

Այդ ուղղի հավասարումն ունի $y = kx + b$ տեսքը: Քանի որ ուղիղն y -ների առանցքը հատում է 95 բարձրությամբ կետում, ուրեմն $b = 95$: Քանի որ ուղիղն անցնում է $(3; 80)$ կոորդինատներ ունեցող կետով, ապա կունենանք $80 = k \cdot 3 + 95$: Հետևաբար $k = -5$:

Լավագույն նկարագրող ուղղի հավասարումը կլինի $y = -5x + 95$: Այս հավասարման մեջ տեղադրելով $x = 6$, կունենանք $y = -5 \cdot 6 + 95 = 65$: Այս-

այիսով՝ կարող ենք կանխատեսել, որ վեց անգամ բացակայած սովորողի ավարտական քննության միավորը մոտավորապես կլինի 65:

Կանխատեսում անելիս պետք է նկատի ունենալ, որ որքան հեռու է կանխատեսման x -ը հայտնի տվյալների x -երից, այնքան ավելի քիչ վստահելի է կանխատեսման արդյունքը:

Փոքրագույն քառակուսիների ռեգրեսիայի մեթոդ

Լավագույն նկարագրող ուղղի հավասարման k և b գործակիցները գտնելու համար կարելի է կիրառել **փոքրագույն քառակուսիների ռեգրեսիայի մեթոդը**: Այս մեթոդը ավելի ճշգրիտ է, քան աչքաչափի մեթոդը:

Փոքրագույն քառակուսիների ռեգրեսիայի մեթոդով կառուցված ուղիղն այնպիսին է, որ տվյալների կետերի՝ այդ ուղղից ուղղաձիգով ունեցած հեռավորությունների քառակուսիների գումարը նվազագույնն է:

Առանց ապացուցման ներկայացնենք փոքրագույն քառակուսիների ռեգրեսիայի մեթոդի քայլերը.

1. Տվյալների հավաքածուի յուրաքանչյուր (x, y) թվագույգի համար հաշվեք xy -ը և x^2 -ին:
2. Գտեք x -երի գումարը՝ S_x -ը, y -ների գումարը՝ S_y -ը, xy -ների գումարը՝ S_{xy} -ը և x^2 -ների գումարը՝ S_{x^2} -ին:
3. Լավագույն նկարագրող ուղղի k անկյունային գործակիցը՝

$$k = \frac{nS_{xy} - S_x \cdot S_y}{nS_{x^2} - (S_x)^2},$$
որտեղ n -ը կետերի քանակն է:
4. Իսկ $b = \frac{S_y - kS_x}{n}$, որտեղ n -ը կետերի քանակն է:
5. k -ի և b -ի ստացված արժեքները տեղադրեք $y = kx + b$ բանաձևում՝ գրեք լավագույն նկարագրող ուղղի հավասարումը:



Առաջադրանքներ

- 200.** Ըստ նկար 24-ի կետագրամի՝ պատասխանե՛ք հետևյալ հարցերին.
 ա) հարցվածները միջինում քանի՞ թույլ են ծախսում նախաճաշի համար,

բ) հարցվածների քանի՞ տոկոսն է նախաձաշի համար ծախսում 5 ռուպեից ավելի,

գ) գտեք տվյալների մոդը:

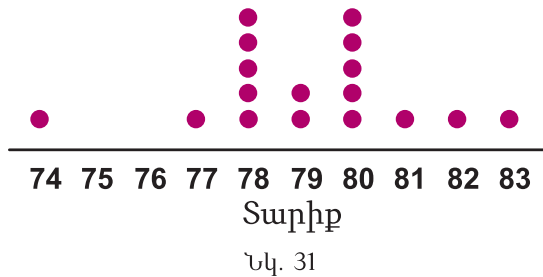
- 201.** Քնի տևողության (ժամ) վերաբերյալ հարցումից ստացվել են հետևյալ արդյունքները. 7, 7, 7, 6, 7, 7, 5, 7, 7, 7, 6, 8, 7, 8, 8: Այդ տվյալները ներկայացրեք կետագրամով: Պատասխանեք հետևյալ հարցերին.

ա) հարցվածները միջինում քանի՞ ժամ են քնում,

բ) հարցվածների քանի՞ տոկոսն է 7 ժամից քիչ քնում,

գ) գտեք տվյալների մոդը և մեդիանը:

- 202.** Մի քանի երկրներում կյանքի միջին տևողության տվյալները ներկայացված են կետագրամով (նկ. 31): Գտեք տվյալների միջինը, մոդը և մեդիանը:



- 203.** 11-րդ դասարանի աշակերտների շրջանում հարցում են անցկացրել, թե քանի եղբայր ու քույր ունեն նրանցից յուրաքանչյուրը: Արդյունքները ներկայացված են կետագրամով (նկ. 32): Պատասխանեք հետևյալ հարցերին.

ա) աշակերտներից քանիսն ունի վեց քույր ու եղբայր,

բ) աշակերտներից քանիսը չունի քույր ու եղբայր,

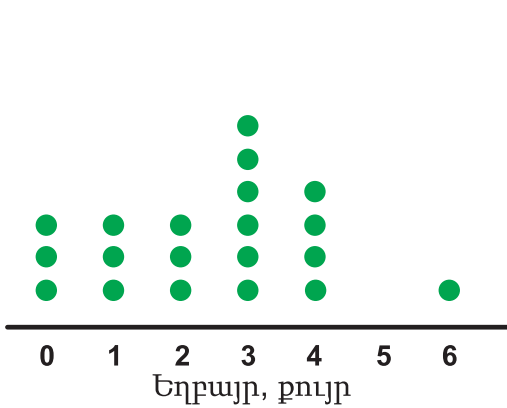
գ) աշակերտներից քանիսն ունի երեք և ավելի քույր և եղբայր:

- 204.** Քսանհինգ աշակերտի խնդրել են գնահատել, թե շաբաթական քանի ժամ են նրանք խոսում հեռախոսով: Կետագրամում ներկայացված են այդ հարցման արդյունքները (նկ. 33): Պատասխանեք հետևյալ հարցերին.

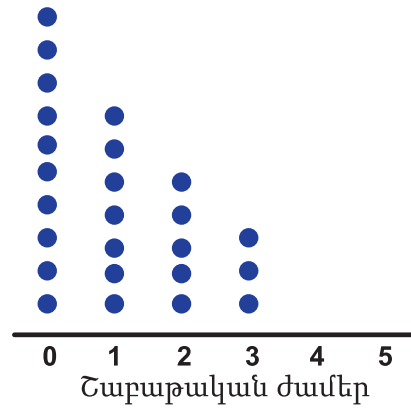
ա) քանի՞ տոկոսն է հայտնել, որ չի խոսում հեռախոսով,

բ) որքա՞ն է աշակերտի հեռախոսով խոսելու շաբաթական ամենաշատ ժամանակը, խմբի քանի՞ տոկոսն է հայտնել, որ այդքան ժամանակ խոսել է հեռախոսով,

գ) գտե՛ք տվյալների մոդը և միջինը:



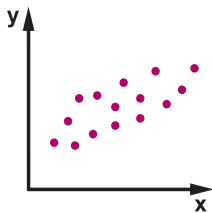
Նկ. 32



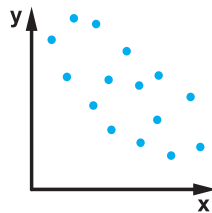
Նկ. 33

205. Ըստ 34 նկարի պատասխանե՛ք հետևյալ հարցերին.

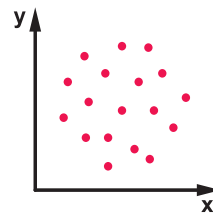
- ա) փոփոխականների կոռելյացիա կա՞,
- բ) կոռելյացիան ուժեղ է, թե՞ թույլ,
- գ) կոռելյացիայի գործակիցը դրական է, թե՞ բացասական:



Նկ. 34



Նկ. 35



Նկ. 36

206. Ըստ 35 նկարի պատասխանե՛ք հետևյալ հարցերին.

- ա) փոփոխականների կոռելյացիա կա՞,
- բ) կոռելյացիան ուժեղ է, թե՞ թույլ,
- գ) կոռելյացիայի գործակիցը դրական է, թե՞ բացասական:

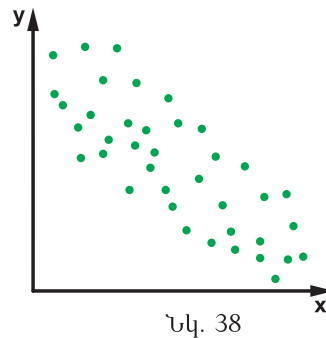
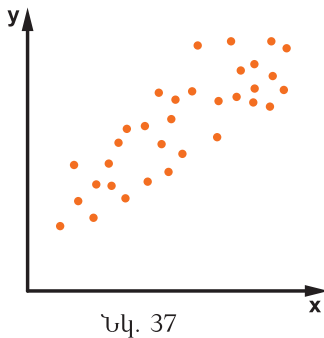
207. Ըստ 36 նկարի պատասխանե՛ք հետևյալ հարցերին.

- ա) փոփոխականների կոռելյացիա կա՞,
- բ) կոռելյացիան ուժեղ է, թե՞ թույլ,
- գ) կոռելյացիայի գործակիցը դրական է, թե՞ բացասական:

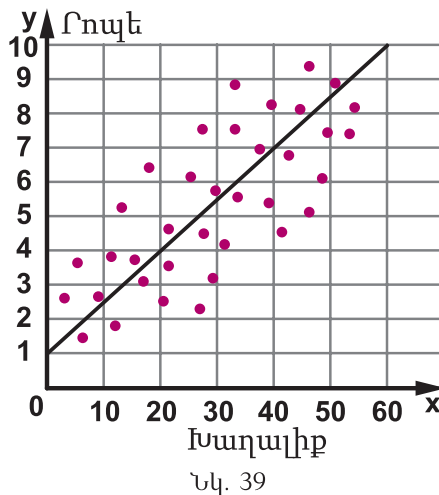


Խմբային աշխատանք

Դասարանի աշակերտներին բաժանեք խմբերի՝ ամեն խմբում 2–3 աշակերտ: Խմբերը թող գծեն լավագույն նկարագրող ուղիղներ 37 – 38 նկարների ցրվածության դիագրամների համար և ներկայացնեն իրենց տարբերակները: Վերջում պետք է համեմատվեն ներկայացված տարբերակները և ընտրվեն ամենահաջողվածները:

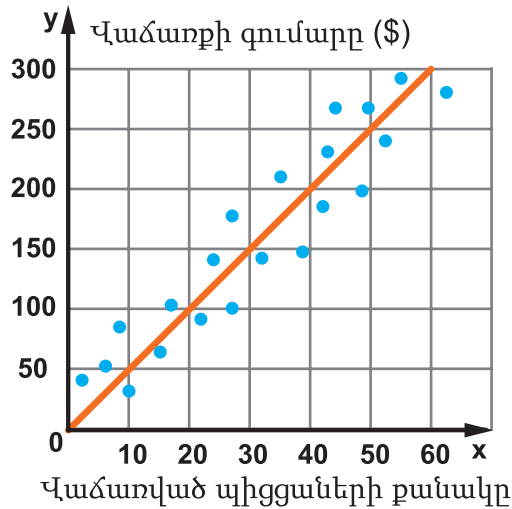


208. Նկար 39-ում ներկայացված է խաղասենյակի խաղալիքների քանակի և դրանք հավաքելու համար ծախսած ժամանակի կապի դիագրամը: Գրե՛ք լավագույն նկարագրող ուղղի հավասարումը:



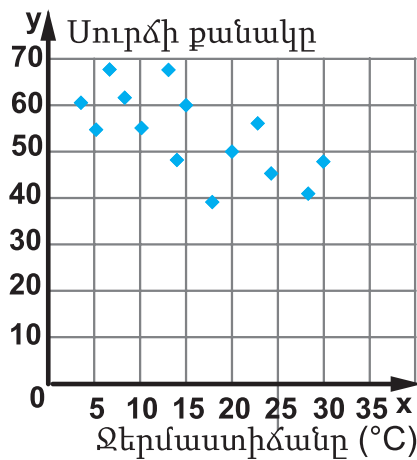
209. Նկար 40-ում ներկայացված են խանութներում վաճառվող պիցցաների քանակի և դրանց վաճառքից ստացված գումարի կապի

դիագրամը և լավագույն նկարագրող ուղիղը: Լավագույն նկարագրող ուղղի օգնությամբ գտնեք, թե քանի պիցցա է վաճառվել, եթե վաճառքից ստացված գումարը 200 դոլար է:



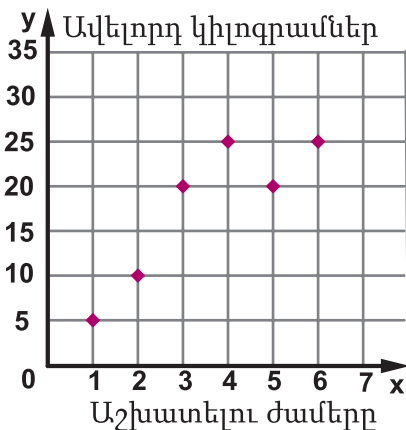
Նկ. 40

- 210.** Նկար 41-ում ներկայացված է շաբաթվա միջին ջերմաստիճանի և այդ օրերին խանութի վաճառած սուրճի քանակի կապի դիագրամը: Լավագույն ուղղի միջոցով կանխատեսե՞ք վաճառվող սուրճի քանակը, եթե օրվա միջին ջերմաստիճանը 35° է:



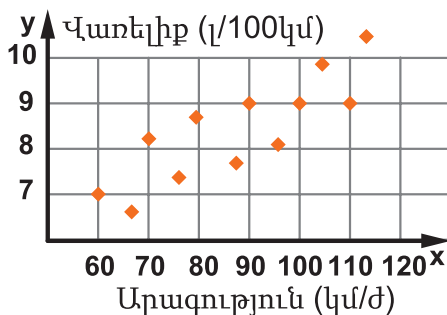
Նկ. 41

211. Նկար 42-ում ներկայացված է մարդկանց օրական համակարգչով աշխատելու ժամերի քանակի և նրանց ավելորդ քաշի միջև կապի դիագրամը: Լավագույն ուղղի օգնությամբ կանխատեսենք մարդու ավելորդ քաշը, եթե նա օրական համակարգչով աշխատում է 7 ժամ:



Նկ. 42

212. Նկար 43-ում ներկայացված է մեքենայի արագության (կմ/ժ) և ծախսած վառելիքի (լ/100կմ) կապի դիագրամը: Լավագույն ուղղի օգնությամբ կանխատեսենք վառելիքի ծախսը 120 կմ/ժ արագության դեպքում:



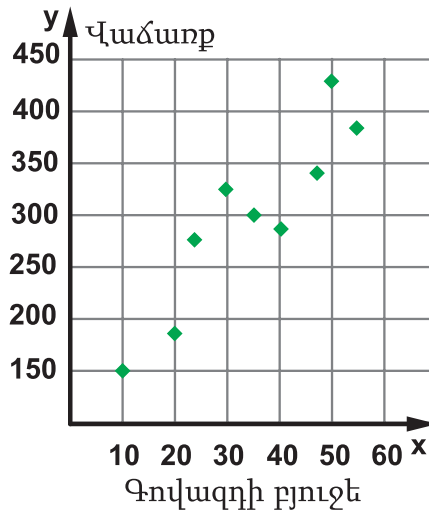
Նկ. 43

213. Նկար 44-ում ներկայացված է ընկերության գովազդի բյուջեի (1000 դրամ) և վաճառքի (հատ) կապի դիագրամը: Լավագույն ուղղի օգնությամբ կանխատեսենք վաճառքի քանակը գովազդի 60000 դրամ բյուջեի դեպքում:
214. Ցրվածության դիագրամով ներկայացրեք աղյուսակ 1-ի փոփոխա-

կանների կապը: Օգտվելով փոքրագույն քառակուսիների ռեգրեսիայի մեթոդից՝ գրեք լավագույն նկարագրող ուղղի հավասարումը: Ուղիղը պատկերեք դիագրամի վրա:

x	1	2	3	4	5
y	2	3	3	4	4

Աղյուսակ 1



Նկ. 44

- 215.** Աղյուսակ 2-ում ներկայացված են ֆուտբոլի առաջնությունում թիմերի խփած գոլերի քանակն ու առաջնությունում այդ թիմերի զբաղեցրած տեղերը: Օգտվելով փոքրագույն քառակուսիների ռեգրեսիայի մեթոդից՝ գրեք լավագույն նկարագրող ուղղի հավասարումը:

x	8	9	10	11	12
y	5	4	3	1	2

Աղյուսակ 2

§12. Հավանականություն

□ 25. Հավանականությունների տեսության առանցքային հասկացությունները

Հավանականության տեսությունը, որին նվիրված են այս և հաջորդ կետերը, մաթեմատիկայի բաժին է, որը զբաղվում է մեծաքանակ միատարր պատահական երևույթների հավանականային օրինաչափությունների ուսումնասիրությամբ:

Օրինաչափությունների իմացությունը, որոնց ենթարկվում են մեծաքանակ պատահական իրադարձությունները, թույլ է, տալիս կանխատեսել, թե ինչպես են այդ երևույթներն ընթանալու:

Օրինակ՝ անհնար է նախապես իմանալ մեկ մետաղադրամի նետման արդյունքը, բայց եթե նետումների թիվը բավականաչափ մեծ է, կարելի է կանխագուշակել, որ նետումների թվի մոտավորապես կեսը կբացվի «Զինանշան»: Ընդ որում՝ ինչքան շատ լինի փորձերի թիվը այնքան մեծ կլինի կանխատեսման ճշտությունը:

Հավանականությունների տեսության մեթոդները լայնորեն կիրառվում են բնագիտության և տեխնիկայի տարբեր բնագավառներում: Դրանք կիրառվում են նաև շատ այլ դեպքերում, օրինակ՝ եղանակը կանխատեսելու, բիզնես ռիսկերը գնահատելու համար:

Հավանականությունների տեսության որոշ հասկացությունների հետ Դուք ծանոթացել եք միջին դպրոցում:

Վերհիշենք դրանք և ծանոթանանք նոր հասկացությունների ու օրինաչափությունների հետ:

Փորձը (կամ պատահական փորձը) գործողություն կամ դիտարկում է, որը նույն պայմաններում կարող է անսահմանափակ քանակով կրկնվել, բայց դրա արդյունքը հնարավոր չէ նախապես ճշգրիտ կանխատեսել:

Փորձի օրինակներ են մետաղադրամ նետելը, զառ գցելը, խաղաթղթերի տուփից մի թուղթ հանելը:

Ելքը փորձի հնարավոր արդյունքներից ցանկացած մեկն է: Ելքերը փոխադարձաբար բացառում են միմյանց (միաժամանակ տեղի չեն ունենում), և փորձի արդյունքում պարտադիր տեղի է ունենում դրանցից մեկը:

Մետաղադրամ նետելու դեպքում ելքերն են՝ «Զինանշան» և «Թիվ»: Զառ գցելու դեպքում ելքերն են՝ 1, 2, 3, 4, 5, 6:

Պատահույթ է կոչվում փորձի հետ կապված որևէ իրադարձություն, որը կարող է փորձի արդյունքում տեղի ունենալ կամ տեղի չունենալ:

Փորձի որևէ ելքի հետ համընկնող պատահույթը կոչվում է **տարրական պատահույթ**:

Ջառ գցելու փորձի տարրական պատահույթներն են 1-ը, 2-ը, 3-ը, 4-ը, 5-ը, 6-ը: Նույն փորձի պատահույթ են նաև զույգ թիվ բացվելու, 3-ից մեծ թիվ բացվելու կամ 10 բացվելու պատահույթները:

Ջույգ թիվ բացվելու պատահույթին **նպաստող** ելքերն են 2-ը, 4-ը և 6-ը: 3-ից մեծ թիվ բացվելու պատահույթին **նպաստող** ելքերն են 4-ը, 5-ը և 6-ը, իսկ 10 բացվելու պատահույթին **նպաստող** ելք չկա:

Պատահույթը, որին նպաստող ելք չկա, կոչվում է **անհնար պատահույթ**:

Պատահույթը, որին նպաստում է փորձի ցանկացած ելք, կոչվում է **հավաստի պատահույթ**:

Մետաղադրամ նետելու փորձի համար հավաստի պատահույթ է «Զինանշան» կամ «Թիվ» բացվելը:

Եթե զառի բոլոր նիստերի վրա լինի 5, ապա այդպիսի զառը գցելու փորձի համար հավաստի պատահույթ է 5 բացվելը, և անհնար պատահույթ է 3 բացվելը:

Հավանականությունը մեծաքանակ փորձերի արդյունքում որևէ պատահույթի տեղի ունենալու քանակական գնահատական է:

Կան պատահույթի հավանականության տարբեր սահմանումներ: Դրանցից մեկը պատահույթի հավանականության դասական սահմանումն է.

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: n հավասարահավանական փորձի A պատահույթի $P(A)$ հավանականությունն է կոչվում այդ պատահույթին **նպաստող ելքերի** $n(A)$ քանակի և n -ի **հարաբերությունը**. $P(A) = \frac{n(A)}{n}$:

Նշենք, որ սա կիրառելի է, եթե ելքերը հավասարահավանական են, և դրանց քանակը վերջավոր է:

Օրինակ 1. Մետաղադրամ նետելիս «Զինանշան» բացվելու հավանա-

կանությունը $\frac{1}{2}$ է, քանի որ հավասարահավանական ելքերի քանակը 2 է («Զինանշան», «Թիվ»), իսկ «Զինանշան» բացվելուն նպաստող ելքերի քանակը (բարենպաստ ելքերի քանակը)՝ 1:

Կարևոր է իմանալ, որ չնայած մետաղադրամ նետելիս «Զինանշան» բացվելու հավանականությունը $\frac{1}{2}$ է, բայց դա չի նշանակում, որ, օրինակ, 20 անգամ մետաղադրամ նետելիս անպայման «Զինանշան» կբացվի 10 անգամ: Բայց ինչքան մեծ լինի փորձերի n թիվը, այնքան «Զինանշան» բացվելու թիվը մոտ կլինի $\frac{n}{2}$ -ին:

Օրինակ 2. Զառ գցելիս 2-ից մեծ թիվ բացվելու հավանականությունը $\frac{2}{3}$ է, քանի որ ելքերի քանակը 6 է (1, 2, 3, 4, 5, 6), իսկ 2-ից մեծ թիվ բացվելու նպաստող ելքերի քանակը՝ 4 (3, 4, 5, 6): Ուրեմն որոնելի հավանականությունը հավասար է $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$:

Պատահույթի հավանականության դասական սահմանումից հետևում է, որ **հավաստի պատահույթի հավանականությունը 1 է**, իսկ **անհնար պատահույթի հավանականությունը՝ 0**:

Ընդհանրապես, ցանկացած A պատահույթի հավանականությունը՝ $0 \leq P(A) \leq 1$:

Պատահույթի հավանականությունը հաճախ արտահայտում են տոկոսներով:

Անհամատեղելի կամ փոխբացառող պատահույթներն այն պատահույթներն են, որոնցից մեկի տեղի ունենալը բացառում է մյուսի տեղի ունենալը՝ նույն փորձի արդյունքում:

Ինչպես վերևում նշել ենք՝ փորձի ելքերը անհամատեղելի պատահույթներ են:

Անհամատեղելի պատահույթներ են նաև զառ նետելիս զույգ թիվ բացվելու և կենտ թիվ բացվելու պատահույթները:

Օրինակ 3. Գցում են երկու զառ: Գտնք հավանականությունը, որ բացված թվերի գումարը մեծ է 10-ից (A պատահույթ):

Քանի որ զառերից յուրաքանչյուրն ունի հավասարահնարավոր 6 ելք, ապա երկու զառ գցելու դեպքում կա հավասարահնարավոր 36 ելք ($6 \cdot 6 = 36$): A պատահույթին նպաստող ելքերը երեքն են՝ 5 և 6, 6 և 5, 6

և 6: Ուրեմն $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$:

Օրինակ 4. Խմբում կան 3 աղջիկ և 4 տղա: Նրանցից պատահականորեն ընտրում են երկուսին: Գտնք հետևյալ պատահույթների հավանականությունը.

1) A – ընտրվածները տղաներ են,

2) B – ընտրվածները տարբեր սեռի են:

7 մարդուց 2-ին ընտրելու եղանակների քանակը C_7^2 է: Ուրեմն փորձի ելքերի քանակը՝ $n = C_7^2 = 21$:

1) A պատահույթին նպաստող ելքերի քանակը՝ $n(A) = C_4^2 = 6$: Ուրեմն $P(A) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$:

2) Քանի որ 1 տղա կարելի է ընտրել 3 եղանակով, իսկ մեկ աղջիկ՝ 4 եղանակով, ապա B պատահույթին նպաստող ելքերի քանակը՝ $n(B) = 12$: Ուրեմն $P(B) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$:

□ 26. Անկախ և կախյալ պատահույթներ

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: A և B պատահույթները կոչվում են **անկախ**, եթե դրանցից մեկի տեղի ունենալը կամ չունենալը չի փոխում մյուսի տեղի ունենալու հավանականությունը:

Օրինակ՝ մետաղադրամը նետում են 2 անգամ: A պատահույթը առաջին նետման ժամանակ «Զինանշան» բացվելն է, B պատահույթը՝ երկրորդ նետման ժամանակ «Թիվ» բացվելը: Քանի որ առաջին անգամ «Զինանշան» բացվելը չի փոխում երկրորդ անգամ «Թիվ» բացվելու հավանականությունը, ապա A -ն և B -ն անկախ պատահույթներ են:

Առաջին հրանոթով թիրախը խոցելու և երկրորդ հրանոթով թիրախը խոցելու պատահույթները նույնպես անկախ են, քանի որ առաջին հրանոթով թիրախը խոցելը չի փոխում երկրորդով թիրախը խոցելու հավանականությունը:

Խնդիրներում հաճախ բացահայտ նշվում է, որ դիտարկվող պատահույթներն անկախ են:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: A և B պատահույթները կոչվում են **կախյալ**, եթե դրանցից մեկի տեղի ունենալը կամ չունենալը փոխում է մյուսի տեղի ունենալու հավանականությունը:

Օրինակ՝ գրիպի դեմ պատվաստված լինելու պատահույթը և գրիպով հիվանդանալու պատահույթը կախյալ պատահույթներ են: Պատվաստված լինելը փոխում է՝ նվազեցնում է գրիպով հիվանդանալու հավա-

նականությունը (հակառակ դեպքում անիմաստ կլինեք պատվաստվելը): Բերենք կախյալ պատահույթների ևս մեկ օրինակ.

Զամբյուղում կա 5 սպիտակ և 3 սև գնդակ: Զամբյուղից, առանց ետ վերադարձնելու, հաջորդաբար հանում են երկու գնդակ: Հաշվենք երկրորդ գնդակի սպիտակ լինելու հավանականությունը, եթե առաջին անգամ սպիտակ գնդակ է դուրս եկել:

Նախ նկատենք, որ եթե առաջին փորձը տեղի ունեցած չլինեք, ապա սպիտակ գնդակ դուրս գալու հավանականությունը $\frac{5}{8}$ է: Առաջին փորձից հետո զամբյուղում մնացել է 7 գնդակ, որոնցից 4-ը սպիտակ են: Ուրեմն երկրորդի սպիտակ լինելու հավանականությունը $\frac{4}{7}$ է: Եթե առաջին փորձի արդյունքը լինեք սև գնդակ, միևնույն է, դա փոխելու էք երկրորդ փորձի հավանականությունը (համոզվեք ինքներդ):

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: Պայմանական հավանականություն է կոչվում մի պատահույթի հավանականությունը մյուս պատահույթի տեղի ունենալու պայմանով:

A պատահույթի պայմանական հավանականությունը B պատահույթի տեղի ունենալու պայմանով նշանակում են $P(A|B)$ -ով:

A և B անկախ պատահույթների համար $P(A|B) = P(A)$, $P(B|A) = P(B)$:

A և B կախյալ պատահույթների համար $P(A|B) \neq P(A)$, $P(B|A) \neq P(B)$:

Վերևում դիտարկված սև և սպիտակ գնդիկներով զամբյուղի օրինակում մենք տեսանք, որ $P(B) = \frac{5}{8}$, իսկ $P(B|A) = \frac{4}{7}$, որտեղ A-ն առաջին գնդիկի սպիտակ լինելու պատահույթն է, իսկ B-ն՝ երկրորդ գնդիկի սպիտակ լինելու պատահույթը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: A և B պատահույթների գումար (կամ միավորում) կոչվում է այն պատահույթը, որը տեղի է ունենում, երբ տեղի է ունենում կամ A-ն, կամ B-ն կամ երկուսն էլ:

Օրինակ՝ եթե A պատահույթը զառ գցելիս 5 բացվելն է, իսկ B պատահույթը՝ 3 բացվելը, ապա $A+B$ (կամ $A \cup B$) պատահույթը կամ 3, կամ 5 բացվելն է:

Հրաձիգը երկու անգամ կրակում է թիրախին: Եթե A պատահույթը առաջին կրակոցով թիրախը խոցելն է, իսկ B պատահույթը՝ երկրորդ կրակոցով թիրախը խոցելը, ապա $A+B$ (կամ $A \cup B$) պատահույթը կրակոցներից գոնե մեկով թիրախը խոցելն է:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: A և B պատահույթների արտադրյալ (կամ հատում) է կոչվում այն պատահույթը, որը տեղի է ունենում, երբ տեղի են ունենում A , և B պատահույթները:

Վերևում բերված զառ գցելու օրինակի համար AB (կամ $A \cap B$) պատահույթը և 3, և 5 բացվելն է, որն անհնար պատահույթ է:

Վերևում բերված հրաձիգի օրինակի դեպքում AB (կամ $A \cap B$) պատահույթը երկու անգամն էլ թիրախը խոցելն է:

Առանց ապացուցման ներկայացնենք պատահույթների գումարի, պատահույթների արտադրյալի հավանականությունների մասին երեք թեորեմ:

Թեորեմ: A և B անհամատեղելի (փոխբացառող) պատահույթների գումարի հավանականությունը հավասար է այդ պատահույթների հավանականությունների գումարին՝
 $P(A+B) = P(A) + P(B)$:

Օրինակ 1. Գտնք զառ գցելիս կամ 3, կամ 5 բացվելու հավանականությունը:

3 բացվելը և 5 բացվելը անհամատեղելի պատահույթներ են: Դրանցից յուրաքանչյուրի հավանականությունը $\frac{1}{6}$ է: Ուրեմն որոնելի հավանականությունը կլինի $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$:

Օրինակ 2. Հրաձիգի՝ թիրախը խոցելու հավանականությունը 0,8 է: Հրաձիգը երկու անգամ կրակում է թիրախին: Գտնք երկու կրակոցներից գոնե մեկով թիրախը խոցելու հավանականությունը: Մեզ հետաքրքրող պատահույթը առաջին կրակոցով թիրախը խոցելու և երկրորդ կրակոցով թիրախը խոցելու պատահույթների գումարն է:

Եթե գումարենք այդ պատահույթների հավանականությունները, ապա կստանանք 1,6, որն ակնհայտ **սխալ պատասխան է** (որևէ պատահույթի հավանականություն չի կարող մեծ լինել 1-ից): Բանն այն է, որ այս դեպքում, ի տարբերություն առաջին օրինակի, այդ երկու պատահույթները անհամատեղելի չեն, այսինքն՝ վերևի թեորեմը այս դեպքին չի վերաբերում:

Նշենք, որ վերևի պնդումը ճիշտ է նաև ավելի մեծ (վերջավոր) թվով պատահույթների համար:

Թեորեմ: A և B անկախ պատահույթների արտադրյալի հավանականությունը հավասար է այդ պատահույթների հավանականությունների արտադրյալին՝ $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$:

Օրինակ 3. Գտնք երկու անգամ զառ զցելիս առաջինը 3, իսկ երկրորդը 6 բացվելու հավանականությունը:

Զառ զցելիս 3 բացվելը, 6 բացվելը անկախ պատահույթներ են, և դրանցից յուրաքանչյուրի հավանականությունը $\frac{1}{6}$ է: Մեզ հետաքրքրող պատահույթը այդ երկու պատահույթների արտադրյալն է (տեղի պիտի ունենա և՛ մեկը, և՛ մյուսը): Ուրեմն որոնելի հավանականությունը հավասար է $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$:

Օրինակ 4. Հավանականությունը, որ սպառողը հեռուստացույցով կտեսնի որոշակի ապրանքի գովազդ, 0,04 է: Հավանականությունը, որ նույն սպառողը այդ ապրանքի գովազդը կտեսնի գովազդային վահանակի վրա, 0,06 է: Համարելով, որ այդ պատահույթներն անկախ են՝ գտնք հավանականությունը, որ սպառողը կտեսնի երկու գովազդն էլ:

Փաստորեն, պետք է գտնել երկու անկախ պատահույթների արտադրյալի հավանականությունը: Ուրեմն որոնելի հավանականությունը հավասար է $0,04 \cdot 0,06 = 0,0024$:

Նշենք, որ վերևի պնդումը ճիշտ է նաև ավելի մեծ (վերջավոր) թվով պատահույթների համար:

Թեորեմ: A և B կախյալ պատահույթների արտադրյալի հավանականությունը հավասար է դրանցից մեկի հավանականության և մյուսի պայմանական հավանականության արտադրյալին.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(A|B) \quad \text{կամ} \quad P(AB) = P(B) \cdot P(B|A):$$

Օրինակ 5. Ընկերությունը հավակնում է երկու խոշոր կորպորացիաների մեկական պատվերների համար: Ընկերության փորձագետները կարծում են, որ A կորպորացիայից պատվեր ստանալու (A պատահույթ) հավանականությունը 0,45 է: Մասնագետները նաև ենթադրում են, որ եթե ընկերությունը A կորպորացիայից պատվեր ստանա, ապա B կոր-

պորացիայի՝ նրանց դիմելու (B պատահույթ) հավանականությունը $0,9$ է: Որքան է հավանականությունը, որ այդ ընկերությունը կստանա երկու պատվերն էլ:

Դիտարկվող պատահույթները կախյալ են, և հայտնի է, որ $P(A) = 0,45$, $P(A|B) = 0,9$: Պետք է գտնել $P(AB)$, այսինքն՝ հավանականությունը, որ երկու պատահույթներն էլ տեղի կունենան: Ըստ կախյալ պատահույթների արտադրյալի հավանականության բանաձևի՝ $P(AB) = P(A) \cdot P(A|B) = 0,45 \cdot 0,9 = 0,405$:

□ 27. Հավանականային ծառաձև դիագրամներ

Հավանականային ծառաձև դիագրամը գրաֆիկական գործիք է, որը ներկայացնում է հաջորդական պատահույթների բոլոր հնարավոր արդյունքները: Դիագրամի յուրաքանչյուր ճյուղ համապատասխանում է որոշակի պատահույթի: Ճյուղերի վրա ներկայացնում են այդ պատահույթների հավանականությունները:

Նույն արմատի հաջորդական ճյուղերը ներկայացնում են անկախ կամ կախյալ պատահույթներ: Դրանցով առաջ շարժվելիս անպայման (կամ պայմանական) հավանականությունները բազմապատկվում են:

Իսկ տարբեր արմատները ներկայացնում են անհամատեղելի պատահույթներ: Դրանց միավորման հավանականությունը հավասար է առանձին արմատների հավանականությունների գումարին:

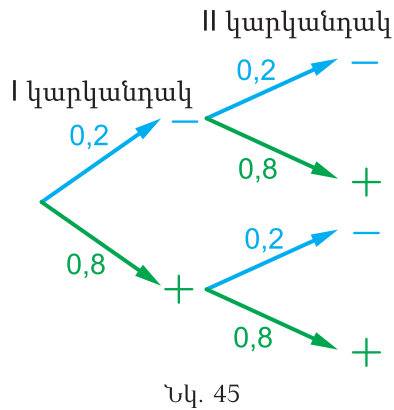
Օրինակով տեսնենք, թե ինչ է հավանականային ծառաձև դիագրամը և ինչպես դրանից օգտվել խնդիրներ լուծելիս:

Օրինակ 1. Խանութը վաճառում է մտով կարկանդակներ, բայց միջինում 10 կարկանդակից 2-ում միս չկա: Հաճախորդը գնում է 2 կարկանդակ: Գտնեք հավանականությունը, որ դրանցից առնվազն մեկում միս կա:

Խնդրի տվյալներից պարզ է դառնում, որ պատահական ընտրված կարկանդակում միս չլինելու հավանականությունը $\frac{2}{10}$ (կամ $0,2$) է, միս լինելու հավանականությունը՝ $0,8$:

Տվյալները ներկայացնենք ծառաձև դիագրամով (նկ. 45, «-»-ով նշված են կարկանդակում միս չլինելու, իսկ «+»-ով՝ լինելու պատահույթները):

Առնվազն մեկում միս լինելը իրականանում է, երբ միայն առաջին կարկանդակում միս կա, կամ միայն երկրորդում կա, կամ երկուսում էլ կա: Այն չի իրականանում միայն մեկ դեպքում՝ երբ երկու կարկանդակում էլ միս չկա:



Ըստ դիագրամի՝ երկուսում էլ միս չլինելու հավանականությունը հավասար է $0,2 \cdot 0,2 = 0,04$: Հետևաբար որոնելի հավանականությունը հավասար է $1 - 0,04 = 0,96$:

Այս խնդրում կարկանդակները կարող են մտով չլինել միմյանցից անկախ:

Անկախ պատահարների արտադրյալի հավանականությունը հավասար է դրանց հավանականությունների արտադրյալին:

Իսկ անհամատեղելի պատահարների գումարի հավանականությունը հավասար է դրանց հավանականությունների գումարին:

Պարզ ձևակերպումով. երբ դա «և սա, և դա»-ն է՝ հավանականությունները բազմապատկվում են, իսկ երբ դա «կամ մեկը, կամ մյուսը»-ն է՝ հավանականությունները գումարվում են:

Վերևում պահանջվող հավանականությունը գտանք երկու կարկանդակներից ոչ մեկում միս չլինելու հավանականությունը հաշվելով ու ստացվածը 1-ից հանելով, որն ավելի կարճ տարբերակ է:

Բայց այդ հավանականությունը կարելի է գտնել նաև միայն առաջին կարկանդակում միս լինելու, միայն երկրորդում լինելու, երկուսում էլ լինելու հավանականությունները հաշվելով ու դրանք գումարելով: Դա երկար է, բայց սկզբի համար ուսանելի է:

Միայն առաջին կարկանդակում միս լինելու հավանականությունը հավասար է $0,8 \cdot 0,2 = 0,16$:

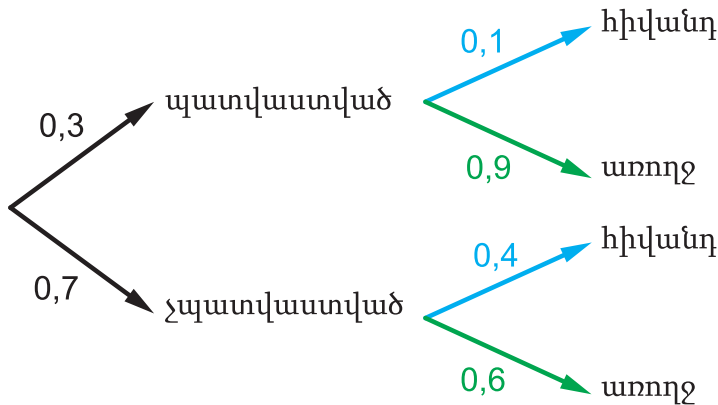
Միայն երկրորդ կարկանդակում միս լինելու հավանականությունը հավասար է $0,2 \cdot 0,8 = 0,16$:

Երկու կարկանդակում էլ միս լինելու հավանականությունը հավասար է $0,8 \cdot 0,8 = 0,64$:

Գումարելով ստացված հավանականությունները՝ որոնելի հավանականության համար նորից կստանանք 0,96:

Օրինակ 2. Պատվաստված մարդու գրիպով հիվանդանալու հավանականությունը 0,1 է, իսկ չպատվաստված մարդու գրիպով հիվանդանալու հավանականությունը՝ 0,4: Բնակչության 30%-ը պատվաստվել է գրիպի դեմ: Գտնք պատահական ընտրված մարդու գրիպով հիվանդանալու հավանականությունը:

Տվյալները ներկայացնենք ծառաձև դիագրամով (նկ. 46)։



Նկ. 46

Պատվաստված մարդու հիվանդանալու հավանականությունը հավասար է $0,3 \cdot 0,1 = 0,03$:

Չպատվաստված մարդու հիվանդանալու հավանականությունը հավասար է $0,7 \cdot 0,4 = 0,28$:

Գումարելով ստացված հավանականությունները՝ որոնելի հավանականության համար կստանանք 0,31:



Առաջադրանքներ

216. Գտնք հավանականությունը, որ 36 խաղաքարերի տուփից մեկ խաղաքար հանելիս դուրս կգա.

- ա) թագուհի,
- բ) ո՛չ թագուհի, ո՛չ արքա,
- գ) խաչի տուզը,
- դ) կամ արքա, կամ թագուհի:

217. Վիճակահանությանը մասնակցում է 100 տոմս: Գտնք հավանականությունը, որ պատահական ընտրված մեկը տոմսը կլինի շահող,

երթե ա) շահող տոմսերը 4-ն են, բ) շահող տոմսերը 6-ն են:

218. Գտնք մեկ անգամ զառ գցելիս ա) զույգ թիվ բացվելու, բ) 3-ին պատիկ թիվ բացվելու հավանականությունը:

219. Սևակը խնդիր էր լուծում, որը պահանջում էր գտնել երկու զառ նետելիս բացվող թվերի գումարի 4 լինելու հավանականությունը: Նա մտածում էր, որ հնարավոր ելքերը երկուսն են՝ այդ գումարը 4 է, այդ գումարը 4 չէ: Դրանից նա եզրակացրեց, որ որոնելի հավանականությունը $\frac{1}{2}$ է: Բացատրեք, թե ո՞րն էր Սևակի սխալը:

220. Նետում են 2 մետաղադրամ: Գտնք.

ա) երկու «Ջինանշան» բացվելու,

բ) գոնե մեկ անգամ «Թիվ» բացվելու հավանականությունը:

221. Արտակը մոռացել էր ծանոթի հեռախոսահամարի թվանշաններից մեկը և դրա տեղը գրեց պատահական թվանշան: Գտնք հավանականությունը, որ նա ճիշտ համար հավաքեց:

222. Նարեն մոռացել էր ծանոթի հեռախոսահամարի վերջին երկու թվանշանները, բայց հիշում էր, որ դրանք տարբեր էին: Նա դրանց տեղը գրեց պատահական թվանշաններ: Գտնք հավանականությունը, որ նա ճիշտ համար հավաքեց:

223. 4 միանման քարտերից յուրաքանչյուրի վրա գրված է **ա, բ, բ, և** տառերից մեկը: Քարտերը շրջելուց ու լավ խառնելուց հետո դրանք դասավորել են մեկ շարքով: Գտնք հավանականությունը, որ դրանք հետ շրջելուց հետո գրված կլինի «բարև» բառը:

224. Արկղի 10 դետալներից 7-ը բավարարում են որակի չափանիշներին: Գտնք հավանականությունը, որ արկղից պատահական հանված 6 դետալն էլ որակյալ են:

225. 600 աշակերտ ունեցող դպրոցում 360-ը աղջիկ են: Կա 320 հոկեյիստ, որոնցից 200-ը աղջիկ են: Հոկեյիստների մեջ կա 28 դարպասապահ, որոնցից 19-ը աղջիկ են: Գտնք հավանականությունը, որ.

ա) պատահական ընտրված աշակերտն աղջիկ է,

բ) պատահական ընտրված աղջիկը հոկեյ է խաղում,

գ) պատահական ընտրված հոկեյիստը աղջիկ է,

դ) պատահական ընտրված աշակերտը դարպասապահ է,

ե) պատահական ընտրված դարպասապահը տղա է:

226. Խաղաքարերի տուփից հանում են պատահական խաղաքար: Որո՞նք են $A + B$ և AB պատահույթները, եթե A պատահույթը հանված խաղաքարի խաչ լինելն է, իսկ B պատահույթը՝ հանված խաղաքարի տուգ լինելը:
227. Երկու անգամ կրակում են թիրախի վրա: Որո՞նք են $A + B$ և AB պատահույթները, եթե A պատահույթը առաջին կրակոցով թիրախը խոցելն է, իսկ B պատահույթը՝ երկրորդ կրակոցով թիրախը խոցելը:
228. A պատահույթը զառ գցելիս զույգ թիվ բացվելն է ($\{2, 4, 6\}$), իսկ B պատահույթը՝ 6 բացվելը, C պատահույթը՝ պարզ թիվ բացվելը ($\{2, 3, 5\}$): Որո՞նք են ա) $A + B$, բ) $A + C$, գ) $B + C$ պատահույթները:
229. A պատահույթը զառ գցելիս զույգ թիվ բացվելն է ($\{2, 4, 6\}$), իսկ B պատահույթը՝ 6 բացվելը, C պատահույթը՝ պարզ թիվ բացվելը ($\{2, 3, 5\}$): Որո՞նք են ա) AB , բ) AC , գ) BC պատահույթները:
230. Գտնեք $P(A \cup B)$, եթե A և B պատահույթները անհամատեղելի են և $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$:
231. Կարո՞ղ են $0,4$ և $0,7$ հավանականություններով երկու պատահույթներ լինեն անհամատեղելի: Պատասխանը հիմնավորենք:
232. Արկղում կա 2 սպիտակ, 3 կանաչ և 5 դեղին գնդակ: Արկղից հանում են պատահական գնդակ: Գտնեք հավանականությունը, որ հանված գնդակը կլինի կամ կանաչ, կամ դեղին: Խնդիրը լուծեք երկու եղանակով:
233. Արկղում կա 5 սպիտակ, 7 կարմիր և 8 դեղին գնդակ: Արկղից հանում են պատահական գնդակ: Գտնեք հավանականությունը, որ հանված գնդակը կլինի.
ա) կամ սպիտակ, կամ դեղին,
բ) սպիտակ չի լինի:
Խնդիրը լուծեք երկու եղանակով:
234. Բերե՛ք ա) անկախ պատահույթների, բ) կախյալ պատահույթների օրինակներ:
235. Մետաղադրամը նետում են երեք անգամ: Գտնեք երեք անգամ էլ «Զինանշան» բացվելու հավանականությունը:
236. Նետում են երեք զառ: Գտնեք երեք անգամ էլ 5 բացվելու հավանականությունը:
237. Հրաձիգի՝ մեկ կրակոցով թիրախը խոցելու հավանականությունը

0,8 է: Գտե՛ք այդ հրաձիգի՝ երեք կրակոցներից յուրաքանչյուրում թիրախը խոցելու հավանականությունը:

- 238.** Առաջին տուփում կա 7 սպիտակ և 3 սև գնդակ, իսկ երկրորդում՝ 5 սպիտակ և 9 սև գնդակ: Առանց նայելու յուրաքանչյուր տուփից հանվում է մեկ գնդակ: Գտե՛ք հավանականությունը, որ.

ա) հանված երկու գնդակն էլ սպիտակ է,

բ) հանված երկու գնդակն էլ սև է:

- 239.** Գողությունից պաշտպանվելու համար տեղադրված է երկու անկախ սենսոր: Գողության փորձի դեպքում առաջին սենսորի ազդանշան տալու հավանականությունը 0,97 է, իսկ երկրորդի ազդանշան տալու հավանականությունը՝ 0,95: Գտե՛ք հավանականությունը, որ գողության փորձի դեպքում.

ա) երկու սենսորն էլ կակտիվանան,

բ) երկու սենսորն էլ չեն ակտիվանա:

- 240.** Խանութում կա նույն դետալի երեք խմբաքանակ: Առաջին խմբաքանակից պատահական վերցրած դետալի խոտան լինելու հավանականությունը 0,1 է, երկրորդից պատահական վերցրած դետալինը՝ 0,2, իսկ երրորդ խմբաքանակից պատահական վերցրած դետալինը՝ 0,3: Յուրաքանչյուր խմբաքանակից պատահականորեն հանվում է մեկ դետալ: Գտե՛ք հավանականությունը, որ.

ա) բոլոր երեք դետալներն էլ խոտան են,

բ) բոլոր երեք դետալներն էլ խոտան չեն:

- 241.** Արկղից, որում կա 12 դետալ, վարպետը հանում է պատահական երկու դետալ: Գտե՛ք հավանականությունը, որ երկու դետալներն էլ որակյալ են, եթե արկղի դետալներից 4-ը խոտան են:

- 242.** Աշակերտը գիտի քննության 18 հարցերից 14-ը: Գտե՛ք հավանականությունը, որ նա գիտի հարցատոմսի երեք հարցերն էլ:

- 243.** Տուփի մեջ կա 4 կարմիր, 3 դեղին և 2 սպիտակ գնդակ: Մեկ գնդակ հանվում է տուփից և այն չի վերադարձվում տուփ: Այնուհետև տուփից հանում են մեկ այլ գնդակ: Գտե՛ք հավանականությունը, որ առաջին գնդակը սպիտակ է, իսկ երկրորդը՝ դեղին:

- 244.** Պարկում կա 5 կարմիր և 4 դեղին ժետոն: Հանում են պատահականորեն մեկ ժետոն, գրանցում գույնը և առանց վերադարձնելու՝ հանում երկրորդ ժետոնը: Գտե՛ք հավանականությունը, որ.

ա) երկրորդ ժետոնը կարմիր է, եթե առաջինը դեղին է,

- բ) երկրորդ ժետոնը դեղին է, եթե առաջինը կարմիր է,
- գ) երկուսն էլ դեղին են,
- դ) հանել են մեկ կարմիր և մեկ դեղին ժետոն:

245. Հավանականությունը, որ սպառողը հեռուստացույցով կտեսնի որոշակի ապրանքի գովազդ, 0,08 է: Հավանականությունը, որ սպառողն այդ գովազդը դիտելուց հետո կգնի գովազդվող ապրանքը, 0,5 է, իսկ առանց գովազդը դիտելու գնելու հավանականությունը 0,04 է: Գտե՛ք հավանականությունը, որ սպառողը կգնի այդ ապրանքը:

246. Հավանականությունը, որ հղի կինն աղջիկ կունենա 0,49 է: Գծե՛ք ծառածն դիագրամ, որը ցույց կտա նրա երկու երեխա (ոչ երկվորյակ) ունենալու հնարավոր տարբերակները: Դիագրամից օգտվելով՝ գտե՛ք հետևյալ հավանականությունները.

- ա) որ երկու երեխան էլ աղջիկ են,
- բ) որ երկու երեխան էլ նույն սեռի են,
- գ) որ երեխաները տարբեր սեռերի են:

247. Դավիթը որոշեց ավելացնել իր ակվարիումի ձկները՝ գնելով 2 ձուկ: Խանութում կար Դավիթի ուզած տեսակի 15 ձուկ, որից 7-ը արու էին, բայց բոլորը՝ նույն տեսքի: Գծե՛ք ծառածն դիագրամ: Հաշվի առե՛ք, որ առաջին ընտրությունն ազդում է երկրորդ ընտրության հավանականությունների վրա: Գտե՛ք հավանականությունը, որ Դավիթի գնած ձկները.

- ա) նույն սեռի էին,
- բ) երկուսն էլ էգ էին:

248. Եթե առավոտյան Վահանի մեքենան գործի է ընկնում, ապա նա աշխատանքի գնում է մեքենայով: Մեքենայի գործի ընկնելու հավանականությունը 0,95 է, եթե այն գիշերը եղել է ավտոտնակում, հակառակ դեպքում այդ հավանականությունը 0,75 է: Մոռացկոտության պատճառով Վահանի մեքենան գիշերն ավտոտնակում լինում է 90% դեպքերում: Գծե՛ք ծառածն դիագրամ:

- ա) Գտե՛ք հավանականությունը, որ պատահական օր Վահանի մեքենան ավտոտնակում եղած չի լինի, բայց նա աշխատանքի կգնա մեքենայով:
- բ) Գտե՛ք հավանականությունը, որ պատահական օր Վահանի մեքենան ավտոտնակում եղած կլինի, և նա աշխատանքի կգնա մեքենայով:

գ) Գտե՛ք հավանականությունը, որ պատահական օր Վահանն աշխատանքի կգնա մեքենայով:

249. Ինչ-որ քաղաքում տարվա ընթացքում որևէ տուն թալանելու հավանականությունը 0,07 է, իսկ մեքենան գողանալու հավանականությունը՝ 0,12: Գծե՛ք ծառաձև դիագրամ: Ենթադրելով, որ այդ երկու պատահարները միմյանցից անկախ են՝ գտե՛ք հավանականությունը, որ մեկ մեքենա ունեցող պատահական ընտրված ընտանիքն այդ տարվա ընթացքում.

ա) զոհ կդառնա երկու հանցագործություններին էլ,

բ) կտուժի այդ հանցագործություններից միայն մեկից,

գ) կտուժի այդ հանցագործություններից առնվազն մեկից,

դ) հանցագործություններից ոչ մեկից չի տուժի:

Ինչպե՞ս կարող եք գտնել գ), դ) հարցերի պատասխանները՝ օգտվելով միայն նախորդ հարցերի պատասխաններից:

250. Տարածքը հսկվում է անվտանգության երկու անկախ սարքերով: Եթե տեղի է ունենում ներխուժում, սարքերից ամեն մեկը, մյուսից անկախ, տագնապի ազդանշան է տալիս: Առաջին սարքի՝ մեկ տարվա ընթացքում փչանալու հավանականությունը 0,1 է, իսկ երկրորդինը՝ 0,2: Գծե՛ք ծառաձև դիագրամ: Գտե՛ք հավանականությունը, որ մեկ տարվա ընթացքում.

ա) հսկողության երկու սարքերն էլ կփչանան,

բ) հսկողության երկու սարքերն էլ աշխատունակ կմնան,

գ) հսկողության առնվազն մեկ սարք աշխատունակ կմնան:

251. Թեյարանի հաճախորդների 70%-ը պատվիրում է կաթով թեյ, 20%-ը՝ կիտրոնով թեյ, և 10%-ը՝ թեյ առանց դրանցից որևէ մեկի:

Շաքար է օգտագործում կաթով թեյ պատվիրողների $\frac{3}{5}$ -ը, կիտրոնով թեյ պատվիրողների՝ $\frac{1}{4}$ -ը, առանց կաթի կամ կիտրոնի թեյ

պատվիրողների՝ $\frac{11}{20}$ -ը: Գծե՛ք ծառաձև դիագրամ: Գտե՛ք հավանա-

կանությունը, որ պատահական ընտրված հաճախորդը.

ա) շաքար է օգտագործում,

բ) օգտագործում է և՛ շաքար, և՛ կաթ,

գ) կաթ կամ շաքար է օգտագործում:

252. Տնտեսական աճի ժամանակ հավանականությունը, որ բանկի հաճախորդը վարկը չի վերադարձնի, 0,04 է, իսկ տնտեսական ճգնաժամի ժամանակ՝ 0,2: Տնտեսական ճգնաժամ սկսվելու հավանականությունը գնահատվում է 0,45: Գծեք ծառածև դիագրամ: Գտեք հավանականությունը, որ հաճախորդը վարկը չի վերադարձնի:
253. Եթե թոռնիկներն այցելել են պապիկին, նրա բարձր տրամադրություն ունենալու հավանականությունը 0,6 է, իսկ եթե չեն այցելել՝ 0,2: Որևէ օր պապիկին թոռնիկների այցելելու հավանականությունը 0,3 է: Գծեք ծառածև դիագրամ: Գտեք պապիկի բարձր տրամադրություն ունենալու հավանականությունը:
254. Քննության կարգը հետևյալն է. պատասխանված տոմսը քննողը մի կողմ է դնում: Ուսանողը սովորել է 30 տոմսից 20-ը: Ուսանողի սովորած տոմսերը անվանենք «երջանիկ»: «Երջանիկ» տոմս ընկնելու հավանականությունը առաջինը, թե՛ երկրորդը քննասենյակ մտնելու դեպքում է ավելի մեծ:
255. Մարիի՝ որևէ օր մարգասրահ գնալու հավանականությունը 0,2 է: Մարգասրահ գնալու օրը Արփիին հանդիպելու հավանականությունը 0,75 է: Մարգասրահ չգնալու օրերին Արփիին հանդիպելու հավանականությունը x է:
- ա) Գտեք x -ը, եթե ցանկացած օր Արփիին հանդիպելու հավանականությունը 0,5 է:
 - բ) Գտեք հավանականությունը, որ Մարին մարգասրահ է գնացել, եթե հայտնի է, որ նա հանդիպել է Արփիին:
256. Խանութը վաճառում է նույն մեքենայի՝ երկու տարբեր գործարաններում արտադրված լուսարձակներ: Առաջին գործարանը արտադրում է այդ լուսարձակների 45%-ը, երկրորդը՝ 55%-ը: Առաջին գործարանի արտադրանքի 3%-ն է խոտան, իսկ երկրորդի՝ 1%-ը: Գտեք հավանականությունը, որ խանութում պատահական գնված լուսարձակը կլինի խոտան:
257. Ըստ վիճակագրության՝ իրենց առաջին բիզնեսը ստեղծողների 10%-ն է հաջողության հասնում: Երկրորդ բիզնեսը ստեղծողների 90%-ն է հաջողության հասնում: Նրանցից, ում առաջին բիզնեսը ձախողվել է, նոր բիզնես է ստեղծում 8%-ը: Գտեք առաջին կամ երկրորդ փորձից հաջողակ բիզնես ստեղծելու հավանականությունը:
258. «Արծիվ» և «Բազե» թիմերն ամեն տարվա վերջին մրցում են միմ-

յանց հետ: Անցյալ արդյունքներից երևում է, որ այն տարիներին, երբ հաղթում է «Արծիվը», հաջորդ տարի նրա հաղթելու հավանականությունը 0,7 է, իսկ այն տարիներին, երբ հաղթում է «Բազեն», հաջորդ տարի նրա հաղթելու հավանականությունը 0,5 է: Հանդիպման արդյունքը երբեք ոչ-ոքի չի լինում: Հայտնի է, որ 2025 թվականին հաղթել է «Արծիվ» թիմը: Գծեք ծառածն դիագրամ մինչև 2028 թվականը (3 տարվա համար):

ա) Գտեք հավանականությունը, որ «Բազեն» կհաղթի և՛ 2026, և՛ 2027, և՛ 2028 թվականներին:

բ) Գտեք հավանականությունը, որ 2028 թվականին կհաղթի «Արծիվը»:

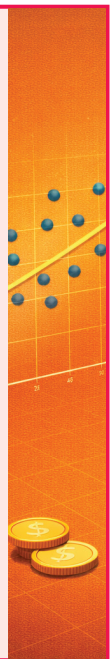
259. Անին մեքենայով աշխատանքի գնալիս անցնում է երեք լուսացույցի մոտով: Առաջին, երկրորդ և երրորդ լուսացույցների մոտ ստիպված կանգնելու անկախ հավանականությունները համապատասխանաբար 0,4, 0,8 և 0,3 են: Գծեք ծառածն դիագրամ:

ա) Գտեք հավանականությունը, որ նա առաջին երկու լուսացույցների մոտ ստիպված կկանգնի, բայց երրորդը կանցնի առանց կանգառի:

բ) Գտեք հավանականությունը, որ նա ստիպված կկանգնի միայն երկրորդ լուսացույցի մոտ:

Ուսումնասիրելով այս գլուխը՝

- Վերհիշեցիք վիճակագրական տվյալների միջին, մոդ, մեդիան հասկացությունները և ծանոթացաք կետագրամներին:
- Սովորեցիք կետագրամով ներկայացնել վիճակագրական տվյալները, գտնել դրանց միջինը, մոդը, մեդիանը:
- Ծանոթացաք ցրվածության դիագրամներին, սովորեցիք լավագույն նկարագրող ուղիղ կառուցելու եղանակները:
- Կառուցեցիք լավագույն նկարագրող ուղիղ և դրա միջոցով արեցիք կանխատեսումներ:
- Վերհիշեցիք հավանականությունների տեսության որոշ հասկացություններ, ծանոթացաք նոր հասկացություններին:
- Սովորեցիք անհամատեղելի պատահույթների գումարի, անկախ և կախյալ պատահույթների արտադրյալի հավանականությունների մասին թեորեմները, կիրառեցիք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Ծանոթացաք հավանականային ծառածն դիագրամներին, կիրառեցիք դրանք խնդիրներ լուծելիս:



ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ, ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ, ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

ԳԼՈՒԽ I

1. $\eta)$ 1, $\mathfrak{h}) \frac{1}{3}$, $\mathfrak{q}) -\frac{1}{2}$, $\mathfrak{t}) 17$, $\mathfrak{p}) \frac{5}{7}$:
2. $\mathfrak{w}) 6$, $\mathfrak{p}) \frac{2}{5}$, $\mathfrak{q}) \frac{7}{2}$, $\eta)$ $-\frac{41}{7}$, $\mathfrak{h}) 7,5$, $\mathfrak{q}) -2$, $\mathfrak{t}) -\frac{22}{9}$, $\mathfrak{p}) \frac{7}{6}$:
3. $\mathfrak{w}) \emptyset$, $\mathfrak{p}) \mathbb{R}$, $\mathfrak{q}) \emptyset$, $\eta)$ $\emptyset$, $\mathfrak{h}) \mathbb{R}$, $\mathfrak{q}) \mathbb{R}$, $\mathfrak{t}) \emptyset$, $\mathfrak{p}) \emptyset$:
4. 8:
5. 35, 36, 37:
6. 52, 54:
7. 31 ս:
8. 6500 դրամ, 13000 դրամ:
9. 45 000 000 դրամ:
10. 25 գ:
11. 46434:
12. 600 000 դրամ:
13. 100 կմ/ժ:
14. 33 կմ/ժ:
15. $\mathfrak{w}) (5; +\infty)$, $\mathfrak{p}) (-4; +\infty)$, $\mathfrak{q}) (-\infty; 8]$, $\eta)$ $(-\infty; 1]$, $\mathfrak{h}) (2; +\infty)$, $\mathfrak{q}) \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$,
 $\mathfrak{t}) (-\infty; -6]$, $\mathfrak{p}) \left[\frac{6}{7}; +\infty\right)$:
16. $\mathfrak{w}) (6; +\infty)$, $\mathfrak{p}) \left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$, $\mathfrak{q}) (12, 5; +\infty)$, $\eta)$ $\left[-\frac{14}{3}; +\infty\right)$, $\mathfrak{h}) \left(\frac{8}{7}; +\infty\right)$,
 $\mathfrak{q}) \left(-\infty; -\frac{1}{12}\right)$, $\mathfrak{t}) \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$, $\mathfrak{p}) \left[\frac{7}{6}; +\infty\right)$:

17. $\mathbf{u}) \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right), \mathbf{p}) (-2; +\infty), \mathbf{q}) [3; +\infty), \mathbf{\eta}) \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right), \mathbf{\xi}) \left[-\frac{7}{3}; +\infty\right),$

$\mathbf{q}) (-6, 5; +\infty), \mathbf{\xi}) \mathbf{R}, \mathbf{p}) \emptyset:$

18. $\mathbf{u}) \mathbf{R}, \mathbf{p}) \emptyset, \mathbf{q}) \mathbf{R}, \mathbf{\eta}) \mathbf{R}, \mathbf{\xi}) \mathbf{R}, \mathbf{q}) \emptyset:$

19. $\mathbf{u}) \pm 2, \mathbf{p}) \pm 6, \mathbf{q}) \emptyset, \mathbf{\eta}) \pm \frac{7}{2}, \mathbf{\xi}) \pm 3, \mathbf{q}) \pm 6, \mathbf{\xi}) 0; -\frac{1}{2}, \mathbf{p}) 0; -2:$

20. $\mathbf{u}) \emptyset, \mathbf{p}) 0; 3, 5, \mathbf{q}) 0; -3, \mathbf{\eta}) 0; -3, \mathbf{\xi}) \emptyset, \mathbf{q}) \emptyset, \mathbf{\xi}) \emptyset, \mathbf{p}) \emptyset:$

21. $\mathbf{u}) 2, \mathbf{p}) -3, \mathbf{q}) 5, \mathbf{\eta}) 1, 5, \mathbf{\xi}) -7; 2, \mathbf{q}) 1; \frac{4}{3}, \mathbf{\xi}) 2; 2, 5, \mathbf{p}) -\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}:$

22. $\mathbf{u}) \emptyset, \mathbf{p}) -3 \pm \sqrt{3}, \mathbf{q}) \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}, \mathbf{\eta}) 1 \pm \sqrt{5}, \mathbf{\xi}) \frac{-3 \pm 2\sqrt{3}}{3}, \mathbf{q}) 7:$

23. $-15; -12$ կամ $12; 15:$

24. 5 և $13:$

25. $16, 17, 18:$

26. $10:$

27. $8:$

28. 8 սմ, 15 սմ:

29. 15 սմ:

30. 170 դրամ:

31. $460:$

32. $\mathbf{u}) (-3; 3), \mathbf{p}) [-4; 4], \mathbf{q}) \emptyset, \mathbf{\eta}) [-2, 5; 2, 5], \mathbf{\xi}) (-\infty; -2) \cup (2; +\infty),$
 $\mathbf{q}) (-\infty; -6] \cup [6; +\infty), \mathbf{\xi}) \mathbf{R}, \mathbf{p}) \left(-\infty; -\sqrt{7}\right] \cup \left[\sqrt{7}; +\infty\right):$

33. $\mathbf{u}) (-\infty; -9] \cup [0; +\infty), \mathbf{p}) (0; 3, 5), \mathbf{q}) (-\infty; -3) \cup (0; +\infty), \mathbf{\eta}) [0; 3],$
 $\mathbf{\xi}) (2; 3), \mathbf{q}) (-\infty; -4] \cup [9; +\infty), \mathbf{\xi}) \left(-\infty; 3 - \sqrt{2}\right) \cup \left[3 + \sqrt{2}; +\infty\right),$
 $\mathbf{p}) [4; 7]:$

34. $\mathbf{u}) \mathbf{R}, \mathbf{p}) \mathbf{R}, \mathbf{q}) \emptyset, \mathbf{\eta}) 1, 5, \mathbf{\xi}) \left(-\infty; \frac{-5 - \sqrt{33}}{2}\right) \cup \left(\frac{-5 + \sqrt{33}}{2}; +\infty\right),$
 $\mathbf{q}) \emptyset, \mathbf{\xi}) \emptyset, \mathbf{p}) \mathbf{R}:$

35. $\mathbf{u}) -1, 5; 2, \mathbf{p}) -12, 5, \mathbf{q}) 3; 4, \mathbf{\eta}) 3, \mathbf{\xi}) -2, \mathbf{q}) 3, \mathbf{\xi}) 3, \mathbf{p}) 5:$

36. $\mathbf{u}) -0, 5; 1, \mathbf{p}) \frac{2}{11}, \mathbf{q}) -\frac{1}{5}, \mathbf{\eta}) 5, 5, \mathbf{\xi}) 10, \mathbf{q}) -3; 7, \mathbf{\xi}) -9; 1, \mathbf{p}) 4:$

37. $\frac{2}{5}$:
38. 59 կմ/ժ, 89 կմ/ժ:
39. 2,5 կմ/ժ:
40. 10 ժ, 15 ժ:
41. 20 օր, 30 օր:
42. 10 ՄԲ/վրկ, 8 ՄԲ/վրկ:
43. 9 ՄԲ/վրկ, 6 ՄԲ/վրկ:
44. ա) $(-\infty; -2) \cup (1; 3)$, բ) $(-2; -1) \cup (1; +\infty)$, գ) $[-2; -1] \cup [4; +\infty)$,
 դ) $(-\infty; -2] \cup [-1; 3]$, ե) $(-3; 1) \cup (2; +\infty)$, զ) $(-\infty; -2) \cup (-1; 3)$,
 է) $(-2; 2] \cup [5; +\infty]$, ը) $(-\infty; -2] \cup (1; 3]$:
45. ա) $(-2; -0,5] \cup [5; +\infty)$, բ) $(-\infty; -6) \cup [-3; 5]$,
 գ) $(-3; -2) \cup (0; 1) \cup (7; +\infty)$, դ) $(-\infty; -4) \cup (-3; -2) \cup (1; 7)$,
 ե) $(-\infty; -3) \cup (6; +\infty)$, զ) $(-2; 1)$, է) $(-\infty; 1) \cup [2; +\infty)$, ը) $(-3; 2)$:
46. ա) $(-\infty; -5) \cup [2; +\infty)$, բ) $(-\infty; 1) \cup [8; +\infty)$, գ) $(-9; 2)$,
 դ) $[-28; -5)$, ե) $(-\infty; -3) \cup (15; +\infty)$, զ) $(-5; 1]$:
47. ա) ± 2 , բ) ± 7 , գ) $\pm 3, 2$, դ) 0 , ե) $\emptyset$, զ) $\emptyset$, է) $\pm \frac{1}{3}$, ը) $\emptyset$:
48. ա) $-2; 3$, բ) $-\frac{4}{3}; 2$, գ) $\emptyset$, դ) $-\frac{7}{3}; 1$, ե) $\pm 3; \pm \sqrt{3}$,
 զ) $3; 3 \pm \sqrt{2}$, է) $2; 3; \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$, ը) $2; 2 \pm \sqrt{2}$:
49. ա) ± 1 , բ) ± 6 , գ) ± 5 , դ) ± 7 , ե) ± 3 , զ) $-2; 0; 4; 6$,
 է) $4; 6$, ը) $-0,5; 2,5; 5,5$:
50. ա) $0,25; 1,5$, բ) 0 , գ) ± 1 , դ) -1 , ե) $1,1$, զ) $\frac{5}{8}$:
51. ա) $(-3; 3)$, բ) $[-5; 5]$, գ) $(-2,3; 2,3)$, դ) $[-6; 6]$, ե) $\emptyset$,
 զ) $\emptyset$, է) 0 , ը) $\emptyset$:
52. ա) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$, բ) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$, գ) $(-\infty; -7) \cup (7; +\infty)$,
 դ) $(-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$, ե) $\mathbb{R}$, զ) $\mathbb{R}$, է) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, ը) $\mathbb{R}$:
53. ա) $(-1; 2)$, բ) $[3; 6]$, գ) $\left(-\frac{2}{5}; \frac{14}{15}\right)$, դ) $\left[-\frac{7}{3}; 1\right]$,

- $\mathfrak{h}) (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right), \mathfrak{q}) (-\infty; -2] \cup \left[\frac{9}{4}; +\infty\right),$
 $\mathfrak{t}) (-\infty; 2] \cup [5; +\infty), \mathfrak{p}) (-\infty; -0,5) \cup (2; +\infty):$
- 54.** $\mathfrak{w}) (-2; 10), \mathfrak{p}) \left[0; \frac{2}{3}\right], \mathfrak{q}) \left(-\frac{8}{5}; 2\right), \mathfrak{h}) (-\infty; -0,5) \cup (3; +\infty),$
 $\mathfrak{h}) \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup [2; +\infty), \mathfrak{q}) \left(-\infty; \frac{6}{5}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right):$
- 55.** $\mathfrak{w}) 4, \mathfrak{p}) 36, \mathfrak{q}) 1,44, \mathfrak{h}) \emptyset, \mathfrak{q}) -4,5, \mathfrak{t}) -4, \mathfrak{p}) 4,5:$
- 56.** $\mathfrak{w}) \emptyset, \mathfrak{p}) 1; 4, \mathfrak{q}) -2; 7, \mathfrak{h}) \frac{5 \pm \sqrt{57}}{4}, \mathfrak{t}) \frac{3}{4}, \mathfrak{q}) 1, \mathfrak{t}) \emptyset, \mathfrak{p}) -0,5:$
- 57.** $\mathfrak{w}) 11, \mathfrak{p}) 0, \mathfrak{q}) 3, \mathfrak{h}) 3, \mathfrak{t}) 0; 0,5, \mathfrak{q}) -1:$
- 58.** $\mathfrak{w}) -1, \mathfrak{p}) -2, \mathfrak{q}) 3, \mathfrak{h}) 5, \mathfrak{t}) -3; 5, \mathfrak{q}) 0,4; 4, \mathfrak{t}) -1; 6, \mathfrak{p}) 4; 5:$
- 59.** $\mathfrak{w}) (9; +\infty), \mathfrak{p}) [25; +\infty), \mathfrak{q}) [0; +\infty), \mathfrak{h}) [0; +\infty),$
 $\mathfrak{h}) (4; +\infty), \mathfrak{q}) \left(-\infty; \frac{4}{3}\right], \mathfrak{t}) (-\infty; 3], \mathfrak{p}) (-\infty; -1]:$
- 60.** $\mathfrak{w}) [0; 16], \mathfrak{p}) [0; 25), \mathfrak{q}) \emptyset, \mathfrak{h}) 0,$
 $\mathfrak{h}) [-0,5; 12), \mathfrak{q}) \left[\frac{9}{4}; \frac{29}{2}\right], \mathfrak{t}) \emptyset, \mathfrak{p}) [0,4; 2,9]:$
- 61.** $\mathfrak{w}) (1; +\infty), \mathfrak{p}) \left[\frac{1}{8}; \frac{25}{4}\right], \mathfrak{q}) (-\infty; -8), \mathfrak{h}) \left[-\frac{34}{3}; 5\right],$
 $\mathfrak{h}) \left[-\frac{1}{3}; 1\right], \mathfrak{q}) [1; 2], \mathfrak{t}) \left[-\frac{1}{7}; \frac{3}{4}\right], \mathfrak{p}) (1; 2]:$
- 62.** $\mathfrak{w}) [-0,5; +\infty), \mathfrak{p}) [-1; +\infty), \mathfrak{q}) \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right],$
 $\mathfrak{h}) (-2; +\infty), \mathfrak{t}) (-4; 2), \mathfrak{q}) (3; +\infty):$

ԳԼՈՒԽ II

- 63.** **ա)** $D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = (0; +\infty)$,
բ) $D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = (0; +\infty)$:
- 64.** **ա)** $(0; +\infty)$, **դ)** $(-\infty; 0)$:
- 65.** **ա)** 1) $(1; +\infty)$, 2) $(0; 1)$, **բ)** 1) $(-2; +\infty)$, 2) $(-3; -2)$,
գ) 1) $(-1; +\infty)$, 2) $(-1, 5; -1)$, **դ)** 1) $(1; +\infty)$, 2) $(0; 1)$:
- 66.** **ա)** 7, **բ)** 14, **գ)** 27, **դ)** 51:
- 67.** **ա)** 3, **բ)** 2, **դ)** 3, **գ)** 2, **ը)** -2:
- 68.** **ա)** 2-ի և 3-ի, **բ)** 3-ի և 4-ի, **գ)** 1-ի և 2-ի, **դ)** 2-ի և 3-ի,
ե) 3-ի և 4-ի, **զ)** -3-ի և -2-ի:
- 69.** **ա)** $D(y) = (0; +\infty)$, $E(y) = \mathbb{R}$, **բ)** $D(y) = (-1; +\infty)$, $E(y) = \mathbb{R}$,
գ) $D(y) = (2; +\infty)$, $E(y) = \mathbb{R}$, **դ)** $D(y) = (3; +\infty)$, $E(y) = \mathbb{R}$:
- 70.** **ա)** $(1; +\infty)$, **բ)** $(0; 1)$, **գ)** $(1; +\infty)$, **դ)** $(0; 1)$:
- 71.** **ա)** +, **բ)** -, **գ)** +, **դ)** -, **ե)** +, **զ)** +:
- 72.** **ա)** $2^{-1,7}$, $2^{-0,21}$, $2^{0,8}$, $2^{1,3}$, **բ)** $0,6^{1,4}$, $0,6^{0,7}$, $0,6^{-0,16}$, $0,6^{-1,1}$,
գ) $\log_2 3$, $\log_2 5$, $\log_2 7$, $\log_2 9$, **դ)** $\log_{0,7} 5$, $\log_{0,7} 4$, $\log_{0,7} 2$, $\log_{0,7} 1$:
- 73.** 264800 դրամ:
- 74.** $\approx 9,786$ գ:
- 75.** $\approx 0,25\%$, ≈ 2848000 մարդ:
- 76.** ≈ 736000 :
- 77.** ≈ 148854 դրամ:
- 78.** **ա)** 2, **բ)** 2, **գ)** 2, **ե)** 2, **զ)** 3, **է)** 0, **ը)** -2:
- 79.** **ա)** 2, **բ)** 2, **գ)** 3, **դ)** 2, **ե)** 2, **զ)** 1, **է)** 2, **ը)** -2:
- 80.** **ա)** $\frac{1}{2}$, **բ)** 4, **գ)** $\frac{1}{4}$, **դ)** 4, **ե)** -2, **զ)** $\frac{1}{6}$, **է)** $-\frac{1}{2}$, **ը)** 4:
- 81.** **ա)** 7, **բ)** 11, **գ)** 17, **դ)** 91, **ե)** 20, **զ)** 36, **է)** $\frac{4}{5}$, **ը)** $\frac{9}{4}$:
- 82.** **ա)** 4, **բ)** 3, **գ)** 6, **դ)** 4, **ե)** 1, **զ)** 3, **է)** 12, **ը)** 1,5:
- 83.** **ա)** 8, **բ)** 11, **գ)** 11, **դ)** 9:

84. ա) 2, բ) 5, գ) 3, դ) 2, ե) 0, զ) $\log_3 5$, է) $\emptyset$, լ) $\log_4 7$:
85. ա) 2,5, բ) 1, գ) 4, դ) -1, ե) -1; 6, զ) -1,5, է) 1, լ) 4:
86. ա) 1, բ) 1, գ) 2, դ) 0, ե) 3, զ) 1, է) 0, լ) -1:
87. ա) 1; 3, բ) 2, գ) 1, դ) 2, ե) 1, զ) $\log_5 2$:
88. ≈ 13 :
89. ≈ 34 :
90. 9:
91. ա) $(3; +\infty)$, բ) $(-\infty; 4]$, գ) $[3; +\infty)$, դ) $(-\infty; 2)$,
է) $(0; +\infty)$, զ) $(2; +\infty)$, է) $(-\infty; 2]$, լ) $(1,5; +\infty)$:
92. ա) $(-\infty; \log_4 5)$, բ) $\mathbb{R}$, գ) $\emptyset$, դ) $\emptyset$,
է) $\mathbb{R}$, զ) $(-\infty; 1)$, է) $[1; +\infty)$, լ) $(-\infty; -1,5]$:
93. ա) $(-\infty; 6)$, բ) $(-\infty; 1]$, գ) $(-\infty; 4)$, դ) $(-\infty; 1)$,
է) $[2; +\infty)$, զ) $(0; +\infty)$, է) $(-\infty; 3)$, լ) $[0; +\infty)$:
94. ա) $(-\infty; -1)$, բ) $(-\infty; 2]$, գ) $(-\infty; 2)$, դ) $(-\infty; 0] \cup [\log_5 3; +\infty)$:
95. ա) 9, բ) $\frac{1}{5}$, գ) 7, դ) 3,
է) -12,5, զ) 1; 4, է) $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$, լ) -1; $-\frac{1}{7}$:
96. ա) 1, բ) 5, գ) 11, դ) $2; \frac{-3 + \sqrt{41}}{2}$,
է) 4, զ) 2, է) 2, լ) $0; \frac{1}{2}$:
97. ա) $\frac{1}{5}; 25$, բ) 4; 8, գ) 10, դ) $-2; \frac{8}{9}$:
98. ա) $(8; +\infty)$, բ) $(9; +\infty)$, գ) $[5; +\infty)$, դ) $[\sqrt{7}; +\infty)$,
է) $(2; +\infty)$, զ) $[7; +\infty)$, է) $(8; +\infty)$, լ) $[2; +\infty)$:
99. ա) $(0; 9)$, բ) $(0; 1]$, գ) $(0; 8)$, դ) $(0; 64]$,
է) $\left(\frac{5}{7}; 2\right)$, զ) $\left[\frac{4}{5}; 2\right]$, է) $\left(-\frac{1}{7}; 1\right)$, լ) $\left(\frac{4}{3}; \frac{29}{3}\right]$:
100. ա) $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$, բ) $\left[\frac{1}{27}; +\infty\right)$, գ) $(5; +\infty)$, դ) $[1; +\infty)$,

$$\text{ե) } \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right), \text{ գ) } \left[\frac{3}{7}; \frac{13}{28}\right], \text{ է) } \left(-\frac{1}{4}; 0\right), \text{ ը) } \left[\frac{4}{3}; 3\right]:$$

101. ա) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right], \text{ բ) } (-3; 1), \text{ գ) } \left[-\frac{7}{2}; -\frac{6}{5}\right], \text{ դ) } \left(-\frac{2}{5}; -\frac{1}{4}\right):$

ԳԼՈՒԽ III

111. 5:

112. 19; 8:

113. 10:

114. 45; 15:

115. 3:

116. 5:

117. 8:

118. 7:

119. 200:

120. 10:

121. 25; 20:

122. 15:

123. 25:

124. 13; 5:

125. 23:

126. 7:

127. 10:

128. 700:

129. 20:

130. 10:

131. 50; 4:

132. 21:

133. 35:

134. 7:

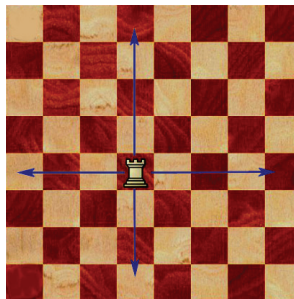
135. 13: **Լուծում:** 1-ից 20-ը ներառյալ բնական թվերից 10-ը գույգ են: Հետևաբար կա գույգ թիվ ընտրելու 10 տարբերակ: 1-ից 20-ը ներառյալ բնական թվերից 13-ից մեծ կենտ թվերը 3-ն են: Ուրեմն կա 13-ից մեծ կենտ թիվ ընտրելու 3 տարբերակ: Այսպիսով, ըստ կետ 20-ի գումարման կանոնի, գույգ կամ 13-ից մեծ կենտ թիվ կարելի է ընտրել $10 + 3 = 13$ եղանակով:

136. 6:

137. 60:

138. 17576000: **Լուծում:** Քանի որ կրկնությունը արգելված չէ, ապա առաջին 3 նիշերից յուրաքանչյուրը կարելի է ընտրել 26 եղանակով: Վերջին 3 նիշերից յուրաքանչյուրը կարելի է ընտրել 10 եղանակով: Հետևաբար, ըստ կետ 20-ի արտադրյալի կանոնի, կարելի է ստեղծել պահանջվող պայմաններին բավարարող $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17576000$ գաղտնաբառ:

139. 896: **Լուծում:** Առաջին նավակը տեղադրելու 64 հնարավորություն կա: Առաջինի ցանկացած դիրքի դեպքում հարվածի տակ գտնվող վանդակների թիվը կլինի 14 (նկ. 47): Երկրորդ նավակը կարող է գտնվել այդ 14 դիրքերից ցանկացածում: Հետևաբար, ըստ կետ 20-ի արտադրյալի կանոնի, խնդրի պայմանին բավարարող եղանակների քանակը կլինի $64 \cdot 14 = 896$:



Նկ. 47

140. ա) 56, գ) 132, դ) $n(n-1)$, ե) $n(n+1)$, զ) $n(n-1)(n-2)$:

141. ա) 360, բ) 840, գ) 90, դ) 2730, ե) 40, զ) 57:

142. 120:

143. 5040: **Լուծում:** Քանի որ թվանշանի դիրքը գաղտնաբառում կարևոր է և, ի տարբերություն թիվ գրելու, 0-ն կարող է լինել նաև առաջին տեղում, ապա հնարավոր տարբերակների քանակը հավասար է

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040:$$

144. 165765600:

145. 5040:

146. 2730:

147. 210:

148. 720:

149. 10897286400:

150. 19958400:

151. 360:

152. 55440:

153. 3024:

154. 80: **Լուծում:** Քանի որ եռանիշ թիվը պետք է լինի 300-ից մեծ, ապա առաջին թվանշանի համար կա 4 հնարավորություն՝ 3, 4, 5, 6: Այն գրելուց հետո երկրորդ թվանշանի համար կմնա 5 հնարավորություն: Առաջինն ու երկրորդը գրելուց հետո երրորդ թվանշանի համար կունենանք 4 հնարավորություն: Ուրեմն եռանիշ թվերի քանակը կլինի $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$:

155. 40:

156. 120:

157. 1560: **Լուծում:** Քանի որ հնգանիշ թիվը պետք է բաժանվի 5-ի, ապա վերջին թվանշանի համար կա 2 հնարավորություն՝ 0 և 5:

Եթե վերջին թվանշանը 0 է, ապա ձախից առաջին թվանշանի համար կունենանք 7 հնարավորություն: Դրանք գրելուց հետո ձախից երկրորդ թվանշանի համար կմնա 6 հնարավորություն: Ձախից երրորդի համար կմնա 5 հնարավորություն: Ձախից չորրորդ թվանշանի համար կմնա 4 հնարավորություն: Ուրեմն այդ թվանշաններով կարելի է կազմել 0-ով վերջացող $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ հնգանիշ թիվ:

7	6	5	4	
*	*	*	*	0

Եթե վերջին թվանշանը 5 է, ապա ձախից առաջին թվանշանի համար կունենանք 6 հնարավորություն (0-ն առաջին տեղում չի կարող լինել): Դրանք գրելուց հետո ձախից երկրորդ թվանշանի համար կմնա 6

հնարավորություն (0-ն արդեն թույլատրելի դարձավ): Ձախից երրորդի համար կմնա 5 հնարավորություն: Ձախից չորրորդ թվանշանի համար կմնա 4 հնարավորություն: Ուրեմն այդ թվանշաններով կարելի է կազմել 0-ով վերջացող $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$ հնգանիշ թիվ:

6	6	5	4	
*	*	*	*	5

Գումարելով երկու դեպքերի հնարավորությունների քանակը՝ կստանանք խնդրի պատասխանը. $840 + 720 = 1560$:

158. 840:

159. 2730:

160. 30: **Լուծում:** Օրինակ՝ A և B լեզուների համար պետք կլինի $A \rightarrow B$ և $B \rightarrow A$ բառարաններ: Հետևաբար պետք է գտնել 6-ից 2 կարգավորությունների քանակը. $A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 5 \cdot 6 = 30$:

161. 20030040160:

162. 720:

163. 120:

164. 5040:

165. 40320:

166. 24:

167. 18: **Լուծում:** Եթե թվանշանների մեջ 0 չլիներ, ապա 4 հատ թվանշանով, դրանք չկրկնելով, հնարավոր կլիներ կազմել $P_4 = 4!$ թիվ: Բայց այս դեպքում առաջին թվանշանը չի կարող լինել 0, հետևաբար դրա համար կա 3 հնարավորություն: Դա գրելուց հետո մնացած 3 թվանշաններից կարելի է կազմել $P_3 = 3! = 6$ թիվ: Ուրեմն հնարավոր քառանիշ թվերի քանակը կլինի $3 \cdot 6 = 18$:

168. 479001600:

169. 40320:

170. 288: **Լուծում:** Հնարավոր է երկու տարբերակ՝ առաջին 4 տեղերում նստում են 4 տղաները, վերջին 3 տեղերում՝ 3 աղջիկները: Տարբերակներից յուրաքանչյուրում 4 տղան 4 տեղում կարող է նստել $P_4 = 4! = 24$ տարբերակով, 3 աղջիկը 3 տեղում կարող է նստել $P_3 = 3! = 6$ տարբերակով: Ուրեմն որոնելի տարբերակների քանակը կլինի $2 \cdot 24 \cdot 6 = 288$:

171. 362880:

172. 5040:

173. 24:

174. 720: **Լուծում:** Քանի որ 6 բաղադրիչից պետք է օգտագործել 6 բաղադրիչ և բաղադրիչների ավելացման հերթականությունն ազդում է համի վրա, ապա տարբեր «բաղադրատոմսերի» քանակը հավասար է $P_6 = 6! = 720$:

175. 720:

176. 24:

177. 24:

178. 120:

179. 35:

180. 792:

181. 1365:

182. 24804:

183. 190:

184. 816:

185. 0:

186. 5400: **Լուծում:** 10 տղաներից 2 տղա կարելի է ընտրել $C_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!2!} = \frac{10!}{8!2} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ տարբերակով, 10 աղջիկներից 3 աղջիկ կարելի է ընտրել $C_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{10!}{7!6} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120$ տարբերակով: Քանի որ 2 տղա ընտրելու տարբերակներից յուրաքանչյուրը կարող է զուգակցվել 3 աղջիկ ընտրելու տարբերակներից ցանկացածի հետ, ապա որոնելի քանակը կլինի $45 \cdot 120 = 5400$:

187. 105:

188. 45:

189. 6:

190. 28: **Լուծում:** Քանի որ ընտրված 2 սոնատների հերթականությունը կարևոր չէ, ապա տարբեր հնարավորությունների քանակը հավասար է $C_8^2 = \frac{8!}{(8-2)!2!} = \frac{8!}{6!2} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$:

191. 120:

192. 28: Գագաթների 8 կետերից յուրաքանչյուր 2-ը միացնող հատվածը

կան այդ բազմանկյան կողմ է, կան անկյունագիծ: Բացի դրանից, գագաթների յուրաքանչյուր զույգ որոշում է մեկ հատված (այսինքն՝ գագաթների հերթականությունը կարևոր չէ): Ուրեմն որոնելի քանակը հավասար է $C_8^2 = \frac{8!}{(8-2)! \cdot 2!} = \frac{8!}{6! \cdot 2} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$:

193. 35:

194. 90: **Լուծում:** Գագաթների 15 կետերից յուրաքանչյուր 2-ը միացնող հատվածը կան այդ բազմանկյան կողմ է, կան անկյունագիծ: Բացի դրանից, գագաթների յուրաքանչյուր զույգ որոշում է մեկ հատված (այսինքն՝ գագաթների հերթականությունը կարևոր չէ): Ուրեմն այդ բազմանկյան կողմերի և անկյունագծերի քանակների գումարը հավասար է $C_{15}^2 = \frac{15!}{(15-2)! \cdot 2!} = \frac{15!}{13! \cdot 2} = \frac{14 \cdot 15}{2} = 105$: Բայց դրանցից 15-ը բազմանկյան կողմերն են: Հետևաբար անկյունագծերի քանակը հավասար է $105 - 15 = 90$:

195. 7:

196. 56: **Լուծում:** Քանի որ նույն շրջանագծի որևէ 3 կետեր մի ուղղի վրա չեն, ապա շրջանագծի 8 կետերից ընտրված ցանկացած 3 կետով որոշվում է մեկ եռանկյուն: Ուրեմն եռանկյունների հնարավոր քանակը $C_8^3 = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = \frac{8!}{5! \cdot 6} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 56$ է:

197. 45:

198. ա) 28, բ) 0, գ) 9,6, դ) 7,5:

199. ա) 10, բ) 26, գ) 3, դ) 10:

ԳԼՈՒԽ IV

200. ա) 5,625, բ) 42,5 %, գ) 10:

201. ա) 7,4, բ) 20 %, գ) 7; 7:

203. ա) 1, բ) 3, գ) 11:

205. ա) Այո, բ) ուժեղ, գ) դրական:

208. $y = \frac{3}{20}x + 1$:

210. Միտավորապես 35:

212. Միտավորապես 10 լ:

214. $y = 0,5x + 1,7$:

215. $y = 0,5x + 1,7$:

216. ա) $\frac{1}{9}$, բ) $\frac{7}{9}$, գ) $\frac{1}{36}$, դ) $\frac{2}{9}$:

Լուծում:

ա) 36 խաղաքարերից 4-ը թագուհի են: Հավասարահնարավոր ելքերի քանակը 36 է, իսկ թագուհի դուրս գալուն նպաստող ելքերի քանակը՝

4: Ուրեմն որոնելի հավանականությունը հավասար է $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$:

բ) 36 խաղաքարերի մեջ կա 28 խաղաքար, որոնք ոչ թագուհի են, ոչ արքա: Հավասարահնարավոր ելքերի քանակը 36 է, իսկ ոչ թագուհի, ոչ արքա դուրս գալուն նպաստող ելքերի քանակը՝ 28: Ուրեմն որոնելի հավանականությունը հավասար է $\frac{28}{36} = \frac{7}{9}$:

դ) 36 խաղաքարերի մեջ կա 8 խաղաքար, որոնք կան թագուհի են, կան արքա: Հավասարահնարավոր ելքերի քանակը 36 է, իսկ կան թագուհի, կան արքա դուրս գալուն նպաստող ելքերի քանակը՝ 8: Ուրեմն որոնելի հավանականությունը հավասար է $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$:

217. ա) $\frac{1}{25}$, բ) $\frac{3}{50}$:

218. ա) $\frac{1}{2}$, բ) $\frac{1}{3}$:

220. ա) $\frac{1}{4}$, բ) $\frac{3}{4}$:

221. 0,1: **Լուծում:** Թվանշանները 10-ն են, դրանցից միայն մեկն է համընկնելու մոռացված թվանշանի հետ: Հետևաբար հավասարահնարավոր ելքերի քանակը 10 է, իսկ ճիշտ համար հավաքելուն նպաստող ելքերի քանակը՝ 1: Ուրեմն որոնելի հավանականությունը հավասար է $\frac{1}{10}$:

222. $\frac{1}{90}$:

223. $\frac{1}{P_4} = \frac{1}{24}$: **Լուծում:** 4 քարտերը մեկ շարքով շարելու հնարավոր տարբերակների քանակը հավասար է $P_4 = 4! = 24$: Դրանցից միայն մեկի դեպքում կստացվի «բարև» բառը: Հետևաբար կա 24 հավա-

սարահնարավոր ելք, որոնցից 1-ն է նպաստավոր: Ուրեմն որոնելի հավանականությունը հավասար է $\frac{1}{24}$:

224. $\frac{C_7^6}{C_{10}^6} = \frac{1}{30}$:

225. ա) 0,6, բ) $\frac{5}{9}$, գ) 0,625, դ) $\frac{7}{150}$, ե) $\frac{9}{28}$:

Լուծում:

Խնդրի տվյալներից հետևում է, որ դպրոցի բոլոր տղաները 240 հոգի են, տղա հոկեյիստները՝ 120 հոգի, տղա դարպասապահները՝ 9 հոգի:

ա) Քանի որ աղջիկները 360 հոգի են, իսկ աշակերտները՝ 600 հոգի, ապա հավանականությունը, որ պատահական ընտրված աշակերտն աղջիկ է, կլինի $\frac{360}{600} = 0,6$:

բ) Քանի որ աղջիկները 360 հոգի են, իսկ հոկեյ խաղացող աղջիկները՝ 200 հոգի, ապա հավանականությունը, որ պատահական ընտրված աղջիկը հոկեյ է խաղում, կլինի $\frac{200}{360} = \frac{5}{9}$:

գ) Քանի որ հոկեյիստները 320 հոգի են, իսկ աղջիկ հոկեյիստները՝ 200 հոգի, ապա հավանականությունը, որ պատահական ընտրված հոկեյիստը աղջիկ է, կլինի $\frac{200}{320} = \frac{5}{8}$:

դ) Քանի որ աշակերտները 600 հոգի են, իսկ դարպասապահները՝ 28 հոգի, ապա հավանականությունը, որ պատահական ընտրված աշակերտը դարպասապահ է, կլինի $\frac{28}{600} = \frac{7}{150}$:

ե) Քանի որ դարպասապահները 28 հոգի են, իսկ տղա դարպասապահները՝ 9 հոգի, ապա հավանականությունը, որ պատահական ընտրված դարպասապահը տղա է, կլինի $\frac{9}{28}$:

227. **ա)** Առնվազն մեկ կրակոցով թիրախը խոցելը, **բ)** երկու կրակոցով էլ թիրախը խոցելը:

228. **ա)** Զույգ թիվ բացվելը ($\{2; 4; 6\}$), **բ)** 1-ից բացի՝ այլ թիվ բացվելը ($\{2; 3; 4; 5; 6\}$), **գ)** կամ 2, կամ 3, կամ 5, կամ 6 բացվելը ($\{2; 3; 5; 6\}$):

230. 0,3:

231. Ոչ:

232. $\frac{4}{5}$:

233. ա) $\frac{13}{20}$, բ) $\frac{3}{4}$:

Լուծում:

ա) Քանի որ արկղում կա 20 գնդակ, որոնցից 13-ը կան սպիտակ, կան դեղին են, ապա հավասարահնարավոր ելքերի քանակը 20 է, իսկ կան սպիտակ, կան դեղին գնդակ դուրս գալուն նպաստող ելքերի քանակը՝ 13: Ուրեմն որոնելի հավանականությունը հավասար է $\frac{13}{20}$:

Խնդիրը կարելի է լուծել այլ ձևով. քանի որ արկղում կա 20 գնդակ, որոնցից 5-ը սպիտակ են, ապա հավասարահնարավոր ելքերի քանակը 20 է, իսկ սպիտակ գնդակ դուրս գալուն նպաստող ելքերի քանակը՝ 5: Ուրեմն սպիտակ գնդակ դուրս գալու հավանականությունը հավասար է $\frac{5}{20}$:

Նույն ձևով կստանանք, որ դեղին գնդակ դուրս գալու հավանականությունը հավասար է $\frac{8}{20}$: Քանի որ սպիտակ գնդակ դուրս գալը և դեղին գնդակ դուրս գալը անհամատեղելի պատահույթներ են, ապա դրանց գումարի հավանականությունը հավասար է դրանց հավանականությունների գումարին՝ $\frac{5}{20} + \frac{8}{20} = \frac{13}{20}$:

235. $\frac{1}{8}$:

236. $\frac{1}{216}$:

237. 0,512:

238. ա) $\frac{1}{4}$, բ) $\frac{27}{140}$:

Լուծում:

ա) Քանի որ առաջին տուփում կա 10 գնդակ, որոնցից 7-ը սպիտակ են, ապա հավասարահնարավոր ելքերի քանակը 10 է, իսկ սպիտակ գնդակ դուրս գալուն նպաստող ելքերի քանակը՝ 7: Ուրեմն առաջին տուփից սպիտակ գնդակ դուրս գալու հավանականությունը հավասար է $\frac{7}{10}$: Քանի որ երկրորդ տուփում կա 14 գնդակ, որոնցից 5-ը սպիտակ են, ապա հավասարահնարավոր ելքերի քանակը 14 է, իսկ սպիտակ

գնդակ դուրս գալուն նպաստող ելքերի քանակը՝ 5: Ուրեմն երկրորդ տուփից սպիտակ գնդակ դուրս գալու հավանականությունը հավասար է $\frac{5}{14}$:

Ըստ կետ 26-ի անկախ պատահականությունների արտադրյալի հավանականության բանաձևի՝ երկու գնդակների սպիտակ լինելու հավանականությունը կլինի $\frac{7}{10} \cdot \frac{5}{14} = \frac{1}{4}$:

239. ա) 0,9215, **բ)** 0,0015:

240. ա) 0,006, **բ)** 0,504:

241. $\frac{14}{33}$: Լուծում: Քանի որ արկղում կա 12 գնդակ, որոնցից 8-ը որակյալ են, ապա առաջին դետալը հանելիս հավասարահնարավոր ելքերի քանակը 12 է, իսկ որակյալ դետալ դուրս գալուն նպաստող ելքերի քանակը՝ 8: Ուրեմն առաջին դետալի որակյալ լինելու հավանականությունը հավասար է $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$: Բայց եթե առաջինը դետալը որակյալ է, ապա արկղում մնացած կլինի 11 դետալ, որոնցից 7-ը որակյալ են: Հետևաբար երկրորդի որակյալ լինելու հավանականությունը կլինի $\frac{7}{11}$: Ըստ կետ 26-ի կախյալ պատահականությունների արտադրյալի հավանականության բանաձևի՝ երկու դետալների որակյալ լինելու հավանականությունը կլինի $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33}$:

242. $\frac{91}{204}$: Ցուցում: Կիրառելով 241 խնդրի լուծման քայլերը՝ կունենանք, որ որոնելի հավանականությունը հավասար է $\frac{14}{18} \cdot \frac{13}{17} \cdot \frac{12}{16} = \frac{91}{204}$:

243. $\frac{1}{12}$:

244. ա) $\frac{5}{8}$, **բ)** $\frac{1}{2}$, **գ)** $\frac{1}{6}$, **դ)** $\frac{5}{9}$:

Լուծում:

ա) Պետք է գտնել պայմանական հավանականությունը, որ երկրորդ ժետոնը կարմիր է, եթե առաջինը դեղին է: Եթե առաջինը դեղին է (հիշենք, որ հանված ժետոնը չի վերադարձվում պարկ), ապա պարկում կմնա 5 կարմիր և 3 դեղին ժետոն: Ուրեմն երկրորդ ժետոնի կարմիր

լինելու հավանականությունը կլինի $\frac{5}{5+3} = \frac{5}{8}$:

բ) Պետք է գտնել պայմանական հավանականությունը, որ երկրորդ ժետոնը դեղին է, եթե առաջինը կարմիր է: Եթե առաջինը կարմիր է (հիշենք, որ հանված ժետոնը չի վերադարձվում պարկ), ապա պարկում կմնա 4 կարմիր և 4 դեղին ժետոն: Ուրեմն երկրորդ ժետոնի դեղին

լինելու հավանականությունը կլինի $\frac{4}{4+4} = \frac{1}{2}$:

գ) Քանի որ պարկի 9 ժետոնից 4-ը դեղին են, ապա առաջինի դեղին լինելու հավանականությունը կլինի $\frac{4}{9}$: Բայց եթե առաջինը դեղին է,

ապա պարկում մնացել է 5 կարմիր և 3 դեղին ժետոն: Հետևաբար երկրորդի դեղին լինելու հավանականությունը կլինի $\frac{3}{8}$: Ըստ կետ

26-ի կախյալ պատահույթների արտադրյալի հավանականության բանաձևի՝ երկու ժետոնների դեղին լինելու հավանականությունը կլինի $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$:

դ) Հանված ժետոններից մեկը կարմիր, մյուսը դեղին կարող են լինել, եթե 1) առաջինը լինի կարմիր, երկրորդը դեղին, կամ 2) առաջինը լինի դեղին, երկրորդը կարմիր: Հաշվելով 1) դեպքի և 2) դեպքի հավանականությունները այնպես, ինչպես դա արվեց գ) կետում, կհամոզվենք, որ 1) դեպքի հավանականությունը հավասար է $\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$, իսկ 2)

դեպքի հավանականությունը հավասար է $\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{18}$: Քանի որ 1) և 2) դեպքերը անհամատեղելի պատահույթներ են, ապա դրանց գումարի հավանականությունը հավասար է դրանց հավանականությունների

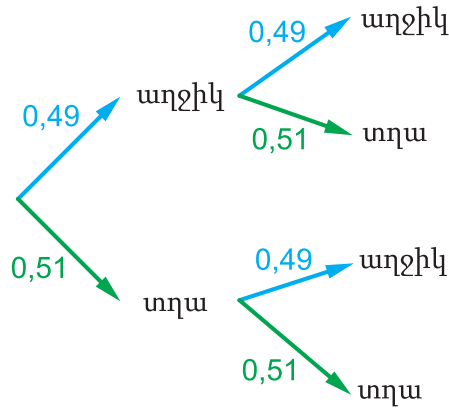
գումարին՝ $\frac{5}{18} + \frac{5}{18} = \frac{5}{9}$:

245. 0,0768:

246. ա) 0,2401, **բ)** 0,5002, **գ)** 0,4998:

Լուծում:

Նկար 48-ում ներկայացված է խնդրի ծառաձև դիագրամը՝ համապատասխան նշումներով:



Նկ. 48

ա) Հավանականությունը, որ երկու երեխան էլ աղջիկ են, գտնելու համար պետք է բազմապատկել և՛ առաջինը, և՛ երկրորդը աղջիկ ծնվելու ճյուղերի հավանականությունները (դրանք ամենավերևի իրար շարունակող կապույտ սլաքներով են ներկայացված): Ուրեմն որոնելի հավանականությունը հավասար է $0,49 \cdot 0,49 = 0,2401$:

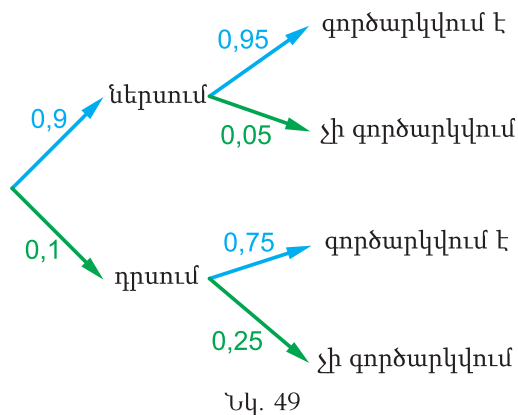
բ) Հավանականությունը, որ երկու երեխան էլ նույն սեռի են, գտնելու համար պետք է բազմապատկել և՛ առաջինը, և՛ երկրորդը աղջիկ ծնվելու ճյուղերի հավանականությունները (դրանք ամենավերևի իրար շարունակող կապույտ սլաքներով են ներկայացված), ապա պետք է բազմապատկել և՛ առաջինը, և՛ երկրորդը տղա ծնվելու ճյուղերի հավանականությունները (դրանք ամենաներքևի իրար շարունակող կանաչ սլաքներով են ներկայացված) և այդ արտադրյալները գումարել: Ուրեմն որոնելի հավանականությունը հավասար է $0,49 \cdot 0,49 + 0,51 \cdot 0,51 = 0,5002$:

247. **ա)** $\frac{7}{15}$, **բ)** $\frac{4}{15}$:

248. **ա)** 0,075, **բ)** 0,855, **գ)** 0,93:

Լուծում:

Նկար 49-ում ներկայացված է խնդրի ծառաձև դիագրամը՝ համապատասխան նշումներով:



ա) Հավանականությունը, որ պատահական օր Վահանի մեքենան ավտոտնակում եղած չի լինի, բայց նա աշխատանքի կգնա մեքենայով, գտնելու համար պետք է առաջին կանաչ ձյուղով անցնել երկրորդ կապույտ ձյուղին ու դրանց հավանականությունները բազմապատկել՝ $0,1 \cdot 0,75 = 0,075$:

բ) Հավանականությունը, որ պատահական օր Վահանի մեքենան ավտոտնակում եղած կլինի, և նա աշխատանքի կգնա մեքենայով, գտնելու համար պետք է առաջին կապույտ ձյուղով անցնել երկրորդ կապույտ ձյուղին ու դրանց հավանականությունները բազմապատկել՝ $0,9 \cdot 0,95 = 0,855$:

գ) Հավանականությունը, որ պատահական օր Վահանն աշխատանքի կգնա մեքենայով, գտնելու համար «գործարկվում է» ձյուղերով հետ ենք գալիս դեպի ծառի բունը՝ բազմապատկելով հավանականությունները: Այս ստացված արդյունքները գումարում ենք. $0,95 \cdot 0,9 = 0,855$, $0,75 \cdot 0,1 = 0,075$, $0,855 + 0,075 = 0,93$: Նշենք նաև, որ եթե արդեն լուծել էինք ա) և բ) կետերը, ապա կարող էինք դրանց պատասխանները գումարել, քանի որ գ)–ի պատահույթը ա)–ի և բ)–ի անհամատեղելի պատահույթների գումարն է:

249. **ա)** 0,084 , **բ)** 0,1732 , **գ)** 0,1816, **դ)** 0.8184:

250. **ա)** 0,02, **բ)** 0,72, **գ)** 0,98:

251. **ա)** 0,525 , **բ)** 0,42 , **գ)** 0,805:

252. 0,112:

253. 0,32:

254. Երկու դեպքում էլ հավանականությունը նույնն է՝ $\frac{2}{3}$: **Լուծում:**

Առաջինը մտնելու դեպքում «երջանիկ» տոմս ընկնելու հավանականությունը $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ է, քանի որ կա 30 հավասարահնարավոր ելք, որոնցից նպաստավոր են 20-ը:

Երկրորդը մտնելու դեպքում հնարավոր է երկու տարբերակ՝ 1) առաջին մտնողը «երջանիկ» տոմս է հանել, 2) առաջին մտնողը «երջանիկ» տոմս չի հանել:

1) դեպքի հավանականությունը $\frac{2}{3}$ է: Այդ դեպքում մնացած կլինի 29 տոմս, որոնցից 19-ը «երջանիկ» են: Երկրորդ տոմսի «երջանիկ» լինելու պայմանական հավանականությունը կլինի $\frac{19}{29}$: Ուրեմն հավանականությունը, որ և՛ առաջին մտնողը հանի «երջանիկ» տոմս, և՛ երկրորդ մտնողը հանի «երջանիկ» տոմս, կլինի $\frac{2}{3} \cdot \frac{19}{29}$:

2) դեպքի հավանականությունը $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ է: Այդ դեպքում մնացած կլինի 29 տոմս, որոնցից 20-ը «երջանիկ» են: Երկրորդ տոմսի «երջանիկ» լինելու պայմանական հավանականությունը կլինի $\frac{20}{29}$: Ուրեմն հավանականությունը, որ առաջին մտնողը չի հանի «երջանիկ» տոմս, իսկ երկրորդ մտնողը կհանի «երջանիկ» տոմս, կլինի $\frac{1}{3} \cdot \frac{20}{29}$:

Քանի որ 1) և 2) դեպքերը անհամատեղելի պատահույթներ են, ապա դրանց գումարի հավանականությունը հավասար է դրանց հավանականությունների գումարին՝ $\frac{2}{3} \cdot \frac{19}{29} + \frac{1}{3} \cdot \frac{20}{29} = \frac{38+20}{3 \cdot 29} = \frac{58}{3 \cdot 29} = \frac{2}{3}$:

Այսպիսով՝ թե՛ առաջինը մտնելու, թե՛ երկրորդը մտնելու դեպքում «երջանիկ» տոմս ընկնելու հավանականությունը նույնն է՝ $\frac{2}{3}$ է:

255. ա) $\frac{7}{16}$, բ) 0,3:

256. 0,019:

257. 0,1648:

258. ա) 0,075, բ) 0,628:

259. ա) 0,224, բ) 0,336:

ԱՌԱՐԿԱՅԱՑԱՆԿ

Անկախ պատահույթներ – 113
Անհամատեղելի պատահույթներ – 117
Անհավասարման լուծում – 7
Անհավասարում
– գծային – 8
– իռացիոնալ – 37
– լոգարիթմական – 63
– մոդուլ պարունակող – 30
– ռացիոնալ – 21
– ցուցչային – 56
– քառակուսային – 13
Անհնար պատահույթ – 111
Աչքաչափի մեթոդ – 102

Բազմությունների
– հատում – 74
– միավորում – 74
– տարբերություն – 75

Գծային
– անհավասարում – 8
– հավասարում – 6

Դիագրամ
– շրջանաձև – 72
– սյունակային – 71
– Վեննի – 75
– ցրվածության – 100

Ելք – 110
e թիվը – 45

Զուգորդություններ – 88

Թերի քառակուսային հավասարում – 12

Իռացիոնալ
– անհավասարում – 37
– հավասարում – 34

Լավագույն նկարագրող ուղիղ – 97
Լոգարիթմ – 45
Լոգարիթմական
– անհավասարում – 63
– հավասարում – 61
– ֆունկցիա – 46

Կախյալ պատահույթներ – 113
Կարգավորություններ – 85
Կետագրամ – 97
Կիսորդ (մեդիան) – 98
Կոռելյացիա – 101

Համարժեք
– անհավասարումներ – 7
– հավասարումներ – 5
Հավանականային ծառաձև դիագրամ – 117
Հավասարման լուծում – 5
Հավասարում
– գծային – 6
– իռացիոնալ – 34
– լոգարիթմական – 61

- մոդուլ պարունակող – 27
- ռացիոնալ – 18
- ցուցչային – 54
- քառակուսային – 11
- Հավաստի պատահույթ – 111
- Հարաբերական հաճախություն – 72
- Հիմնական լոգարիթմական
նույնություն – 45

Մեդիան (կիսորդ) – 98

Միջին – 98

Մոդ – 98

- Մոդուլ պարունակող
- անհավասարում – 30
- հավասարում – 27

Շրջանաձև դիագրամ – 72

Պայմանական հավանականու- թյուն – 114

- Պատահույթ – 111
- անկախ – 113
- անհամատեղելի – 117
- անհնար – 111
- կախյալ – 113
- հավաստի – 111
- Պատահույթների
- արտադրյալ – 115

- գումար – 114

Ռացիոնալ

- անհավասարում – 21
- հավասարում – 18

Սյունակային դիագրամ – 71

Վեննի դիագրամ – 75

Տարրական պատահույթ – 111

Տեղափոխություններ – 87

Ցուցչային

- անհավասարում – 56
- հավասարում – 54
- ֆունկցիա – 44
- Ցրվածության դիագրամ – 100

Փորձ – 110

Փոքրագույն քառակուսիների ռեգ-
րեսիայի մեթոդ – 103

Քառակուսային

- անհավասարում – 13
- հավասարում – 11

Ֆակտորիալ – 85

ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Ս. Մ. Նիկոլսկի և ուրիշներ, «Հանրահաշիվ 8»: Հիմնական դպրոցի 8-րդ դասարանի դասագիրք, –Եր.: «Անտարես», 2017:
2. Գ. Գ. Գևորգյան, Ա. Ա. Սահակյան, «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր 11» ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի 11-րդ դասարանի դասագիրք, –Եր.: Էդիթ Պրինտ: 2017:
3. Գ. Գ. Գևորգյան, Ա. Ա. Սահակյան, «Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր 12» ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի 12-րդ դասարանի դասագիրք, –Եր.: Էդիթ Պրինտ: 2011:
4. Cambridge International AS and A Level Mathematics Statistics, Sophie Goldie Series Editor: Roger Porkess
5. Edexcel As And A Level Modular Mathematics: Statistics 1, Greg Attwood, Alan Clegg , Gill Dyer, Jane Dyer

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԳԼՈՒԽ I

ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

§1. Գծային հավասարումներ և անհավասարումներ.....	5
1. Գծային հավասարումներ.....	5
2. Գծային անհավասարումներ.....	7
§2. Քառակուսային հավասարումներ և անհավասարումներ	11
3. Քառակուսային հավասարումներ.....	11
4. Քառակուսային անհավասարումներ	13
§3. Ռացիոնալ հավասարումներ և անհավասարումներ	18
5. Ռացիոնալ հավասարումներ.....	18
6. Ռացիոնալ անհավասարումներ	21
§4. Մոդուլ պարունակող հավասարումներ և անհավասարումներ	27
7. Մոդուլ պարունակող հավասարումներ.....	27
8. Մոդուլ պարունակող անհավասարումներ.....	30
§5. Իռացիոնալ հավասարումներ և անհավասարումներ	34
9. Իռացիոնալ հավասարումներ.....	34
10. Իռացիոնալ անհավասարումներ.....	37

ԳԼՈՒԽ II

ՑՈՒՑՉԱՅԻՆ ԵՎ ԼՈԳԱՐԻԹՄԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§6. Ցուցչային և լոգարիթմական ֆունկցիաներ.....	44
11. Ցուցչային ֆունկցիա	44
12. Լոգարիթմի սահմանումը, լոգարիթմական ֆունկցիա.....	45
13. Լոգարիթմի հիմնական հատկությունները	47
§7. Ցուցչային հավասարումներ և անհավասարումներ	54
14. Ցուցչային հավասարումներ.....	54
15. Ցուցչային անհավասարումներ	56

§8. Լոգարիթմական հավասարումներ և անհավասարումներ	61
16. Լոգարիթմական հավասարումներ	61
17. Լոգարիթմական անհավասարումներ	63

ԳԼՈՒԽ III

ՏՎՅԱԼՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ՄԻԱՅՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐ

§9. Տվյալների վերլուծություն և մեկնաբանում.....	71
18. Տվյալների վերլուծություն և մեկնաբանում	71
19. Բազմություններ: Վեննի դիագրամներ	74
§10. Միացությունների տեսության տարրեր.....	85
20. Կարգավորություններ	85
21. Տեղափոխություններ.....	87
22. Զուգորդություններ.....	88

ԳԼՈՒԽ IV

ՎԻՃԱԿԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

§11. Լավագույն նկարագրող ուղիղ.....	97
23. Կետագրամներ.....	97
24. Լավագույն նկարագրող ուղիղ, կանխատեսումներ.....	100
§12. Հավանականություն	110
25. Հավանականությունների տեսության առանցքային հասկացությունները	110
26. Անկախ և կախյալ պատահույթներ	113
27. Հավանականային ծառածն դիագրամներ	117
ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ, ՅՈՒՅՈՒՄՆԵՐ, ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ.....	127
ԱՌԱՐԿԱՅԱՑԱՆԿ.....	147
ԼՐԱՅՈՒՅԻՉ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ	149

Գագիկ Աղեկյան

**ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ ԵՎ
ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ**

ԱՆԱԼԻԶԻ ՏԱՐԻԵՐ 11

ՀԵՆՔԱՅԻՆ ԾՐԱԳԻՐ

Հրատարակչության խմբագիր՝ Մարգարիտ Արիստակեսյան

Համակարգչային ձևավորումը՝ Հեղինե Փիլոյանի

Կազմի ձևավորումը՝ Արաբո Սարգսյանի



ԷԴԻՏ ՊՐԻՆՏ

Երևան, Դ. Մայան 43
հեռ.՝ (374 10) 520 848
www.editprint.am
info@editprint.am

Տառատեսակ՝ GHEA Hayk School:

Չափսը՝ 70x100 1/16, թուղթը՝ օֆսեթ:

Ծավալը՝ 9,5 մամուլ:

Տպաքանակը