ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ТОЧЕК ТРЕУГОЛЬНИКА

Агекян Гагик Ворошевич

Виртуальные лаборатории по геометрии или программы по динамической геометрии являются мощным средством для изучения и преподавания геометрии. Они могут применяться по разному (см., например, [1] – [4]), в частности, с их помощью можно обнаружить геометрические свойства, которые трудно или не возможно обнаружить традиционными средствами, тем боле, если речь идёт о «динамических» свойствах геометрических фигур.

О таком примере, из моей практики, и хочу рассказать.

Готовя иллюстрацию к теореме Эйлера[*] при помощи программы «The Geometr's Sketchpad», у меня возникло желание посмотреть какие следы оставляют ортоцентр, центроид и инцентр треугольника, когда одна вершина треугольника двигается по окружности описанной около данного треугольника. В результате получилось удивительная и красивая картина, похожая на глаз (я бы назвал это "глазом Эйлера", см. рис. 1).

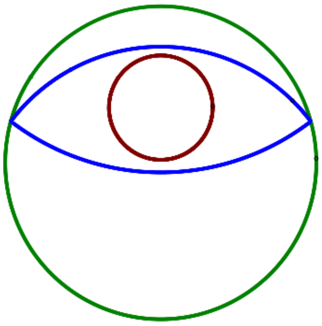

Рисунок 1

Наблюдения показали, что это не случайность. Возникла гипотеза, что след ортоцентра есть окружность, след центроида – другая окружность, а след инцентра – две дуги некоторых окружностей.

Экспериментируя в среде «The Geometr's Sketchpad», я сделал гипотезы относительно радиусов и центров этих окружностей, сформулировал и доказал следующие теоремы:

Теорема 1. ***Расстояние точки пересечения высот (или их продолжений) H треугольника ABC от точки O_1, симметричной точки O относительно прямой AC, равно R, где O*** есть центр окружности описанной около треугольника ABC, ***а R – радиус этой окружности.***

Теорема 2. ***Любая точка H_1 (кроме двух точек, которые получается из точек A и C, переносом на вектор $2\overrightarrow{OO_1}$) окружности с центром в точке O_1 и радиусом R, является точкой пересечения высот (или их продолжений) некоторого треугольника AB_1C, где B_1 некоторая точка окружности описанной около треугольника ABC. (O, O_1 и R те же самые, что и в теореме 1).***

Теорема 3. ***Пусть E*** и ***F являются точками пересечения описанной окружности треугольника ABC и серединного перпендикуляра стороны AC. Если вершина B является внутренней точкой дуги AEC, то $FK = FC$, где K есть точка пересечения биссектрис треугольника ABC.***

Теорема 4. ***Любая внутренняя точка K_1 дуги AC окружности с центром F и радиусом FC, находящаяся внутри окружности описанной около треугольника ABC, является точкой пересечения биссектрис треугольника AB_1C, где вершина B_1 принадлежит дуге AEC. (E и F те же самые точки, что и в теореме 3).***

Теорема 5. ***Расстояние от точки пересечения медиан M треугольника ABC до точки P, которая делит перпендикуляр, проведенной из точки O к стороне AC в отношение 2:1, считая от точки O, равен $\frac{R}{3}$. (O и R те же самые, что и в теореме 1).***

---

[*] Центроид лежит на отрезке, соединяющем ортоцентр и центр описанной окружности, и делит его в отношении 2:1.

<u>Теорема 6.</u> Любая точка M_1 окружности с центром в точке P и радиусом $\frac{R}{3}$, который не принадлежит стороне AC, является точкой пересечения медиан некоторого треугольника AB_1C, где B_1 некоторая точка окружности описанной около треугольника ABC. (P и R те же самые, что и в теореме 5).

Хочу отметить, что зная динамические свойства замечательных точек треугольника, можно составить интересные и красивые задачи, которые легко решаются использованием этих же свойств.

Вот некоторые из них.

Задача 1. Дана вершина A треугольника ABC и прямая содержащее высоту, проведенную из вершины A. Дан так же отрезок, длина которой равна расстоянию центра окружности, описанной около треугольника ABC, до стороны BC. Используя только циркуль, построить точку пересечения высот (или их продолжения), если известно, что угол A треугольника ABC острый.

Задача 2. Даны симметричные точки центра окружности описанной около треугольника ABC относительно сторон треугольника. Построить точку пересечения высот (или их продолжения) треугольника ABC.

Задача 3. Дана окружность описанной около треугольника ABC, вершины A, B и C треугольника, а так же биссектриса угла ABC (луч). Используя только циркуль, построить центр окружности вписанной в треугольник.

Задача 4. Даны точки, которые делят перпендикуляры проведенные из центра O описанной около треугольника ABC окружности к сторонам треугольника в отношении 2:1, считая от точки O. Построить точку пересечения медиан треугольника ABC.

Эксперименты, которые помогли уточнить местонахождения центров и величины радиусов этих окружностей, могут служить сценариями для проведения интересных лабораторно-исследовательских работ, которые будут хорошим средством для усиления прикладной и практической направленности обучения. Сюжеты исследовательских задач можно найти и в работе [5].

Как пример рассмотрим задачу ортоцентра треугольника. В конце приведём доказательства теорем 1 и 2.

Ортоцентр треугольника

Возьмём окружность и впишем в неё треугольник ABC.

Построим точку пересечения высот (или их продолжений) этого треугольника.

Оставляя неподвижным вершины A и C треугольника, вершину B перемещаем по окружности описанной около треугольника, при этом получая след ортоцентра H треугольника ABC (см. рис. 2).

Полученная кривая похожа на окружность.

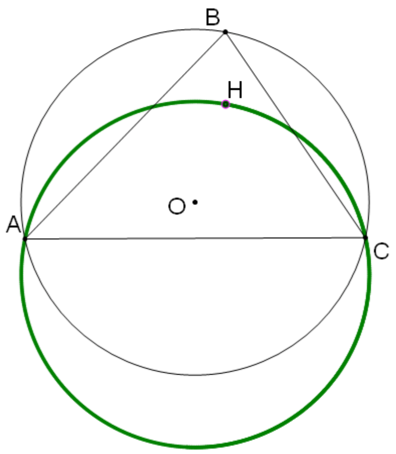

Рисунок 2

Но визуальное наблюдения нуждаются в экспериментальном подтверждении. А как это сделать?

Для этого создадим инструмент который строит окружность и центр окружности по трём заданным точкам. В программе «The Geometr's Sketchpad» есть такая возможность.

Используя созданный инструмент, строим окружность по трём точкам следа ортоцентра (см. рис. 3). Результат эксперимента можно считать положительным.

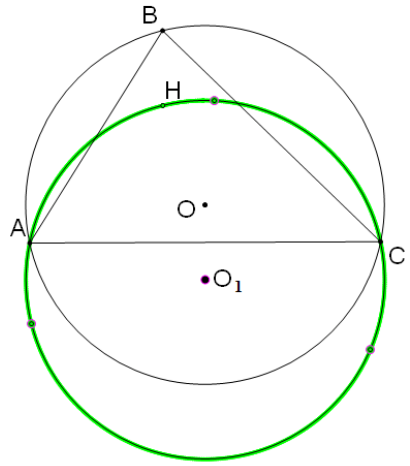

Рисунок 3

Из соображения симметричности задачи можем предположить, что центр этой окружности (точка O_1) находится на серединном перпендикуляре отрезка AC. Но где именно? Местонахождение центра этой окружности и величина радиуса могут зависеть от радиуса окружности описанной около треугольника и от расстояния стороны AC от центра окружности описанной около треугольника. Поочерёдно меняя эти параметры и измеряя радиус и расстояние ценрта предполагаемой окружности от стороны AC, получаем следующие значения (см. таблицу).

a \ R	3		7	
	r	d	r	d
1	3,00	1,01	7,04	1,02
2	3,00	1,98	7,04	2,00
2,5	2,98	2,51	7,05	2,51

Здесь R – радиус окружности описанной около треугольника, a – расстояние стороны AC от центра окружности описанной около треугольника, r – радиус предполагаемой окружности (следа), d – расстояние центра предполагаемой окружности от стороны AC.

Данные таблицы, с учётом погрешностей построений (след имеет толщину) приводят к мысли, что r зависит только от R, а d – только от a. Кроме того, значения r почти не отличаются от значений R, а значения d – от значений a.

Надо обратить внимание и на то, что точки O и O_1 находятся на разных сторонах отрезка AC.

Таким образом мы приходим к гипотезе, что центр предполагаемой окружности (следа) и центр окружности описанной около треугольника симметричны относительно прямой AC, а радиус предполагаемой окружности (следа) равен R.

Чтобы укрепить наши предположения, можно построить предполагаемую окружность (это построение уже будет точным) и посмотреть двигается ли ортоцентр треугольника по этой окружностью, когда вершина B двигается по окружности описанной около треугольника ABC. При этом можем менять как R, так и a. Эксперименты подтверждают наши предположения (см. рис. 4).

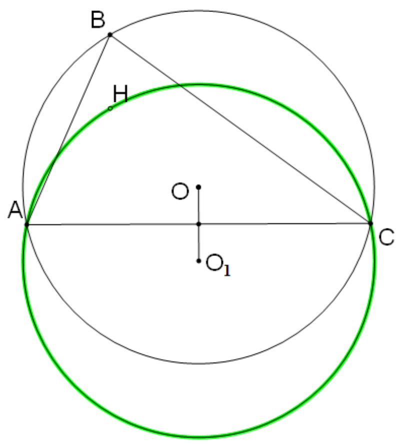

Рисунок 4

Итак ясно, что для формулировки гипотезы надо найти ответы на разные вопросы, надо решить некоторые подзадачи, надо попытаться всесторонне изучить задачу. Но лучше, если всё это ученики будут делать самостоятельно. Конечно, при необходимости им надо помогать, задать наводящие вопросы, но основную работу они должны делать сами. Тогда это будут учебно-исследовательская, созидательная работа, ученики получат огромную пользу и удовольствие.

Перейдём к доказательству теорем.

Центр и радиус окружности описанной около треугольника ABC соответственно обозначим через O и R.

***<u>Теорема 1.</u>* *Расстояние точки пересечения высот (или их продолжений)* H *треугольника* ABC *от точки* O_1*, симметричной точки* O *относительно прямой* AC*, равно* R.**

Доказательство. Если $\angle B = 90^\circ$, то точка H совпадает с точкой B, а точка O_1 совпадает с точкой O (см. рис. 5). И тогда очевидно, что $O_1H = OB = R$.

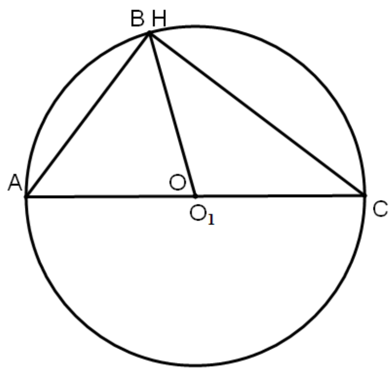

Рисунок 5

Если $\angle A = 90^\circ$ (или $\angle C = 90^\circ$), то точка H совпадает с точкой A (или с точкой C). Так как прямая AC есть серединный перпендикуляр отрезка OO_1, то $AO = AO_1$ (см. рис. 6). Следовательно $O_1H = AO_1 = AO = R$.

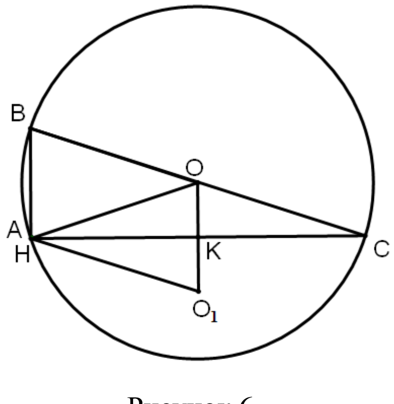

Рисунок 6

Докажем, что если треугольник ABC не прямоугольный, то $HD = DE$, где D есть точка пересечения прямых BH и AC, а E есть точка пересечения прямой BH и окружности описанной около треугольника ABC (отличной от точки B).

Рассмотрим три случаи.

1) Треугольник ABC остроугольный (см. рис. 7).

2) Угол B треугольника ABC тупой (см. рис. 8).

3) Угол A треугольника ABC тупой (см. рис. 9).

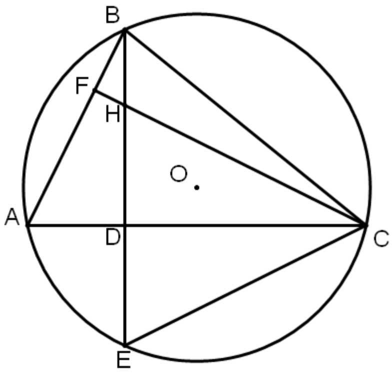

Рисунок 7

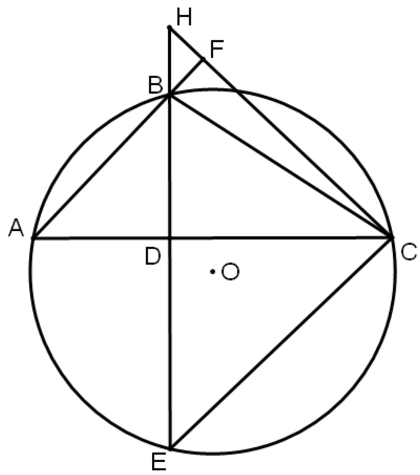

Рисунок 8

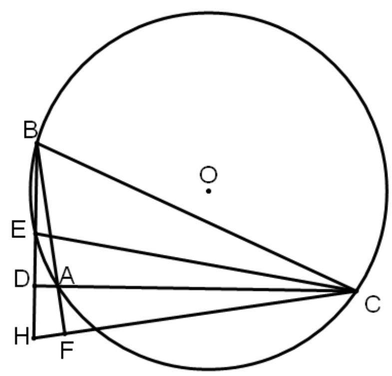

Рисунок 9

В двух первых случаях $\angle ABE = 90^\circ - \angle BAC$, $\angle FCA = 90^\circ - \angle BAC$. Следовательно $\angle ABE = \angle FCA$. Кроме того, как вписанные углы, опирающие на одну и ту же дугу, $\angle ABE = \angle ACE$. Таким образом $\angle FCA = \angle ACE$. Из последнего следует равенство прямоугольных треугольников HDC и EDC. А из этого следует, что $HD = DE$.

В третьем случае $\angle ABE + 90^\circ = \angle BAC$, $\angle FCA + 90^\circ = \angle BAC$. И снова будем иметь, что $\angle ABE = \angle FCA$. А вписанные угли ABE и ACE равны, так как опираются на одну и ту же дугу. Из последнего следует равенство прямоугольных треугольников HDC и EDC. Следовательно $HD = DE$.

Докажем, что $BH = 2a$, где a есть расстояние стороны AC от центра окружности, описанной около треугольника ABC. Не смотря на то, что для прямоугольных треугольников теорема доказана, заметим , что и тогда $BH = 2a$.

Возьмём $OM \perp BE$. Тогда $MD = a$. Кроме того, OM делит пополам хорду BE, т.е. $BM = ME$. Как уже доказали $HD = DE$. Обозначим $HD = DE \equiv b$. Тогда в случае 1) вместо $BM = ME$, будем иметь $b - a + BH = b + a$ (см. рис. 10). Следовательно $BH = 2a$. В случае 2) вместо $BM = ME$, будем иметь $b - BH + a = b - a$ (см. рис. 11). Следовательно $BH = 2a$. В случае 3) вместо $BM = ME$, будем иметь $BH - b - a = a - b$ (см. рис. 12). Следовательно $BH = 2a$.

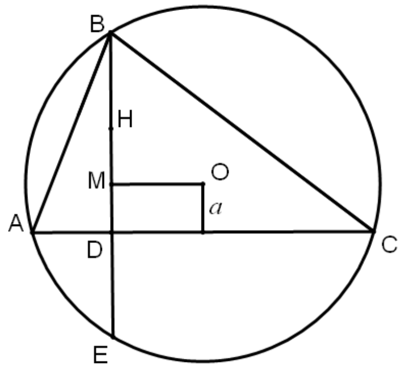

Рисунок 10

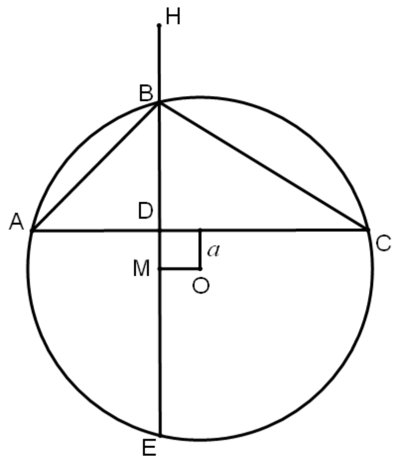

Рисунок 11

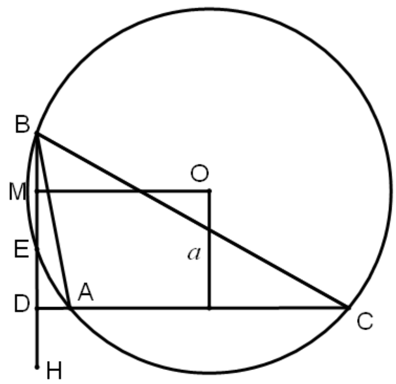

Рисунок 12

Обращая внимание на расположение точки H и используя полученное, можно сказать, что точка H получается из точки B переносом на вектор $2\overrightarrow{OO_1}$. А это означает, что четырёхуголник $HBOO_1$ есть параллелограмм. Следовательно $O_1H = OB = R$.

Не трудно убедится, что если точка B находится на серединном перпендикуляре стороны AC (т.е. когда точки H, B, O, O_1 находятся на одной прямой) снова $O_1H = R$.

Теорема 1 доказана.

Верно и обратное.

<u>Теорема 2.</u> Любая точка H_1 (кроме двух точек, которые получается из точек A и C, переносом на вектор $2\overrightarrow{OO_1}$) окружности с центром в точке O_1 и радиусом R, является точкой пересечения высот (или их продолжений) некоторого треугольника AB_1C, где B_1 некоторая точка окружности описанной около треугольника ABC. (O, O_1 и R те же самые, что и в теореме 1).

Доказательство. В качестве B_1 возьмём точку, которая получается из точки H_1 переносом на вектор $-2\overrightarrow{OO_1}$ (см. рис. 13). Тогда B_1 не совпадет ни с точкой A, ни с точкой C. Кроме того, четырёхуголник $H_1B_1OO_1$ будет параллелограммом. Следовательно $OB_1 = O_1H_1 = R$. А это значит, что B_1 некоторая точка окружности описанной около треугольника ABC.

Для треугольника AB_1C, как было установлено при доказательстве теоремы 1, точка пересечения высот (или их продолжений) H_2 получается из точки B_1 переносом на вектор $2\overrightarrow{OO_1}$. Так как B_1 получен из точки H_1 переносом на вектор $-2\overrightarrow{OO_1}$, то точки H_2 и H_1 совпадают, т.е. H_1 есть точка пересечения высот (или их продолжений) треугольника AB_1C.

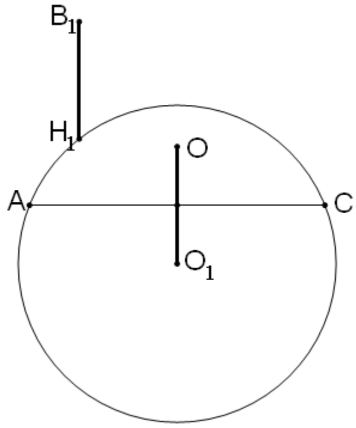

Рисунок 13

Из теорем 1 и 2 получаем следствие:

<u>Следствие.</u> Если две вершины треугольника неподвижны, а третья вершина двигается по окружности описанной около треугольника центром в точке O и радиусом R, то точки пересечения высот (или их продолжений) треугольников наполняют окружность (кроме двух точек, которые получается из концов неподвижной стороны, переносом на вектор $2\overrightarrow{OO_1}$), центр которой O_1 есть симметричная точка точки O относительно неподвижной стороны, а радиус равен R.

Заметим, что когда подвижная вершина совпадает с каким-то концом неподвижной стороны, то мы имеем дело не с треугольником, а с отрезком. И если договоримся в таких случаях считать, что точка пересечения высот (или их продолжений) есть точка, которая получается из этого же конца неподвижной стороны переносом на вектор $2\overrightarrow{OO_1}$, то след ортоцентра (с вышесказанным обобщением) будет замкнутая кривая.

Литература

1. Кобельский В.Л., Степанова Е.В., Компьютерная обучающая система «Планимертия 7–9» // «Компьютерные инструменты в образовании» 2001, N 2, ст. 58–67.

2. Храповицкий И.С. Эвристический полигон для геометрии // «Компьютерные инструменты в образовании» 2003, N 1, ст. 15–26.

3. Петриченко Д.Н., Поздняков С.Н., Рыжик В.И. Электронная рабочая тетрадь по геометрии для 9 класса // «Компьютерные инструменты в образовании» 2006, N 2, ст. 58–64.

4. Дубровский В.Н., Лебедева Н.А., Белайчук О.А. 1С: Математический конструктор – новая программа динамической геометрии // «Компьютерные инструменты в образовании» 2007, N 3, ст. 47–56.

5. Иванов С.Г., Люблинская И.Е., Рыжик В.И., Ron Armontrout, Lauire Boswell, Tim Corica Исследовательские сюжеты для среды «The Geometr's Sketchpad» // «Компьютерные инструменты в образовании» 2003, N 3, ст. 14–20.

Агекян Гагик Ворошевич
кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики и математического моделирования Российско-Армянского (Славянского) университета, г. Ереван, Армения.