ՈՒՂԻՂՆԵՐԸ ԵՎ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

1.1 Տարածության հիմնական հատկությունները

1. Ենդադրենք a և b ուղիղները հատվում են A կետում, b և c ուղիղները հատվում են B կետում, իսկ a և c ուղիղները՝ C կետում:

Դիտարկենք a և b հատվող ուղիղներով անցնող հարթությունը: Թող դա լինի α հարթությունը:

α հարթությանն են պատկանում a և b ուղիղները և, մասնավորապես, B և C կետերը ($B \in b$, $C \in a$):

Եթե B և C կետերը համընկնեն, ապա կամ a և b ուղիղները կհամընկնեն, կամ a, b և c ուղիղները կանցնեն միևնույն կետով: Թե մեկը, և թե մյուսը հակասում է խնդրի պայմանին: Հետևաբար B և C կետերը տարբեր են:

Ստացվում է, որ c ուղղի B և C կետերը պատկանում են α հարթությանը, ուրեմն C ուղիղը նույնպես պատկանում է α հարթությանը: Այսպիսով՝ և a, և b, և c ուղիղները պատկանում են α հարթությանը:

2. Ենթադրենք այդ կետերն են A, B, C և D կետերը: Եթե այդ կետերից որևէ երեքը գտնվեն միևնույն ուղղի վրա, ապա գոյություն կունենան անվերջ քանակով հարթություններ, որոնք կանցնեն հենց այդ երեք կետերով, այսինքն խնդրի պայմանին բավարարող հարթությունների քանակը կլինի անվերջ:

Եթե այդ կետերի ոչ մի եռյակ չգտնվի միևնույն ուղղի վրա, ապա եռյակներից յուրաքանչյուրով կանցնի հարթություն, այն էլ միայն մեկը:

Եթե այդ կետերի որևէ եռյակ պարունակող հարթությունը պարունակում է նաև չորրորդ կետը, ապա դա միակ հարթությունն է, որը պարունակում է տրված կետերից առնվազն երեքը:

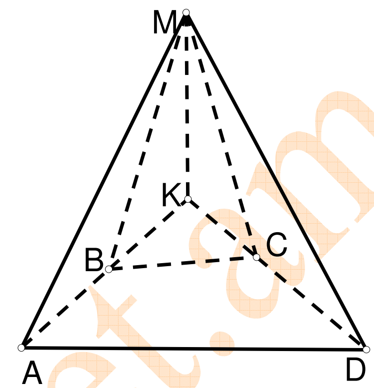
Եթե եռյակներից յուրաքանչյուրով անցնող հարթությունը չի պարունակում չորրորդ կետը, ապա յուրաքանչյուր եռյակով կանցնի մեկ հարթություն, իսկ չորս կետով ոչ մի հարթություն չի անցնի: Այդ դեպքում տրված կետերից առնվազն երեքը պարունակող հարթությունների քանակը հավասար կլինի հնարավոր եռյակների քանակին:

Իսկ դրանք չորսն են՝ (A, B, C); (A, B, D); (A, C, D); (B, C, D):

Պատ.՝ կամ անվերջ քանակով, կամ մեկ, կամ չորս:

3. Քանի որ A, B, C և D կետերը ընկած են մի հարթությունում, և AB ու CD ուղիղները զուգահեռ չեն, ապա վերջիններս կհատվեն ինչ-որ կետում: Թող դա լինի K կետը:

Պատկանելով AB ուղղին՝ K կետը կպատկանի ABM հարթությանը: Բայց այն պատկանում է նաև CD ուղղին, հետևաբար կպատկանի նաև CDM հարթությանը: Այսպիսով՝ M և K կետերը պատկանում են և ABM, և CDM հարթություններին: Ուրեմն այդ հարթությունների ընդհանուր ուղիղը MK ուղիղն է, որը հատում է $ABCD$ հարթությունը K կետում:



Պատ.՝ Այո, AB և CD ուղիղների հատման K կետում:

1.1 Լրացուցիչ խնդիրներ

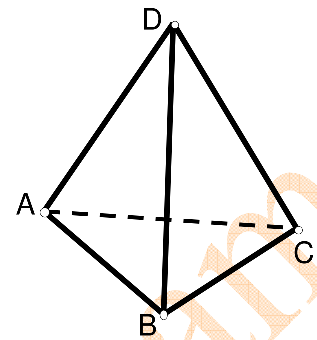
1. BAM և AMD հարթությունները ունեն A և M ընդհանուր կետերը: Հետևաբար հատվում են AM ուղղով:

C և D կետերից յուրաքանչյուրը պատկանում է և BDC, և CMD հարթություններին: Ուրեմն՝ այդ հարթությունները հատվում են CD ուղղով:

2. Սեղանի ոտքերի ծայրակետերը նշանակենք A-ով, B-ով, C-ով և D-ով: Մի թելով միացնենք B և D կետերը, մյուսով՝ A և C կետերը (այսինքն տանենք $ABCD$ քառանկյան անկյունագծերը): Եթե թելերը հատվեն ինչ-որ M կետում, ապա կունենանք BD և AC հատվող ուղիղները: Հետևաբար նրանցով անցնող հարթություն գոյություն կունենա: Այդ հարթությունում էլ ընկած կլինեն սեղանի ոտքերի ծայրակետերը:

Եթե թելերը չհատվեն, ապա սեղանի ոտքերը չեն գտնվում մի հարթության մեջ: Քանի որ եթե նրանք գտնվեին մի հարթության մեջ, ապա որպես ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծեր կհատվեին:

3. Ոչ: Դիտարկենք, օրինակ, $ABCD$ բուրգը: ABD, BDC և ADC հարթություններն ունեն ընդհանուր կետ՝ D-ն: Բայց ABD և BDC հարթությունների ընդհանուր կետերն ընկած են BD ուղղի, իսկ BDC և ADC հարթությունների ընդհանուր կետերը՝ DC ուղղի վրա: Իսկ այդ ուղիղները D-ից բացի այլ ընդհանուր կետեր չունեն, քանի որ հակառակ դեպքում BD և DC ուղիղները կհամընկնեին:

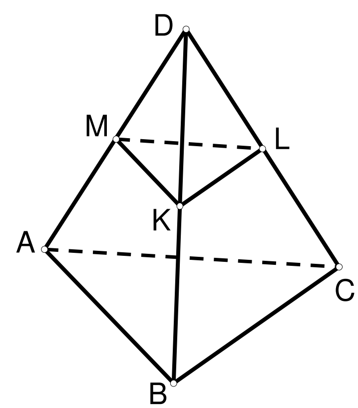


4. գ) Ոչ: Ենթադրենք $ABCD$ ուղղանկյան երեք գագաթ, օրինակ, A-ն, B-ն և C-ն պատկանում են որևէ α հարթության: $ABCD$ ուղղանկյան հարթությունն էլ թող լինի β հարթությունը:

Այդ դեպքում և α հարթությունը, և β հարթությունը կպարունակեն մի ուղղի վրա չգտնվող A, B և C կետերը: Իսկ քանի որ այդպիսի հարթությունը միակն է, ապա α հարթությունը կհամընկնի β հարթության հետ և կպարունակի նաև D կետը, այսինքն ուղղանկյան բոլոր գագաթները կպատկանեն α հարթությանը:

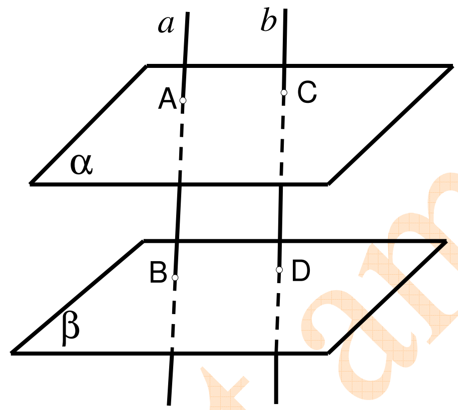
1.2 Ուղիղների և հարթությունների զուգահեռությունը տարածությունում

1. Քանի որ M-ը AD-ի, իսկ K-ն BD-ի միջնակետն է,ապա MK-ն ABD եռանկյան միջին գիծն է: Ուրեմն՝ $AB \parallel MK$: Հետևաբար AB-ն զուգահեռ լինելով MKL հարթության MK ուղղին, ըստ ուղղի և հարթության զուգահեռության հայտանիշի, զուգահեռ է MKL հարթությանը:



2. Որպես ABD և BDC եռանկյունների միջին գծեր՝ $MK \parallel AB$, $KL \parallel BC$: Ուրեմն՝ MKL հարթության երկու հատվող ուղիղները համապատասխանաբար զուգահեռ են ABC հարթության երկու ուղիղներին: Վերջինից, ըստ հարթությունների զուգահեռության հայտանիշի, հետևում է, որ այդ հարթությունները զուգահեռ են:

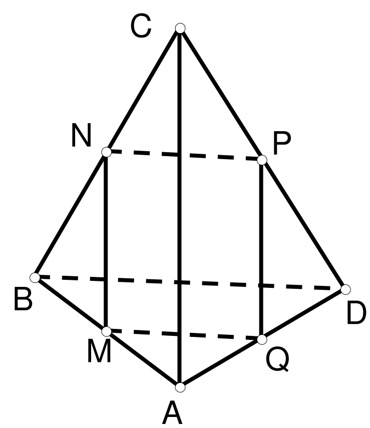
3. Ենթադրենք a և b զուգահեռ ուղիղները հատում են α և β զուգահեռ հարթությունները համապատասխանաբար A, B և C, D կետերում:



Որպես զուգահեռ ուղիղներ՝ a և b ուղիղները գտնվում են ինչ-որ γ հարթությունում: Պարզ է, որ AC և BD ուղիղները նույնպես գտնվում են γ հարթությունում: Ուրեմն՝ այդ ուղիղները կարող են կամ հատվել, կամ լինել զուգահեռ: Բայց նրանք չեն կարող հատվել, քանի որ այդ դեպքում նրանց ընդհանուր կետը կպատկաներ և α հարթությանը, և β հարթությանը: Իսկ դա կհակասեր α և β հարթությունների զուգահեռության պայմանին: Ուրեմն՝ $AC \parallel BD$: Այսպիսով՝ $AB \parallel CD$, $AC \parallel BD$: Հետևաբար $ACDB$-ն զուգահեռագիծ է:

4. Թող $ABCD$ տարածական քառանկյան կողմերի միջնակետերը լինեն M, N, P և Q կետերը:

NP-ն, որպես BCD եռանկյան միջին գիծ, զուգահեռ է BD-ին և հավասար է նրա կեսին: MQ-ն նույնպես զուգահեռ է BD-ին և հավասար է նրա կեսին, քանի որ ABD եռանկյան միջին գիծն է:



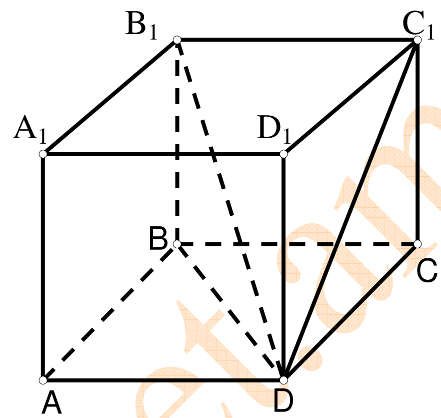
Այսպիսով, NP և MQ ուղիղները զուգահեռ են BD ուղղին, հետևաբար զուգահեռ են միմյանց: Վերջինից հետևում է, որ NP և MQ ուղիղները գտնվում են մի հարթության մեջ: Իսկ դա նշանակում է, որ $MNPQ$ քառանկյունը հարթ պատկեր է:

Բացի այդ, ինչպես տեսանք վերևում, այդ քառանկյան հանդիպակաց երկու կողմերը՝ NP-ն և MQ-ն, զուգահեռ և հավասար են, որից էլ հետևում է, որ $MNPQ$-ն զուգահեռագիծ է:

1.6 Ուղղի և հարթության կազմած անկյունը

1. Պարզ է, որ բոլոր անկյունագծերն էլ բոլոր նիստերի հետ նույն անկյունն են կազմում:

Գտնենք B_1D անկյունագծի և $ABCD$ նիստի կազմած անկյունը: Այդ անկյունը B_1D անկյունագծի և նրա պրոյեկցիայի կազմած անկյունն է՝ $\angle B_1DB$ անկյունը:

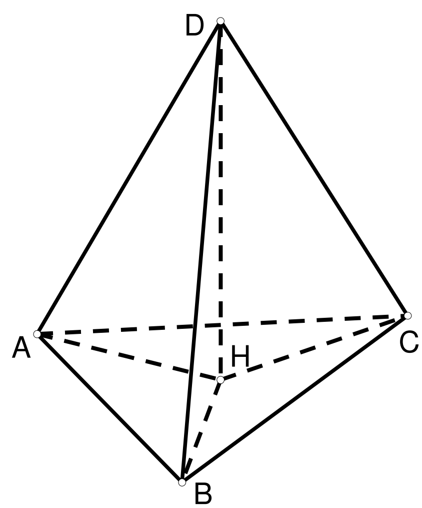


Եթե խորանարդի կողը նշանակենք a-ով, ապա, ըստ Պյութագորասի թեորեմի, $BD=\sqrt{2}a$: Հետևաբար $tgB_1DB=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$: Ուրեմն՝

$\angle B_1DB=arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$:

Պատ.՝ $arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$:

3. Տանենք բուրգի DH բարձրությունը և H-ը միացնենք A, B և C կետերին: Քանի որ $DA=DB=DC=b$, իսկ DH-ը ընդհանուր է, ապա DHA, DHB, DHC ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են ըստ էջի և ներքնաձիգի: Ուրեմն $HA=HB=HC$: Հետևաբար H-ը ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Բացի այդ, DAH, DBH և DCH անկյուններն են հավասար: Իսկ դրանք AD, BD, CD կողերի ABC հարթության հետ կազմած անկյուններն են, քանի որ AH-ը, BH-ը և CH-ը համապատասխանաբար այդ կողերի պրոյեկցիաներն են:

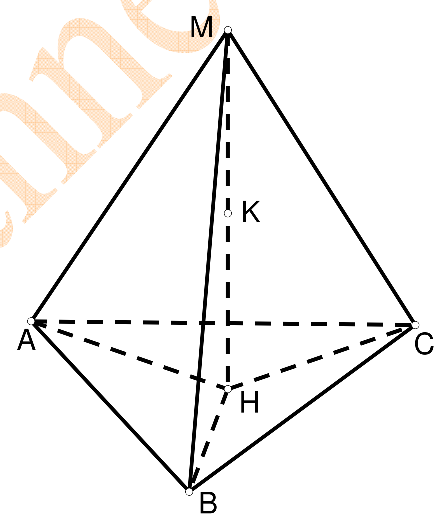


Օգտվելով սինուսների թեորեմից՝ կունենանք $\frac{a}{\sin 60^0}=2R$, որտեղից $HA=HB=HC=R=\frac{a}{\sqrt{3}}$: Հետևաբար DAH, DBH, DCH անկյուններից յուրաքանչյուրի կոսինուսը հավասար է $\frac{R}{b}=\frac{a}{\sqrt{3}b}$:

Պատ.՝ $\frac{a}{\sqrt{3}b}$:

4. Ցուցում: Ապացուցեք, որ հարթությանն ոչ ուղղահայաց և իրար զուգահեռ ուղիղների պրոյեկցիաները զուգահեռ են և օգտվեք դասագրքի 34 էջի պնդումից:

6. Ենթադրենք AM, BM, CM ուղիղները ABC հարթության հետ նույն անկյունն են կազմում:



ABC հարթությանը տանենք MH ուղղահայացը և H-ը միացնենք A-ին, B-ին և C-ին:

Քանի որ AH-ը, BH-ը և CH-ը համապատասխանաբար AM, BM, CM հատվածների պրոյեկցիաներն են, ապա, ըստ խնդրի պայմանի, MAH, MBH և MCH անկյունները հավասար են: Այդ անկյունները նշանակենք α-ով: Կունենանք $\angle AMH=\angle BMH=$ $=\angle CMH=90^0-\alpha$: Ուրեմն MHA, MHB, MHC ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են ըստ էջի և առընթեր սուր անկյան: Վերջինից էլ կհետևի, որ $HA=HB=HC$, այսինքն H-ը ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է:

Այսպիսով՝ M-ը գտնվում է ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնով ABC հարթությանը տարված ուղղահայացի վրա:

Ցույց տանք, որ եթե որևէ K կետ գտնվում է ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնով ABC հարթությանը տարված ուղղահայացի վրա, ապա AK, BK, CK ուղիղները ABC հարթության հետ նույն անկյունն են կազմում:

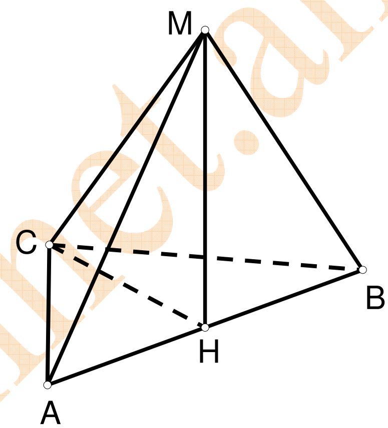
KHA, KHB, KHC ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են ըստ էջերի ($HA=HB=HC=R$, KH-ը ընդհանուր է): Հետևաբար հավասար են

KAH, *KBH* և *KCH* անկյունները, որոնք էլ *AK*, *BK*, *CK* ուղիղների *ABC* հարթության հետ կազմած անկյուններն են:

Ուրեմն խնդրի պահանջին բավարարող կետերի երկրաչափական տեղը *ABC* եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնով *ABC* հարթությանը ուղղահայաց տարված ուղիղն է:

Պատ.՝ *ABC* եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնով *ABC* հարթությանը ուղղահայաց տարված ուղիղը:

7. Տանենք *MH*-ը ուղղահայաց *ABC* հարթությանը:

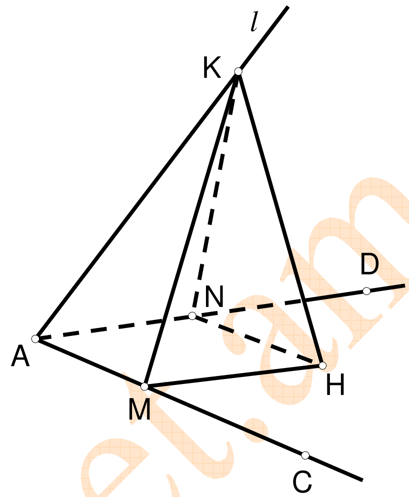


Քանի որ *AM*, *BM*, *CM* ուղիղները *ABC* հարթության հետ նույն՝ α անկյունն են կազմում, ապա *H*-ը կլինի *ABC* եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնը (տես նախորդ խնդրի լուծումը): Իսկ քանի որ *ABC* եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է, ապա *H*-ը *AB* ներքնաձիգի միջնակետն է: Ուրեմն՝ $AH = HB = \frac{a}{2}$, իսկ $\angle MAH = \angle MBH = \angle MCH = \alpha$: *AHM* ուղղանկյուն եռանկյունից $\frac{MH}{AH} = tg\alpha$:

Հետևաբար $MH = \frac{atg\alpha}{2}$:

Պատ.՝ $\frac{atg\alpha}{2}$:

8. Ենթադրենք փոխուղղահայաց ուղիղները են *AD*-ն և *AC*-ն, l ուղիղն էլ դրանց հետ կազմում է համապատասխանաբար 45^0 և 60^0 անկյուններ:



l ուղղի վրա վերցնենք *K* կետը և *AK*-ն նշանակենք a-ով:

Տանենք $KM \perp AC$, $KN \perp AD$ և $KH \perp ACD$: *NH*-ը և *MH*-ը համապատասխանաբար կլինեն *KN*-ի և *KM*-ի պրոյեկցիաները: Ուրեմն, ըստ երեք ուղղահայացների մասին թեորեմի, $\angle ANH = 90^0$, $\angle AMH = 90^0$: Բայց 90^0 է նաև $\angle NAM$-ը: Պարզվեց, որ *ANHM* քառանկյան երեք անկյունները ուղիղ են: Ուրեմն $\angle MHN$-ը նույնպես 90^0 է (անկյունների գումարը պետք է լինի 360^0): Այսպիսով՝ *ANHM* քառանկյունը ուղղանկյուն է: Որպես ուղղանկյան հանդիպակաց կողմեր՝ *AN* = *MH*:

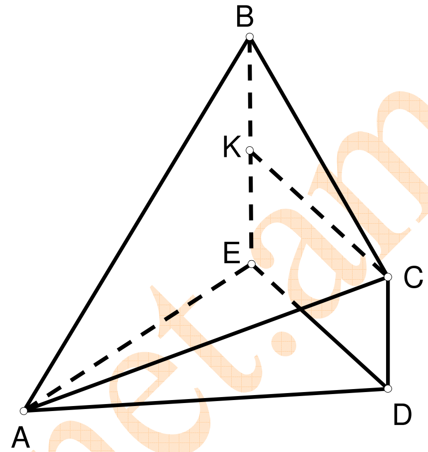
ANK ուղղանկյուն եռանկյունից $AN = a\cos 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$, իսկ *AMK* ուղղանկյուն եռանկյունից $KM = a\sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$: Հաշվի առնելով, որ *AN* = *MH*, *MHK* ուղղանկյուն եռանկյունից գտնենք *KH*-ը: Կունենանք $KH = \sqrt{\dfrac{3}{4}a^2 - \dfrac{2}{4}a^2} = \dfrac{a}{2}$:

Քանի որ $KH \perp ACD$, ապա l ուղղի և *ACD* հարթության կազմած անկյունը $\angle KAH$-ն է: *KHA* ուղղանկյուն եռանկյունից կունենանք

$\sin KAH = \dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{1}{2}$: Ուրեմն $\angle KAH = 30^0$:

Պատ.՝ 30^0:

9. Ենթադրենք C ուղիղ անկյունով և a սրունքով ACB հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան պրոյեկցիան α հարթության վրա հավասարակողմ եռանկյուն է:



Դիտարկենք α-ին զուգահեռ և A կետով անցնող β հարթությունը: Քանի որ հատվածի պրոյեկցիաները զուգահեռ հարթությունների վրա ունեն նույն երկարությունը, և բացի այդ, զուգահեռ հարթությունների հետ ուղիղի կազմած անկյունները հավասար են, ապա α-ն կարելի է փոխարինել β հարթությամբ:

Ենթադրենք ABC եռանկյան պրոյեկցիան ADE հավասարակողմ եռանկյունն է և պետք է գտնել BAE անկյունը: C-ից տանենք զուգահեռ ED-ին և հատման կետը BE-ի հետ նշանակենք K-ով: Որպես նույն հարթության ուղղահայաց ուղիղներ՝ զուգահեռ են նաև BE և DC ուղիղները: Ուրեմն, որպես զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմեր, $EK = CD$, $ED = KC$:

$\angle CAD$-ն նշանակենք α-ով: Կունենանք $AD = a\cos\alpha$, $CD = a\sin\alpha$:

Քանի որ ADE եռանկյունը հավասարակողմ է, ապա $AD = DE = AE = a\cos\alpha$: Բայց $ED = KC$, ուրեմն KC-ն նույնպես $a\cos\alpha$ է: ADC և BKC ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են ըստ էջի և ներքնաձիգի: Հետևաբար $BK = CD = KE = a\sin\alpha$:

Այսպիսով՝ $AE = a\cos\alpha$, $BE = 2a\sin\alpha$, իսկ ACB հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյունուց՝ $AB = \sqrt{2}a$:

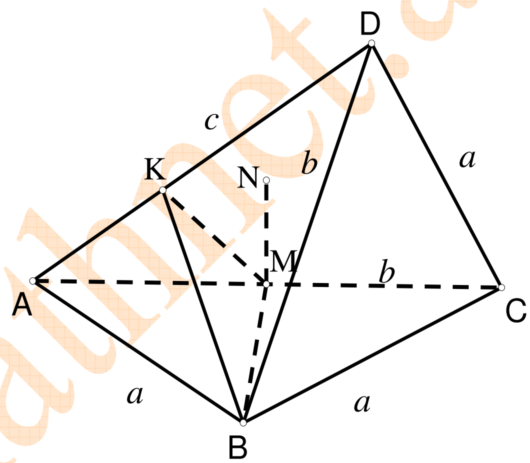
AEB ուղղղանկյուն եռանկյունուց, ըստ Պյութագորասի թեորեմի $a^2\cos^2\alpha + 4a^2\sin^2\alpha = 2a^2$, իսկ $tgBAE = \dfrac{2a\sin\alpha}{a\cos\alpha} = 2tg\alpha$: Առաջին հավասարումից կունենանք. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 3\sin^2\alpha = 2$ կամ $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{3}$: Վերջինից կհետևի, որ $\cos^2\alpha = \dfrac{2}{3}$, իսկ քանի որ $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, ապա $tg^2\alpha = \dfrac{1}{2}$ կամ $tg\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: Ստացվածը տեղադրելով $tgBAE$-ի արտահայտության մեջ՝ կունենանք $tgBAE = \sqrt{2}$, որտեղից $\angle BAE = arctg\sqrt{2}$:

Պատ.՝ $arctg\sqrt{2}$:

1.7 Հարթություններով կազմված երկնիստ անկյուն

17. Նշանակենք $AB = BC = CD \equiv a$, $BD = AC \equiv b$, $AD \equiv c$: Տանենք ABC եռանկյան BM բարձրությունը: Քանի որ $AB = BC$, ապա MB-ը նաև միջնագիծ է՝ $AM = MC = \frac{b}{2}$: ADC հարթության մեջ տանենք MN-ը՝ ուղղահայց AC-ին: Քանի որ AC կողով երկնիստ անկյունն ուղիղ է, ապա, որպես այդ անկյան գծային անկյուն, $\angle BMN = 90^0$: Ուրեմն՝ $BM \perp AC$, $BM \perp MN$: Հետևաբար BM-ը ուղղահայաց է ACD հարթությանը:

Տանենք ABD եռանկյան BK բարձրությունը և K կետը միացնենք M-ին: Քանի որ BM-ը ուղղահայաց է ACD հարթությանը, ապա KM-ը BK-ի պրոյեկցիան է և նույնպես ուղղահայաց է AD-ին: Այսպիսով՝ BKM անկյունը AD կողով երկնիստ անկյան գծային անկյունն է (որոնելի անկյունը):



Դիտարկենք ACD և ABD եռանկյունները: Այդ եռանկյունները հավասար են ըստ երեք կողմերի: Նշանակենք $\angle DAC = \angle ADB \equiv \alpha$: BKD ուղղանկյուն եռանկյունից $BK = b \cdot \sin\alpha$: AKM ուղղանկյուն եռանկյունից $KM = \frac{b}{2} \cdot \sin\alpha$: Վերջապես, BMK ուղղանկյուն եռանկյունից $\sin KBM = \frac{KM}{MB} = \frac{\frac{b}{2}\sin\alpha}{b\sin\alpha} = \frac{1}{2}$: Ուրեմն՝ $\angle KBM = 30^0$: Որոնելի BKM անկյունն էլ կլինի $90^0 - 30^0 = 60^0$:

Պատ.՝ 60^0:

19. Օգտվենք պատկերի և նրա պրոյեկցիայի մակերեսների $S' = S\cos\alpha$ բանաձևից:

F պատկերի մակերեսը նշանակենք X-ով: Ըստ խնդրի տվյալների՝ $X\cos\frac{\alpha}{2} = Q$, $X\cos\alpha = S$: Օգտվելով կրկնակի անկյան կոսինուսի բանաձևից՝ երկրորդ հավասարման փոխարեն կունենանք. $S =$

$= X\left(2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1\right)$: Առաջին հավասարումից արտահայտենք $\cos\dfrac{\alpha}{2}$-ը և տեղադրենք երկրորդի մեջ. $X\left(2\dfrac{Q^2}{X^2}-1\right)=S$: Վերջինը համարժեք է $X^2+XS-2Q^2=0$ հավասարմանը, որի դրական լուծումն է $X=$ $=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{8Q^2+S^2}-S\right)$:

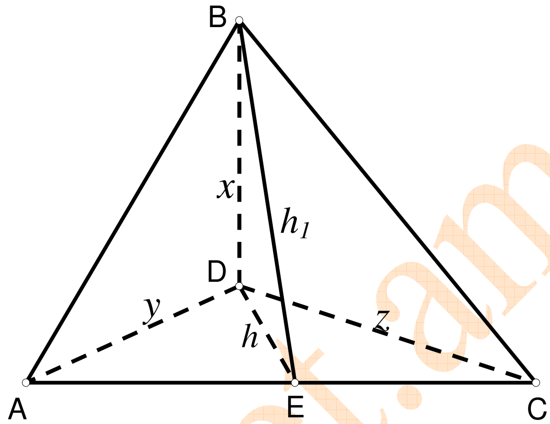
Պատ.՝ $X=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{8Q^2+S^2}-S\right)$:

20. 1) Քանի որ D գագաթին հարակից անկյունները ուղիղ են, ապա CD-ն ուղղահայաց է ADB հարթությանը, AD-ն ուղղահայաց է CDB հարթությանը, BD-ն ուղղահայաց է ADC հարթությանը: Ուրեմն ABC նիստի պրոյեկցիան ABD հարթության վրա հենց ABD նիստն է: Օգտվենք պատկերի և նրա պրոյեկցիայի մակերեսների $S'=S\cos\alpha$ բանաձևից: Կունենանք $S_1=Q\cos\alpha$: Մյուս նիստերը նույնպես ABC նիստի պրոյեկցիաներն են համապատասխան հարթությունների վրա: Հետևաբար $S_2=$ $=Q\cos\beta$, $S_3=Q\cos\gamma$: Ուրեմն՝ $\cos\alpha=\dfrac{S_1}{Q}$, $\cos\beta=\dfrac{S_2}{Q}$ և $\cos\gamma=\dfrac{S_3}{Q}$:

2) BD, AD և CD կողերը համապատասխանաբար նշանակենք x-ով, y-ով և z-ով:

Քանի որ ADB, BDC, ADC եռանկյունները ուղղանկյուն եռանկյուններ են, ապա $S_1=\dfrac{1}{2}xy$, $S_2=\dfrac{1}{2}xz$ և $S_3=\dfrac{1}{2}yz$: Հետևաբար $S_1^2+S_2^2+$ $+S_3^2=\dfrac{1}{4}\left(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\right)$:

ABC եռանկյան մակերեսը՝ Q-ն հաշվելու համար տանենք ADC եռանկյան DE բարձրությունը և E-ն միացնենք B-ին: Քանի որ BD-ն ուղղահայաց է ADC հարթությանը, ապա DE-ն BE-ի պրոյեկցիան է: Վերջինից էլ հետևում է, որ BE-ն ABC եռանկյան բարձրությունն է:



ADC ուղղանկյուն եռանկյունից $S_{ADC}=\frac{1}{2}yz=\frac{1}{2}AC\cdot h$: Իսկ ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝ $AC=\sqrt{y^2+z^2}$: Ուրեմն $h=\frac{yz}{\sqrt{y^2+z^2}}$: BDE ուղղանկյուն եռանկյունից $h_1=\sqrt{x^2+h^2}$: Վերջին երկուսից կունենանք. $h_1=\sqrt{\frac{y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2}{y^2+z^2}}$: Այսպիսով՝ $Q=\frac{1}{2}\sqrt{y^2+z^2}\sqrt{\frac{y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2}{y^2+z^2}}=$ $=\frac{1}{2}\sqrt{y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2}$, իսկ $Q^2=\frac{1}{4}\left(y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2\right)$: Ուրեմն $Q^2=$ $=S_1^2+S_2^2+S_3^2$:

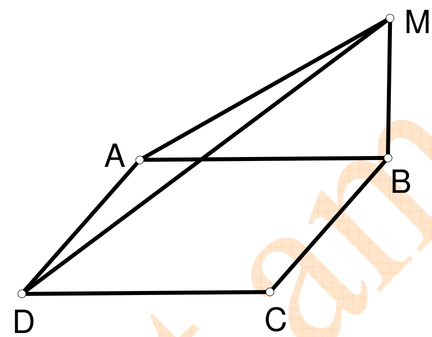
3) Նախորդ կետում ապացուցված հավասարության երկու կողմերը բաժանենք Q^2-ու: Կունենանք $\left(\frac{S_1}{Q}\right)^2+\left(\frac{S_2}{Q}\right)^2+\left(\frac{S_3}{Q}\right)^2=1$: Ձախ կողմի գումարելիները համապատասխանաբար $\cos^2\alpha$-ն, $\cos^2\beta$-ն և $\cos^2\gamma$-ն են (տես նույն խնդրի 1) կետը): Ուրեմն՝ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$:

Պատ.՝ 1) $\alpha=\arccos\frac{S_1}{Q}$, $\beta=\arccos\frac{S_2}{Q}$, $\gamma=\arccos\frac{S_3}{Q}$:

Լրացուցիչ խնդիրներ

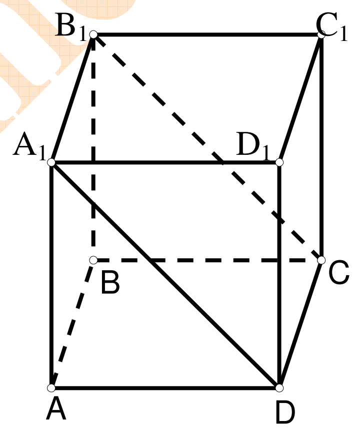
1. Քանի որ *MB*-ն ուղղահայաց է *ABC* հարթությանը, ապա *AB*-ն *AM*-ի պրոյեկցիան է այդ հարթության վրա:

Բացի այդ, $AB \perp AD$, քանի որ *ABCD*-ն ուղղանկյուն է: Հետևաբար, ըստ երեք ուղղահայացների մասին թեորեմի, $AM \perp AD$: Այսպիսով՝ *MADB* երկնիստ անկյան *AD* կողին ուղղահայաց են և *AB*-ն, և *AM*-ը: Ուրեմն *MAB* անկյունը *MADB* երկնիստ անկյան գծային անկյունն է:



Պատ.՝ Այո:

2. A_1CDB երկնիստ անկյան *CDB* նիստին է պատկանում նաև *A* կետը, քանի որ *AB* և *CD* զուգահեռ ուղիղները պարունակող հարթության մի ուղղի վրա չգտնվող *B*, *C*, *D* կետերով անցնող հարթությունը միակն է:

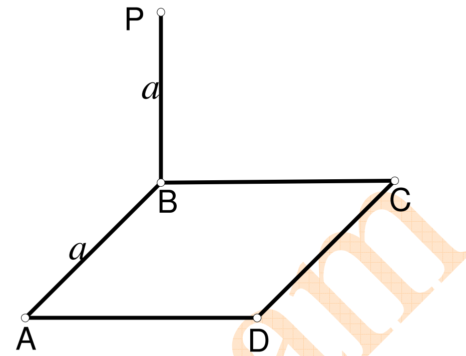


Քանի որ *ABCD*-ն քառակուսի է, ապա $AD \perp CD$, $DD_1 \perp CD$: Ըստ ուղղի և հարթության ուղղահյացության հայտանիշի կհետևի, որ *CD*-ն ուղղահայաց է AA_1D_1D նիստին, ուրեմն նաև A_1D-ին: Այսպիսով՝ $AD \perp CD$, $A_1D \perp CD$: Ուրեմն ADA_1 անկյունը A_1CDB երկնիստ անկյան գծային անկյունն է:

Քանի որ AA_1D_1D-ն քառակուսի է, իսկ քառակուսու անկյունագծերը կիսում են նրա անկյունները, ապա $\angle ADA_1 = 45^0$:

Պատ.՝ 45^0:

3. ա) Քանի որ *ABCD*-ն քառակուսի է, ապա $AB \perp AD$: Մյուս կողմից *PB*-ն ուղղահայաց է *ABCD*-ն քառակուսու հարթությանը: Ուրեմն *AB*-ն *PA*-ի պրոյեկցիան է այդ հարթությունում: Ըստ երեք ուղղահայացների մասին թեորեմի կունենանք, որ $PA \perp AD$:



Այսպիսով՝ $PA \perp AD$, $AB \perp AD$: Ուրեմն *PAB* անկյունը *PADC* երկնիստ անկյան գծային անկյունն է:

Ըստ խնդրի պայմանի *PA*=*PB* և *PB*-ն ուղղահայաց է *ABCD*-ն քառակուսու հարթությանը (մասնավորապես $PA \perp AB$): Հետևաբար *PBA*-ն հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյուն է: Ուրեմն $\angle PAB = 45^0$:

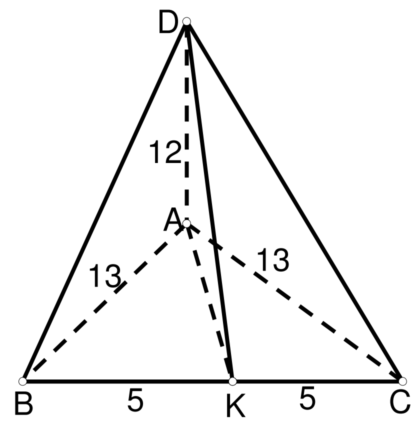
գ) *PBCD* երկնիստ անկյան նիստերը փոխուղղահայաց են, քանի որ *BCP* նիստը անցնում է *BCD* նիստին ուղղահայաց *BP* ուղղով: Ուրեմն *PBCD* երկնիստ անկյունը 90^0 է:

դ) Քանի որ *PB*-ն ուղղահայաց է *ABCD* քառակուսու հարթությանը, ապա $PB \perp AB$, $PB \perp BC$: Ուրեմն *ABC* անկյունը *APBC* երկնիստ անկյան երկնիստ գծային անկյունն է: Իսկ *ABCD*-ի քառակուսի լինելուց էլ հետևում է, որ $\angle ABC = 90^0$:

Պատ.՝ ա) 45^0, գ) 90^0, դ) 90^0:

4. Տանենք *BCD* եռանկյան *DK* բարձրությունը:

Քանի որ $DA \perp ABC$, ապա *AK*-ն *DK*-ի պրոյեկցիան է: Հետևաբար, ըստ երեք ուղղահայացների թեորեմի, *AK*-ն նույնպես ուղղահայաց է *BC*-ին: Ուրեմն *DKA* անկյունը *BCD* և *BCA* նիստերով երկնիստ անկյան գծային անկյունն է:



Քանի որ *AB*=*AC*, ապա *ABC* եռանկյան *AK* բարձրությունը նաև միջնագիծ է՝ $BK = KC = \frac{BC}{2} = 5$: Ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝ $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = 12$:

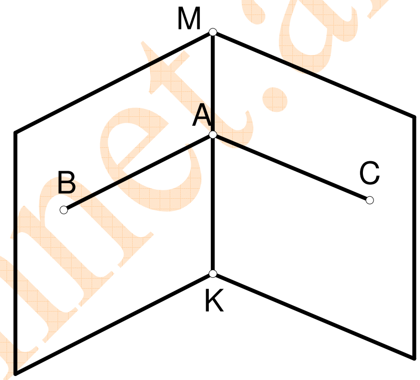
Քանի որ $DA \perp ABC$, ապա մասնավորապես $DA \perp AK$, այսինքն DAK-ն ուղղանկյուն եռանկյուն է, ընդ որում, ինչպես պարզվեց, DA= AK=12: Ուրեմն $\angle DKA = 45^0$:

Պատ.՝ 45^0:

5. Ենթադրենք BAC անկյունը MK կողով երկնիստ անկյան որևէ գծային անկյուն է:

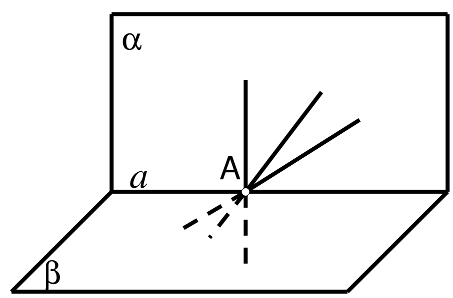
Այդ դեպքում $MK \perp AB$, $MK \perp AC$:

Հետևաբար, ըստ ուղղի և հարթության ուղղահայացության հայտանիշի, MK-ն ուղղահայաց է ABC հարթությանը: Ուրեմն երկնիստ անկյան նիստերից յուրաքանչյուրն անցնում է ABC հարթությանն ուղղահայաց MK ուղղով: Վերջինից էլ հետևում է, որ երկնիստ անկյան նիստերն ուղղահայաց են գծային անկյան հարթությանը, կամ որ երկնիստ անկյան գծային անկյան հարթությունը ուղղահայաց է նրա նիստերին:



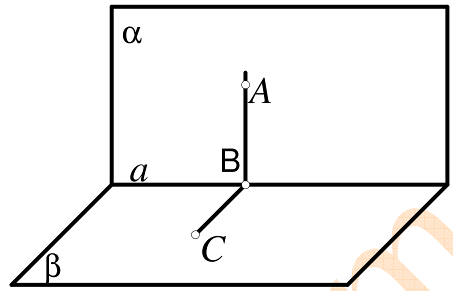
Պատ.՝ Այո:

6. Ոչ: Օրինակ, A կետով անցնող և α հարթությանը պատկանող ուղիղներից միայն մեկն է ուղղահայաց β հարթության a ուղղին (տրված կետով տրված ուղղին կարելի է տանել ուղղահայաց, այն էլ միայն մեկը):



Պատ.՝ Ոչ:

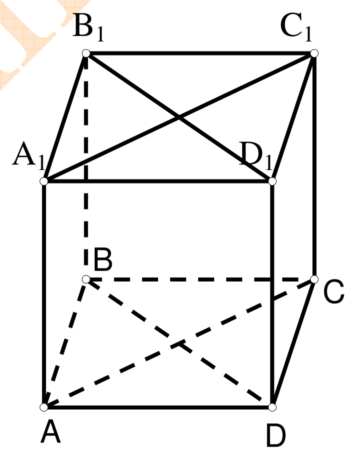
7. Այո: Դիտարկենք α և β փոխուղղահայաց հարթություններով առաջացած երկնիստ անկյուններից որևէ մեկի որևէ գծային անկյուն: Թող դա լինի ABC անկյունը:



Կունենանք. $AB \perp a$, $CB \perp a$: Բացի այդ, քանի որ α և β հարթությունները փոխուղղահայաց են, ապա $\angle ABC = 90^0$, այսինքն $AB \perp BC$: Կստացվի, որ $AB \perp a$, $AB \perp BC$, այսինքն AB-ն ուղղահայաց է β հարթության երկու հատվող ուղիղներին, հետևաբար ուղղահայաց է β հարթությանը: Վերջինն էլ նշանակում է, որ α հարթության AB ուղիղը ուղղահայաց է β հարթության ցանկացած ուղղի:

Պատ.՝ Այո:

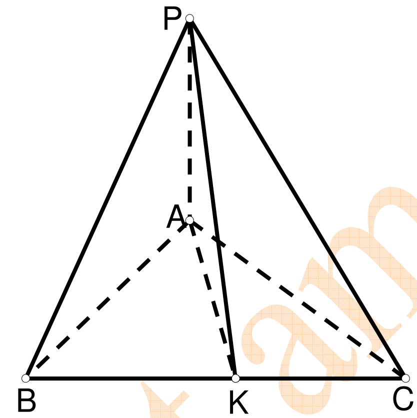
8. Որպես $ABCD$ քառակուսու անկյունագծեր՝ $AC \perp BD$:



Քանի որ AA_1B_1B-ն և BB_1C_1D-ն քառակուսիներ են, ապա $BB_1 \perp AB$, $BB_1 \perp BC$: Ուրեմն, ըստ ուղղի և հարթության ուղղահայացության հայտանիշի, $BB_1 \perp ABC$, մասնավորապես $BB_1 \perp AC$:

Այսպիսով, $AC \perp BD, AC \perp BB_1$: Ուրեմն $AC \perp BDB_1$: Հետևաբար AA_1C հարթությունը, որպես BDB_1 հարթությանը ուղղահայաց AC ուղղով անցնող հարթություն, ուղղահայաց կլինի BDB_1 հարթությանը:

9. *A*, *B*, *C*, *P* կետերից երեքով անցնող հարթություններն են *PAB*, *PAC*, *PBC* և *ABC* հարթությունները:



Ակնհայտ է, որ *ABC* հարթությունը ուղղահայաց չէ ինքն իրեն:

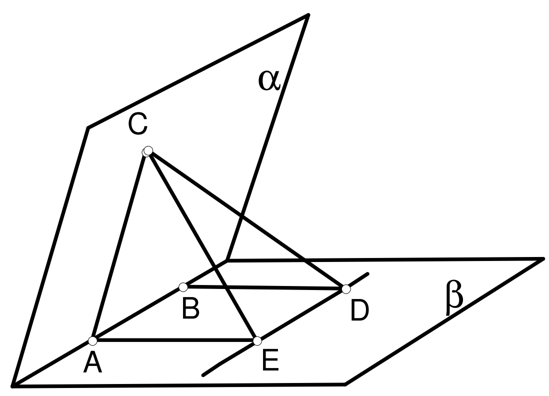
PAB և *PAC* հարթություններից յուրաքանչյուրը անցնում է *ABC* հարթության ուղղահայաց *PA* ուղղով և, հետևաբար, ուղղահայաց է *ABC* հարթությանը:

Մնում է քննարկել *PBC* և *ABC* հարթությունների հարցը:

Տանենք *BPC* եռանկյան *PK* բարձրությունը: Քանի որ $PA \perp ABC$, ապա *AK*-ն *PK*-ի պրոյեկցիան է: Ըստ երեք ուղղահայացների թեորեմի՝ $AK \perp BC$: Այսպիսով, *AKP* անկյունը *PBC* և *ABC* հարթությունների հատումից առաջացած երկնիստ անկյուններից մեկի գծային անկյունն է: Այն չի կարող լինել ուղիղ անկյուն, քանի որ *PAK* եռանկյունը չի կարող ունենալ երկու ուղիղ անկյուն: Իսկ որ այդ եռանկյան *A* անկյունն ուղիղ է հետևում է *PA*-ի *ABC* հարթությանը, մասնավորապես *AK* ուղղին ուղղահայաց լինելու պայմանից: Ուրեմն *PBC* և *ABC* հարթությունները փոխուղղահայաց չեն:

Պատ.՝ P, A, B և P, A, C:

10. β հարթության մեջ *A* կետով տանենք *AB*-ին ուղղահայաց, իսկ *D* կետով՝ *AB*-ին զուգահեռ ուղիղներ: Նրանց հատման կետը թող լինի *E*-ն: Այսպիսի կառուցման դեպքում *ABDE*-ն կլինի զուգահեռագիծ (ավելին՝ ուղղանկյուն): Եվ որպես զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմեր *AE*=*BD*=12 սմ, *DE*=*AB*=8 սմ:



Քանի որ երկնիստ անկյունն ուղիղ է, ապա *CAE* եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է: Ըստ Պյութագորասի թեորեմի, $CE^2 = AC^2 + AE^2 = 208$ սմ^2:

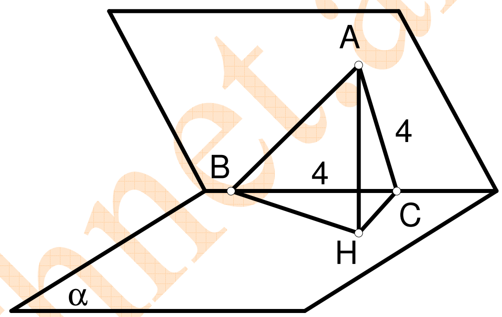
Ըստ ուղղի և հարթության ուղղահայացության հայտանիշի՝ *AB*-ն ուղղահայաց է *CAE* հարթությանը (*CA*⊥*AB*, *AE*⊥*AB*): Որպես *AB*-ին զուգահեռ ուղիղ՝ *DE*-ն նույնպես ուղղահայաց է *CAE* հարթությանը և, մասնավորապես, CE ուղղին: Ուրեմն CED-ն ուղղանկյուն եռանկյուն է, և ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝ $CD=\sqrt{CE^2+ED^2}=17$ սմ:

Պատ.՝ 17 սմ:

11. Նախորդ խնդիրը լուծելիս ապացուցեցինք, որ $CD^2=CA^2+AB^2+BD^2$: Այս դեպքում կունենանք $AB^2=AA_1{}^2+A_1B_1{}^2+BB_1{}^2$ (նույն վիճակն է, փոխվել են նշանակումները): Հետևաբար $A_1B_1=\sqrt{AB^2-AA_1^2-BB_1^2}=9$ սմ:

Պատ.՝ 9 սմ:

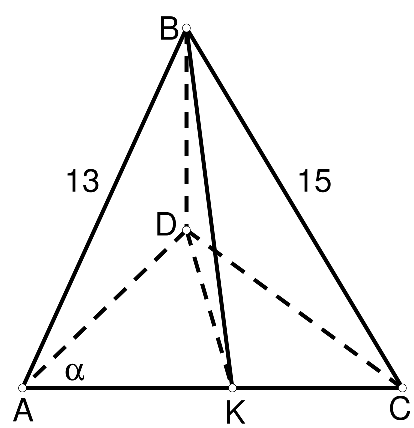
12. Ենթադրենք C ուղիղ անկյունով ABC հավասարասրուն եռանկյան BC սրունքով անցնող α հարթությունը եռանկյան հարթության հետ կազմում է 30^0 անկյուն:



Տանենք AH-ը՝ ուղղահայաց α-ին: Այդ դեպքում BH-ը կլինի AB-ի, իսկ CH-ը՝ AC-ի պրոյեկցիան: Հետևաբար, ըստ երեք ուղղահայացների թեորեմի՝ $\angle ACH=30^0$: AHC ուղղանկյուն եռանկյունից, որպես 30^0-ի անկյան դիմացի էջ, $AH=\dfrac{AC}{2}=2$ սմ: ABC ուղղանկյուն եռանկյունից, ըստ Պյութագորասի թեորեմի $AB=4\sqrt{2}$: Եվ վերջապես AHB ուղղանկյուն եռանկյունից, ըստ Պյութագորասի թեորեմի $BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=2\sqrt{7}$ սմ:

Պատ.՝ 2 սմ:

13. B գագաթից α հարթությանը տանենք BD ուղղահայացը: Տանենք նաև ABC եռանկյան BK բարձրությունը:



Ըստ երեք ուղղահայացների թեորեմի՝ DK-ն նույնպես ուղղահայաց կլինի AC-ին: Հետևաբար DKB անկյունը կլինի α հարթության և ABC եռանկյան հարթության կազմած անկյունը, որը ըստ խնդրի պայմանի 30^0 է:

Քանի որ BD-ն ուղղահայաց է ABC հարթությանը, մասնավորապես DK-ին, ապա BDC եռանկյունը կլինի 30^0-ի սուր անկյունով ուղղանկյուն եռանկյուն: Դրանից կետևի, որ B կետի հեռավորությունը ABC հարթությունից՝ BD-ն հավասար է BK-ի կեսին:

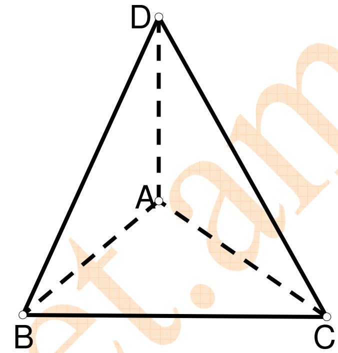
Ըստ Հերոնի բանաձևի $S_{ABC}=\sqrt{16\cdot1\cdot3\cdot12}=24$ սմ^2: Բայց այն հավասար է նաև BK բարձրության և AC հիմքի արտադրյալի կեսին՝ $S_{ABC}=\frac{1}{2}BK\cdot AC=2BK$: Հետևաբար BK=12 սմ: Ուրեմն $BD=\frac{BK}{2}=6$ սմ:

Պատ.՝ 6 սմ:

ԲԱԶՄԱՆԻՍՏԵՐ

2.1 Բազմանկյունների և բազմանիստերի պատկերումը

2. Այո: Օրինակ, եթե $ABCD$ բուրգի AD կողն ուղղահայաց է ABC հարթությանը, ապա այդ բուրգի պատկերը ABC հարթության վրա կլինի հենց ABC եռանկյունը:



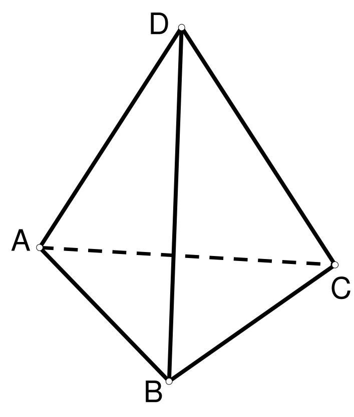
3. բ) Ենթադրենք այդ հարթությունը α հարթությունն է:

α հարթությունում A և B կետերի պրոյեկցիաները կհամընկնեն, այդ կետը նշանակենք K-ով: C-ի և D-ի պրոյեկցիաները կլինեն տարբեր կետեր, քանի որ DC-ն ուղղահայաց չէ α հարթությանը (հակառակ դեպքում այն զուգահեռ կլիներ AB-ին): Թող դրանք լինեն համապատասխանաբար M-ը և N-ը: Ուրեմն բուրգի չորս գագաթների պրոյեկցիաները կլինեն K, M և N կետերը, և բուրգի պատկերն էլ կլինի KMN եռանկյունը:

Դիտողություն: Սա նույնպես հաստատում է, որ բազմանիստի պրոյեկցիան կարող է լինել եռանկյուն (տես նախորդ խնդիրը):

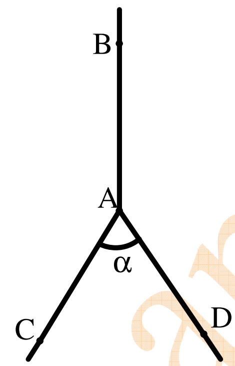
2.4 Բազմանիստ անկյուններ

1. Ենթադրենք այդ բուրգը $DABC$ բուրգն է: Նրա բոլոր հարթ անկյունների գումարը հավասար է նրա չորս՝ ACB, ACD, ADB, BCD նիստերի անկյունների գումարին: Բայց այդ նիստերը եռանկյուններ են, և նրանցից յուրաքանչյուրի անկյունների գումարը 180^0 է: Ուրեմն եռանկյուն բուրգի բոլոր հարթ անկյունների գումարը հավասար է $4\cdot 180^0 = 720^0$:



Պատ.՝ 720^0:

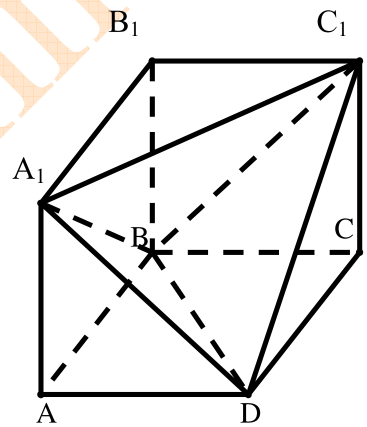
2. Քանի որ $AB \perp AD, AB \perp AC$, ապա ըստ ուղղի և հարթության ուղղահայացության հայտանիշի՝ $AB \perp ACD$: Ուրեմն, որպես ACD նիստին ուղղահայաց AB ուղղով անցնող հարթություններ՝ BAD-ն և BAC-ն ուղղահայաց են ACD հարթությանը: Վերջինից էլ հետևում է, որ $BADC$ և $BACD$ երկնիստ անկյուններն ուղիղ են:



AB կողով երկնիստ անկյան համար CAD անկյունը գծային անկյուն է ($AD \perp AB$, $AC \perp AB$): Ուրեմն այդ երկնիստ անկյան աստիճանային չափը α է:

Պատ.՝ $90^0, 90^0, \alpha$:

3. Ենթադրենք այդ եռանիստ անկյունը B գագաթով և BC, BA, BB_1 կողերով եռանիստ անկյունն է: Նրա կողերի վրա կառուցենք քառակուսիներ ինչպես ցույց է տրված նկարում: Այդ դեպքում քառակուսիների BA_1, BC_1 և BD անկյունագծերը ընկած կլինեն եռանիստ անկյան կիսորդների վրա:



Քառակուսիների կողմը նշանակենք a-ով և դիտարկենք BA_1D, BC_1D և BA_1C_1 եռանկյունները: Դրանք կլինեն $a\sqrt{2}$ կողմով հավասարակողմ եռանկյուններ: Վերջինից էլ հետևում է, որ այդպիսի եռանիստ անկյան հարթ անկյունների կիսորդների կազմած անկյուններ 60^0 են:

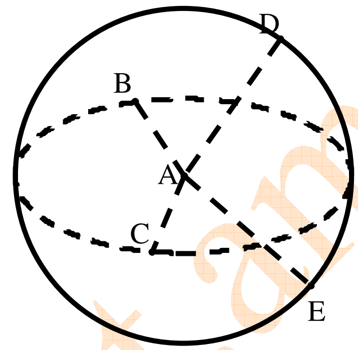
Պատ.՝ $60^0, 60^0, 60^0$:

4. ա) Եռանիստ անկյան երրորդ հարթ անկյունը նշանակենք α-ով: Քանի որ եռանիստ անկյան յուրաքանչյուր հարթ անկյուն փոքր է մյուս երկու հարթ անկյուններ գումարից, ապա պետք է տեղի ունենան հետևյալ պայմանները. $\alpha < 70^0 + 100^0$ և $100^0 < 70^0 + \alpha$:

Այսպիսով՝ $30^0 < \alpha < 170^0$: Նկատենք նաև որ 70^0-ի հարթ անկյան փոքր լինելը մյուս երկու հարթ անկյունների գումարից ապահովված է, քանի որ դրանցից մեկը 100^0 է:

Պատ.՝ մեծ է 30^0-ից և փոքր է 170^0-ից:

5. Նախ դիտարկենք մեկ եռանիստ անկյուն: Թող դա լինի *A* գագաթով և *AB*, *AC*, *AD* կողերով եռանիստ անկյունը: Պարզ է, որ այդ անկյունից դուրս կան տարածության կետեր: Նոր եռանիստ անկյուն ունենալու համար գոնե մեկ նոր կող է պետք: Թող դա լինի *AE* կողը: Այդ դեպքում կառաջանան չհատվող չորս եռանիստ անկյուններ հետևյալ կողերով. 1) *AB*, *AC*, *AD*, 2) *AB*, *AD*, *AE*, 3) *AD*, *AE*, *AC*, 4) *AB*, *AC*, *AE*: Այսպիսով՝ տարածությունը չի կարող տրոհվել 4-ից պակաս թվով եռանիստ անկյունների: Մյուս կողմից, նկարում ներկայացված դեպքում այն տրոհվել է չհատվող 4 եռանիստ անկյունների:

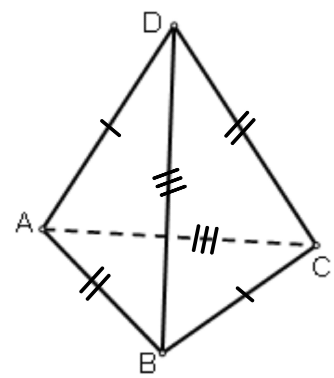


Պատ.՝ 4:

8. Ենթադրենք *DABC* բուրգում *AD*=*BC*, *AB*=*DC*, *AC*=*DB*: Այդ դեպքում բուրգի նիստերը՝ *ACB*, *ACD*, *ADB*, *BCD* եռանկյունները հավասար են ըստ երեք կողմերի:

Մնում է ցույց տալ, որ դրանք սուրանկյուն եռանկյուններ են:

Ենթադրենք այդ եռանկյուններում կան ոչ սուր անկյուններ, օրինակ $\angle ABD = \angle BAC = \angle BDC = \angle ACD \geq 90^0$:



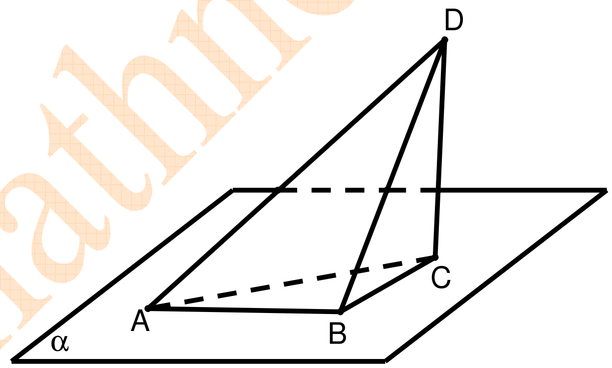
Այդ դեպքում բուրգի յուրաքանչյուր գագաթի հարթ անկյուններից մեկը կլինի մեծ կամ հավասար 90^0-ից: Իսկ քանի որ եռանիստ անկյան յուրաքանչյուր հարթ անկյուն փոքր է մյուս երկու հարթ անկյուններ գումարից, ապա յուրաքանչյուր գագաթի հարթ անկյունների գումարը մեծ կլինի 180^0-ից: Հետևաբար բուրգի բոլոր հարթ անկյունների գումարը մեծ կլինի $4 \cdot 180^0 = 720^0$-ից: Բայց եռանկյուն բուրգի բոլոր հարթ անկյունների գումարը 720^0 է (տես 1 խնդիրը): Այսպիսով՝ *ACB*, *ACD*, *ADB*, *BCD* եռանկյունները չեն կարող ունենալ անկյուն, որը մեծ կամ հավասար է 90^0-ից:

9. Խնդրի տվյալներին համապատասխանող կետեր գոյություն չունեն: Եթե նրանք գտնվեին մեկ հարթությունում, ապա *D*-ն պետք է լիներ *ABC* եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնը (*DA*=*DB*=*DC*), և *ADB*, *BDC*, *ADC* անկյունների գումարը պետք է լիներ 360^0: Բայց 50^0+90^0+ $+140^0 \neq 360^0$:

Եթե այդ կետերը չեն գտնվում մեկ հարթությունում, ապա *D* գագաթով և *DA*, *DB*, *DB* կողերով եռանիստ անկյան հարթ անկյունների համար պետք է տեղի ունենար $50^0+90^0>140^0$, որը տեղի չունի:

13. Ոչ: Օրինակ, դիտարկենք $AB=\sqrt{3}a$, $BC=a$, $AC=2a$ կողմերով *ABC* ուղղանկյուն եռանկյունը: *C* կետով տանենք եռանկյան հարթությանն ուղղահայաց *CD* հատվածը, որ հավասար է $\sqrt{2}a$ և *D* կետը միացնենք *A*-ին և *B*-ին:

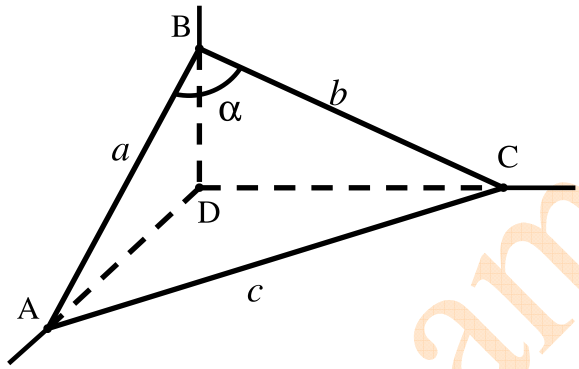
Պարզ է, որ *DAB* անկյան պրոյեկցիան α հարթության վրա կլինի *CAB* անկյունը: *ABC* ուղղանկյուն եռանկյունից $\angle CAB=30^0$ $\left(BC=\dfrac{AC}{2}\right)$:



Ըստ երեք ուղղահայացների թեորեմի՝ *ABD* եռանկյունը նույնպես ուղղանկյուն եռանկյուն է: Եվ քանի որ *AB*=*BD* $\left(BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{3}a\right)$, ապա $\angle DAB=45^0$:

Ավելին, եթե անկյան հարթությունը ուղղահայաց լինի դիտարկվող հարթությանը, ապա այդ անկյան պրոյեկցիան դիտարկվող հարթությունում կլինի ճառագայթ կամ ուղիղ:

16. Ենթադրենք այդ եռանիստ անկյան հատույթը ABC եռանկյունն է:



Ենթադրենք նաև որ $BD = x$, $AD = y$, $CD = z$, ընդ որում $x \le y \le z$:

Քանի որ եռանիստ անկյան հարթ անկյունները ուղիղ են, ապա ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝ $a^2 = x^2 + y^2$, $b^2 = x^2 + z^2$, $c^2 = y^2 + z^2$: Հետևաբար $c^2 < a^2 + b^2$: Ուրեմն ABC եռանկյան B անկյունը սուր է: Բացի այդ, $\angle C \le \angle A \le \angle B$, քանի որ $x \le y \le z$: Այսպիսով ABC եռանկյան բոլոր անկյուններն են սուր, այսինքն այն սուրանկյուն եռանկյուն է:

19. Ենթադրենք հակառակը. բոլոր գագաթներին հարակից հարթ անկյունների մեջ կա գոնե մեկը, որը սուր չէ (ուղիղ է, կամ բութ): Այդ դեպքում յուրաքանչյուր գագաթին հարակից հարթ անկյունների գումարը կլինի մեծ 180^0-ից, քանի որ եռանիստ անկյան յուրաքանչյուր հարթ անկյուն փոքր է մյուս երկու հարթ անկյուններ գումարից: Եվ կստացվի, որ բոլոր հարթ անկյունների գումարը մեծ է $4 \cdot 180^0 = 720^0$-ից: Բայց եռանկյուն բուրգի բոլոր հարթ անկյունների գումարը 720^0 է (տես 1 խնդիրը): Այսպիսով ենթադրությունը սխալ է, այսինքն կա գագաթ, որին հարակից անկյունները բոլորը սուր են:

20. Նախ ցույց տանք, որ ուռուցիկ բազմանիստի հարթ անկյունների գումարը բաժանվում է 360-ի:

Ենթադրենք բազմանիստն ունի n նիստ, և դրանք համապատասխանաբար $k_1, k_2, \ldots, k_n$ կողմերի թվով բազմանկյուններ են: Դրանց անկյունների գումարները կլինեն համապատասխանաբար $(k_1 - 2)180^0$, $(k_2 - 2)180^0$, …, $(k_n - 2)180^0$: Բազմանիստի բոլոր հարթ անկյունների գումարը կլինի $180^0(k_1 + k_2 + \ldots + k_n - 2n)$: Նկատենք նաև, որ բազմանիստի յուրաքանչյուր կող պատկանում է նրա նիստերից երկուսին: Իսկ դա նշանակում է, որ $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 2m$, որտեղ m-ը բազմանիստի կողերի թիվն է: Այսպիսով՝ բազմանիստի բոլոր հարթ անկյունների գումարը հավասար է $180^0(2m - 2n) = 360^0(m - n)$, այսինքն բաժանվում է 360-ի:

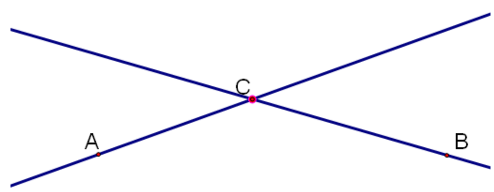
Վերադառնալով մեր խնդրին՝ ենթադրենք, որվերջին գագաթի հարթ անկյունների գումարը α է: Այդ դեպքում բազմանիստի բոլոր հարթ անկյունների գումարը կլինի $3300^0+\alpha$: Վերջինս ներկայացնենք $360^0\cdot 9+60^0+\alpha$ տեսքով: Ուրեմն $60+\alpha$-ն պետք է բաժանվի 360-ի, ընդ որում $\alpha<360^0$ (տես 18 խնդիրը): Պարզ է դառնում, որ α-ի միակ հնարավոր արժեքը 300^0-ն է: Հետևաբար բազմանիստի բոլոր հարթ անկյունների գումարը կլինի $3300^0+\alpha=3600^0$:

Պատ.՝ 3600^0

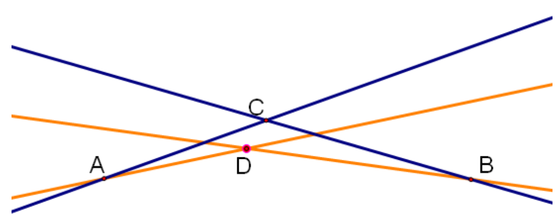
22. Պարզ ասված է, որ պետք է օգտվել նախորդ խնդրի արդյունքից: Պետք է նաև նկատի ունենալ, որ քանոնով կարելի է կառուցել իր երկարությունից ինչքան ուզում եք մեծ երկարությամբ հատված, դրա հիմքը «տրված երկու կետերով անցնում է ուղիղ, այն էլ միայն մեկը» աքսիոմն է:

Նախորդ կետից հետևում է, որ խնդիրը լուծված կլինի, եթե *AB* ուղղի վրա կառուցվի կետ, որի հեռավորությունը կամ *A*-ից, կամ *B*-ից փոքր է քանոնի երկարությունից:

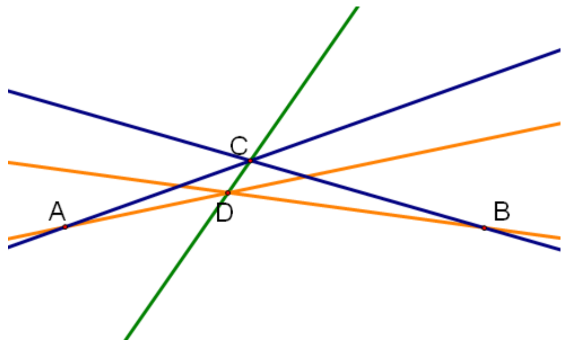
Կառուցեք *A*-ով ու *B*-ով անցնող երկու հատված: Թող դրանք հատվեն *C* կետում:



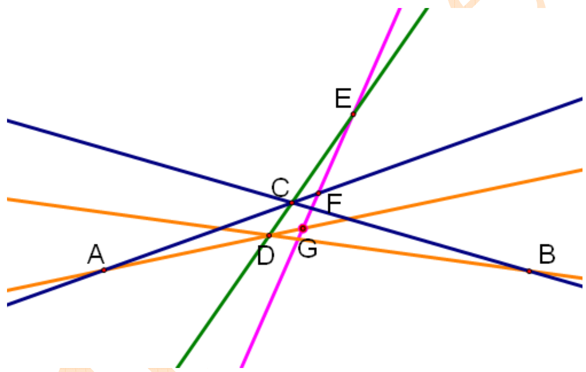
Կառուցեք *A*-ով ու *B*-ով անցնող ևս երկու հատված, որոնք նախորդների հետ փոքր անկյուններ են կազմում, այնպես, որ նրանց հատման *D* կետի հեռավորությունը *C* կետից փոքր լինի քանոնի երկարությունից:



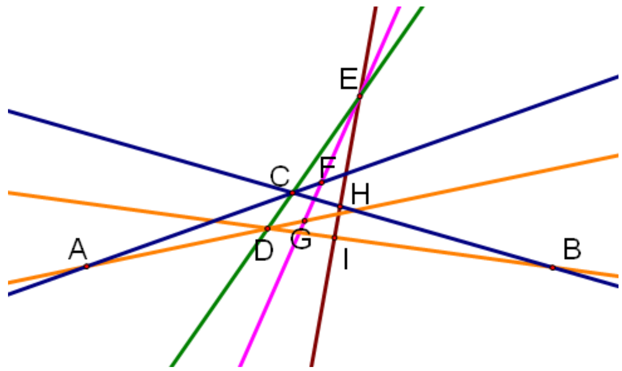
C և *D* կետերով տարեք բավականին մեծ երկարության հատված:



Այդ հատվածի վրա վերցրեք նոր կետ՝ E-ն: E կետով տարեք CD –ի հետ փոքր անկյուն կազմող հատված, որը հատվում է AC-ի ու AD-ի հետ (F և G կետրեր):

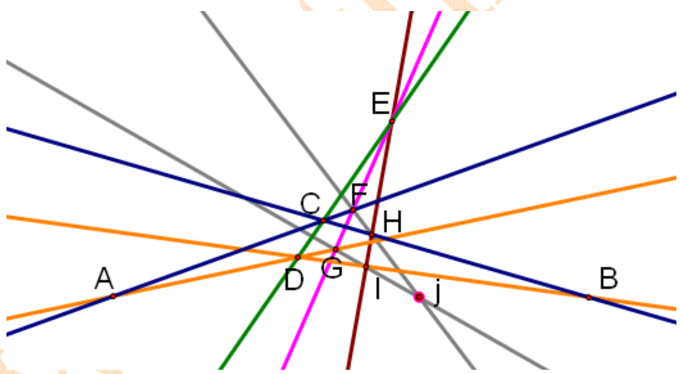


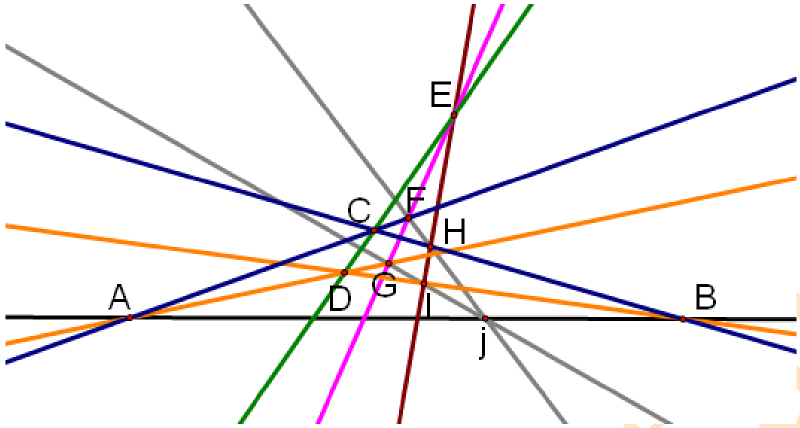
E կետով տարեք CD –ի հետ փոքր անկյուն կազմող և մեկ հատված, որը հատվում է BC-ի ու BD-ի հետ (H և I կետրեր): Կառուցումն իրականացրեք այնպես, որ F,G,H,I կետերը գտնվեն CD ուղղի միևնույն կողմում:



Հիմա արդեն ունենք նախորդ խնդրի վիճակը՝ *E* կետով տարված են երեք հատվածներ: Դրանցից մեկի վրա վերցված են *C* և *D* կետերը, մյուսի վրա՝ *F* և *G* կետերը, երրորդի վրա՝ *H* և *I* կետերը. ընդ որում ՝ *CF*-ն ու *DG*-ն հատվում են *A* կետում, *CH*-ն ու *DI*-ն հատվում են *B* կետում:

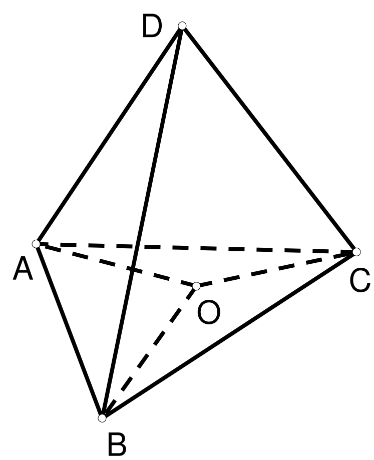
Հետևաբար՝ *FH*-ի ու *GI*-ի հատման *J* կետը գտնվում է *AB* ուղղի վրա: Մեր ընտրած տակտիկայի դեպքում այն պատկանում է *AB* հատվածին:





Եթե AJ-ն կամ BJ-ին փոքր է քանոնի երկարությունից, ապա խնդիրը լուծված է: Իսկ եթե երկուսն էլ երկար են քանոնից, ապա նույն քայլերն անելով, ասենք, AJ-ի համար կարող ենք ստանալ նոր կետ ՝ J_1 արդեն AJ հատվածի վրա: Եթե քանոնը կարճ է և AJ_1-ից, և JJ_1-ից պետք է նոր կառուցումներ անել, մինչև AB հատվածի վրա կստանանք քանոնից կարճ հատված:

[Հատած բուրգ



1. Գծագրի և շարադրանքի պարզության համար ենթադրենք, որ տրված է $DABC$ եռանկյուն բուրգը: Ապահովելով քայլերի և դատողությունների կիրառելիությունը ցանկացած այլ բուրգի դեպքում՝ կպահպանենք խնդրի ընդհանրությունը:

Բուրգի բարձրությունը թող լինի DO-ն: Դիտարկենք AOD, BOD և COD ուղղանկյուն եռանկյունները: Քանի որ $DA=DB=$ $=DC$, իսկ DO-ն ընդհանուր է, ապա այդ եռանկյունները հավասար են ըստ էջի և ներքնաձիգի:

Հետևաբար $AO=BO=CO$: Ուրեմն բուրգի բարձրության O հիմքը հավասարահեռ է հիմքի գագաթներից, այսինքն հիմքին արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Այսպիսով՝ $AO=BO=CO=R$, և ըստ Պյութագորասի թեորեմի կունենանք $AO=\sqrt{AD^2-DO^2}=\sqrt{b^2-h^2}$:

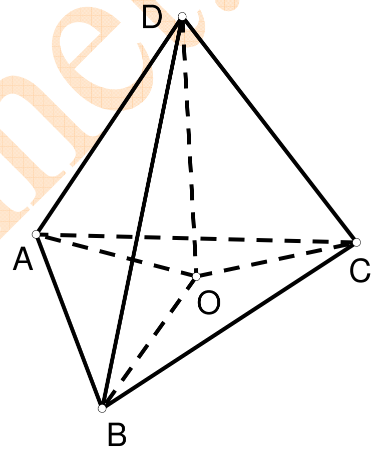
Պատ.՝ $\sqrt{b^2-h^2}$ ։

4. Խնդրի պայմանի դեպքում բուրգի կողմնային նիստերը հավասարակողմ եռանկյուններ են։ Հետևաբար այդ եռանկյունների անկյունները 60^0 են։ Եթե այդպիսի բուրգը ունենա 6 և ավել նիստեր, ապա նրա գագաթի բազմանիստ անկյան հարթ անկյունների գումարը մեծ կամ հավասար կլինի 360^0-ից։ Իսկ դա հնարավոր չէ (տես նախորդ կետի 18 խնդիրը)։

Եռանկյուն, քառանկյուն և հնգանկյուն բուրգերի դեպքում բոլոր կողերի հավասար լինելը որևէ պայմանի չի հակասում և այդպիսի բուրգեր կան։

Պատ.՝ Երեք, եռանկյուն, քառանկյուն և հնգանկյուն։

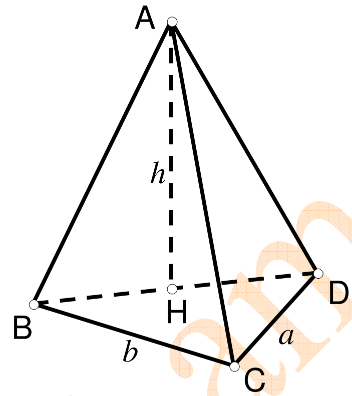
5. Գծագրի և շարադրանքի պարզության համար ենթադրենք, որ տրված է *DABC* եռանկյուն բուրգը։ Ապահովելով քայլերի և դատողությունների կիրառելիությունը ցանկացած այլ բուրգի դեպքում՝ կպահպանենք խնդրի ընդհանրությունը։



Բուրգի բարձրությունը թող լինի *DO*-ն։ Դիտարկենք *AOD, BOD* և *COD* ուղղանկյուն եռանկյունները։

Ունենք, որ $\angle DAO=\angle DBO=\angle DCO\equiv$ $\equiv\alpha$։ Ուրեմն $\angle ADO=\angle BDO=\angle CDO=$ $=90^0-\alpha$, իսկ *DO*-ն ընդհանուր է։ Հետևվաբար այդ եռանկյունները հավասար են ըստ էջի և առընթեր անկյան։ Վերջինից էլ հետևում է, որ *AO=BO=CO:* Ուրեմն բուրգի բարձրության *O* հիմքը հավասարահեռ է հիմքի գագաթներից, այսինքն բուրգի հիմքը ներգծյալ բազմանկյուն է և նրան արտագծած շրջանագծի կենտրոնը բուրգի գագաթի պրոյեկցիան է։

6. Քանի որ բուրգի կողմնային կողերը հավասար են, ապա բուրգի հիմքը ներգծյալ եռանկյուն և նրան արտագծած շրջանագծի կենտրոնը բուրգի գագաթի պրոյեկցիան է (տես 1 խնդրի լուծումը): Իսկ ուղանկյուն եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնը ներքնաձիգի միջնակետն է: Ուրեմն AHB ուղղանկյուն եռանկյունում $BH = \frac{BD}{2}$:

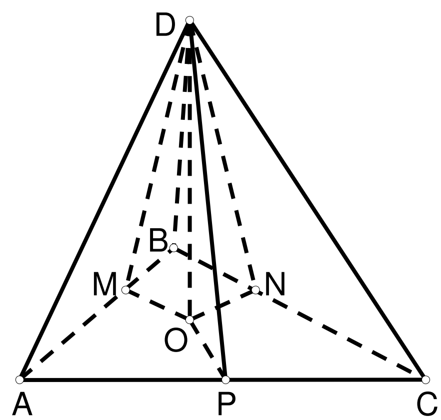


Բացի այդ, BCD հիմքը a և b էջերով ուղղանկյուն եռանկյուն է: Ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝ $BD^2 = a^2 + b^2$: Պյութագորասի թեորեմը կիրառելով AHB եռանկյան համար՝ կունենանք $h = \sqrt{l^2 - BH^2} = \sqrt{l^2 - \frac{a^2+b^2}{4}}$:

Պատ.՝ $\sqrt{l^2 - \frac{a^2+b^2}{4}}$:

7. Նախ ապացուցենք, որ եթե բուրգի հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունները հավասար են, ապա նրա հիմքը արտագծյալ բազմանկյուն է և հիմքին ներգծած շրջանագծի կենտրոնը բուրգի գագաթի պրոյեկցիան է:

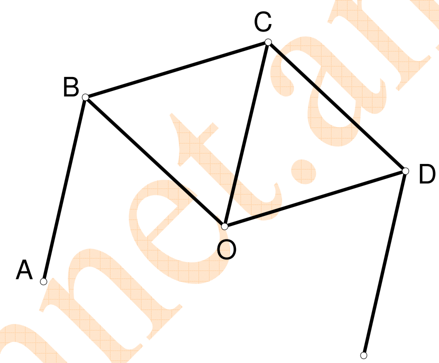
Գծագրի և շարադրանքի պարզության համար ենթադրենք, որ բուրգը, որի հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունները հավասար են՝ $DABC$ եռանկյուն բուրգն է: Ապահովելով քայլերի և դատողությունների կիրառելիությունը ցանկացած այլ բուրգի դեպքում՝ կպահպանենք խնդրի ընդհանրությունը:



Բուրգի բարձրությունը թող լինի DO-ն, իսկ O-ից հիմքի կողմերին տարած ուղղահայացները՝ OM-ը, ON-ը և OP-ն: Այդ դեպքում, ըստ երեք ուղղահայացների մասին թեորեմի, $DM \perp AB$, $DN \perp BC$ և $DP \perp AC$: Հետևաբար հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունները հավասար են DMO, DNO և DPO անկյուններին: Ուրեմն $\angle DMO = \angle DNO = \angle DPO$: Վերջինից հետևում է, որ հավասար են նաև DOM, DON և DOP ուղղանկյուն եռանկյունների մյուս սուր անկյունները: Այսպիսով, DOM, DON և DOP ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են ըստ էջի և նրան առընթեր սուր անկյան: Հետևաբար $OM=ON=OP$: Դա էլ հենց նշանակում է, որ բուրգի հիմքը արտագծյալ բազմանկյուն է և հիմքին ներգծած շրջանագծի կենտրոնը բուրգի գագաթի պրոյեկցիան է:

Քանի որ բուրգի կողմնային կողերը հավասար են, ապա բուրգի հիմքը ներգծյալ բազմանկյուն է և նրան արտագծած շրջանագծի կենտրոնը բուրգի գագաթի պրոյեկցիան է (տես 1 խնդրի լուծումը):

Այսպիսով՝ բուրգի կողմնային կողերը հավասար են, բացի այդ նրա հիմին կարելի է և ներգծել, և արտագծել շրջանագիծ, որոնց կենտրոնները համընկնում են (բուրգի գագաթի պրոյեկցիան է): Մնում է ցույց տալ, որ նրա հիմքը կանոնավոր բազմանկյուն է:



Ունենք, որ հիմքի բազմանկյանը կարելի է և ներգծել, և արտագծել շրջանագիծ ու դրանց կենտրոնները համընկնում են: Ցույց տանք, որ այն կանոնավոր բազմանկյուն է:

Ներգծած և արտագծած շրջանագծերի կենտրոնը նշանակենք O-ով և այն միացնենք որևէ երեք հաջորդական գագաթների, օրինակ B, C և D գագաթներին: Քանի որ $OB=OC=R$, ապա $\angle CBO=\angle BCO\equiv\alpha$, $OD=OC=R$ հավասարություններից էլ հետևում է, որ $\angle CDO=\angle DCO\equiv\beta$: Քանի որ O-ն ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է, ապա BO-ն և CO-ն համապատասխանաբար B և C անկյունների կիսորդներն են: Ուրեմն $\alpha=\beta$ և $\angle B=\angle C=2\alpha$: Նույն ձևով կարելի է ցույց տալ մնացած անկյունների 2α լինելը:

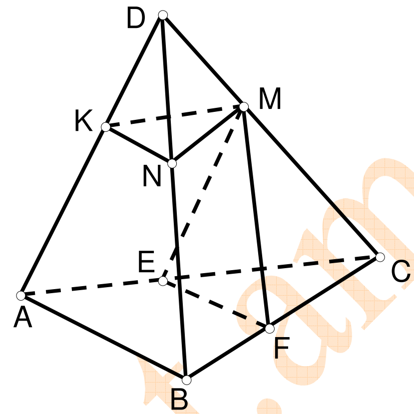
Դիտարկելով BOC և COD եռանկյունները՝ կունենանք $OB=OC=OD==R$, $\angle BOC=\angle COD=180^0-2\alpha$, հետևաբար այդ եռանկյունները հավասար են ըստ առաջին հայտանիշի: Վերջինից էլ հետևում է, որ $BC=CD$: Նույն ձևով կարելի է ցույց տալ ցանկացած երկու կողմերի հավասարությունը:

Ստացվեց, որ բազմանկյան անկյունները հավասար են, հավասար են նաև կողմերը: Ուրեմն այն կանոնավոր բազմանկյուն է:

8. Քանի որ բուրգի հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունները հավասար են, ապա նրա հիմքը արտագծյալ բազմանկյուն է (տես 7 խնդրի լուծումը): Իսկ արտագծյալ քառանկյան հանդիպակաց կողմերի գումարները հավասար են: Ուրեմն հիմքի չորրորդ կողմը կլինի $5+8-7=6$:

Պատ.՝ 6:

9. Որպես ABC նիստին զուգահեռ տարված հատույթ՝ MNK եռանկյունը նման է ABC եռանկյանը: Գտնենք այդ եռանկյունների նմանության գործակիցը:



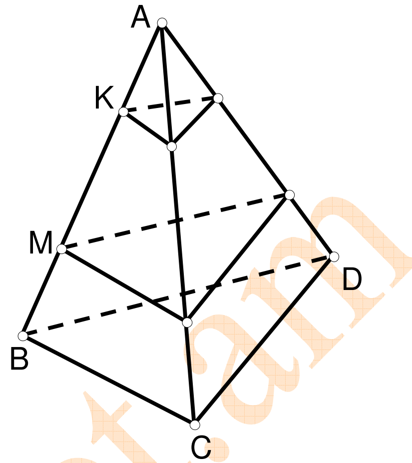
Որպես MNK և ABC զուգահեռ հարթությունների հատման գծեր՝ MK-ն զուգահեռ է AC-ին: Վերջինից հետևում է, որ նման են DMK և DCA եռանկյունները: Հետևաբար $\frac{MK}{CA}=\frac{DM}{DC}=\frac{1}{3}$ $\left(\frac{MC}{DM}=2\right)$: Ուրեմն MNK և ABC եռանկյունների նմանության գործակիցը $\frac{1}{3}$ է: Վերջինից էլ հետևում է, որ $\frac{S_{MNK}}{S_{ABC}}=\frac{1}{9}$: Որտեղից $S_{MNK}=\frac{1}{9}S_{ABC}$:

Որպես ABD նիստին զուգահեռ տարված հատույթ՝ MEF եռանկյունը նման է ABD եռանկյանը: Կատարելով վերևում արված դատողություններին նման դատողություններ՝ դժվար չէ տեսնել, որ $\frac{S_{MEF}}{S_{ABD}}=\frac{4}{9}$: Որտեղից $S_{MEF}=\frac{4}{9}S_{ABD}$:

Հայտնի է նաև, որ $S_{ABC}=4S_{ABD}$: Ուրեմն $S_{MNK}=\frac{1}{9}S_{ABC}=\frac{4}{9}S_{ABD}$: Հետևաբար $\frac{S_{MEF}}{S_{MNK}}=\frac{4}{9}S_{ABD}:\frac{4}{9}S_{ABD}=1$:

Պատ.՝ 1:

11. Ինչպես գիտենք բուրգի հիմքին զուգահեռ հատույթը հիմքին նման բազմանկյուն է: Իսկ նման բազմանկյունների մակերեսների հարաբերությունը հավասար է նմանության գործակցի քառակուսուն:



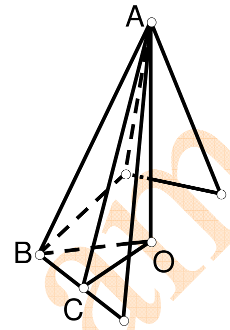
Նշանակենք $AK = BM \equiv x$, $KM \equiv y$: K կետով տարված հատույթի մակերեսը նշանակենք S_1-ով, M կետով տարված հատույթի մակերեսը՝ S_2-ով, իսկ հիմքի մակերեսը՝ S-ով: Կունենանք $\dfrac{S_1}{S} = \left(\dfrac{x}{2x+y}\right)^2$, $\dfrac{S_2}{S} = \left(\dfrac{x+y}{2x+y}\right)^2$: Բացի այդ, հայտնի է, որ $S_1 + S_2 = \dfrac{2}{3}S$: Առաջին երկուսից գտնելով $S_1 + S_2$-ը և համեմատելով երրորդի հետ՝ կունենանք $\left(\dfrac{x}{2x+y}\right)^2 + \left(\dfrac{x+y}{2x+y}\right)^2 = \dfrac{2}{3}$: Ձևափոխելով վերջինը կստանանք $2x^2 + 2yx - y^2 = 0$: Արտահայտելով x-ը y-ով և հաշվի առնելով x-ի դրական լինելը՝ կունենանք $x = \dfrac{\sqrt{3}y - y}{2}$:

Ըստ մեր նշանակումների՝ $\dfrac{KM}{AB} = \dfrac{y}{2x+y}$: Ուրեմն $\dfrac{KM}{AB} = \dfrac{y}{2x+y} =$
$= \dfrac{y}{\sqrt{3}y} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$:

Պատ.՝ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$:

12. Գրքում խնդիրը սխալ է ձևակերպված. «իսկ հիմքի հետ կողմնային նիստերի կազմած անկյունները հավասար են β»-ի փոխարեն պետք է լինի. իսկ հիմքի հետ կողմնային կողերի կազմած անկյունները հավասար են β: Սխալ է նաև գրքի պատասխանը:

Քանի որ բուրգի հիմքի հետ կողմնային կողերի կազմած անկյունները հավասար են, ապա բուրգի կողմնային կողերը հավասար են (ապացուցեք ինքնուրույն): Իսկ քանի որ բուրգի կողմնային կողերը հավասար են, և հավասար են բուրգի հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունները, ապա այն կանոնավոր բուրգ է (տես 7 խնդիրը):



Այսպիսով՝ $\angle ABO = \beta$, $\angle ACO = \alpha$, ընդ որում $BO = R$, $CO = r$, որտեղ R-ը հիմքին արտագծած, իսկ r-ը ներգծած շրջանագծերի շառավիղներն են:

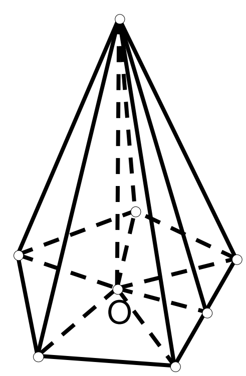
AOB և AOC ուղղանկյուն եռանկյուններից՝ $tg\beta = \frac{AO}{R}$, $tg\alpha = \frac{AO}{r}$: Հետևաբար $\frac{tg\alpha}{tg\beta} = \frac{R}{r}$:

Ըստ խնդրի պայմանի $\frac{tg\alpha}{tg\beta} = k$: Ուրեմն $k = \frac{R}{r}$: Օգտվելով կանոնավոր n-անկյանն արտագծած և ներգծած շրջանագծերի շառավիղների կապի $r = R\cos\frac{\pi}{n}$ բանաձևից՝ կունենանք $k = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}$:

Երբ k=2, $\cos\frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}$, որտեղից n=3:

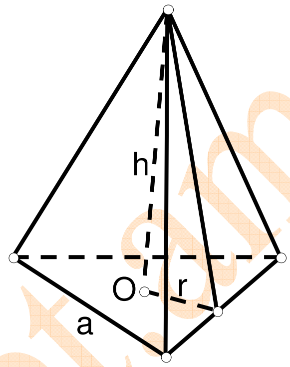
Պատ.՝ 3, $k = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}$, $n = 3, 4, 5, \ldots$:

13. Բուգի բարձրության O հիմքը միացնենք հիմքի բոլոր գագաթներին: Առաջացած եռանկյուններից յուրաքանչյուրը կողմնային նիստերից մեկի պրոյեկցիան է: Կողմնային նիստերի մակերեսները թող լինեն $S_1, S_2, \ldots, S_n$: Օգտվելով պրոյեկցիայի մակերեսի մասին թեորեմից՝ հիմքի վրա առաջացած եռանկյունների մակերսների համար կունենանք $S_1\cos\alpha$, $S_2\cos\alpha, \ldots, S_n\cos\alpha$: Իսկ դրանց գումարը հավասար է հիմքի մակերեսին. $S_1\cos\alpha + S_2\cos\alpha + \ldots + S_n\cos\alpha = (S_1 + S_2 + \ldots + S_n)\cos\alpha$: Բայց կողմնային նիստերի մակերեսների գումարը S է: Ուրեմն բուրգի հիմքի մակերեսը կլինի $S\cos\alpha$:



Պատ.՝ $S\cos\alpha$:

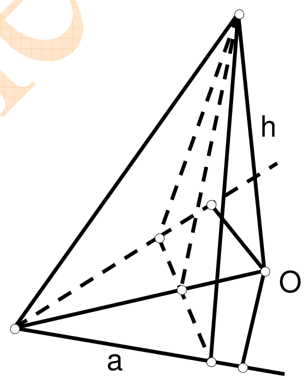
14. Հնարավոր է երկու դեպք. 1) բուրգի բարձրության հիմքը պատկանում է բուրգի հիմքին և 2) բուրգի բարձրության հիմքը չի պատկանում բուրգի հիմքին:



1) դեպքում կունենանք, որ բուրգի հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունները հավասար են: Իսկ եթե բուրգի հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունները հավասար են, ապա բուրգի բարձրությունն անցնում է հիմքին ներգծած շրջանագծի կենտրոնով (տես խնդիր 7-ի լուծումը):

$$tg\alpha = \frac{h}{r} \qquad r = h \cdot ctg\alpha \qquad a = 2\sqrt{3}r = 2\sqrt{3}hctg\alpha$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 3\sqrt{3}h^2ctg^2\alpha$$



2) դեպքում բուրգի բարձրության O հիմքից հիմքի կողմերը պարունակող ուղիղներին տանենք OK, OM, ON ուղղահայացները և բուրգի A գագաթը միացնենք K, M և N կետերին:

Ըստ երեք ուղղահայացների թեորեմի՝ AKO, AMO, ANO անկյունները կլինեն բուրգի նիստերի և հիմքի հարթության կազմած երկնիստ անկյունների գծային անկյունները և, ըստ խնդրի պայմանի, կլինեն α: AKO, AMO, ANO ուղղանկյուն եռանկյունների մյուս սուր անկյունները էլ կլինեն $90^0 - \alpha$: Այդ ուղղանկյուն եռանկյունները կլինեն հավասար ըստ էջի և նրան առընթեր անկյան: Վերջինից կհետևի, որ O-ն հավասարահեռ է բուրգի հիմքի կողմերը պարունակող ուղիղներից, այսինքն հիմքի եռանկյանն առգծած շրջանագծի կենտրոնն է: